

基于 Lyapunov 指数的非线性 Lamb 波的微裂纹检测*

柏 林, 唐 滔, 刘小峰, 韦代平

(重庆大学机械传动国家重点实验室 重庆, 400044)

摘要 为了提高在背景噪声干扰下非线性 Lamb 波对于结构微裂纹的检测精度, 提出了利用 Duffing 振子和 Lyapunov 指数对噪声干扰下的非线性 Lamb 波特征进行增强与量化分析的方法。首先, 采用了庞加莱图确定 Duffing 系统外策动力参数; 其次, 将周期延拓滤波后的非线性 Lamb 波输入调整好的 Duffing 系统中, 对系统输出时间序列进行相空间重构, 计算出相应的最大 Lyapunov 指数。通过多个模型数据的仿真分析结果表明, 即使在噪声干扰情况下, Lyapunov 指数与裂纹大小也存在着良好的线性关系。该方法对噪声干扰下的微裂纹缺陷识别具有明显的优势, 对提高非线性 Lamb 波的检测灵敏度具有重要意义。

关键词 非线性 Lamb 波; 杜芬方程; Lyapunov 指数; 结构微裂纹

中图分类号 TH142.1; TN911.7

引 言

当结构中疲劳裂纹或微裂纹等早期损伤时, 谱分析会发生高阶谐波滋生, Lamb 波的非线性特征变化与板材内部缺陷之间存在着特定的关系, 可用于无损定量评价结构材料的早期损伤程度, 研究不需要参考信号的非线性 Lamb 波的结构健康监测新方法, 具有重要的工程应用价值。国内学者在非线性 Lamb 波的传播激励以及应用技术方面已经取得一定的研究成果。例如: 材料的力学性能变化对非线性二次谐波敏感性研究^[1-2]; 基于二次谐波的积累增长效应的材料非线性性质检测等^[3-4]。目前, 针对非线性 Lamb 波信号的特征增强及其提取方法的研究很少, 基本上都停留在频域二次谐波幅值大小的衡量上。必须指出的是, 基频激发的二次非线性 Lamb 波信号由于模式和传播速度的原因, 极易衰减掉, 且容易被噪声淹没, 导致检测可靠性降低, 给裂纹的定量评估带来了较大误差。关于裂纹损伤特征与非线性 Lamb 波信号之间的定量关系, 非线性 Lamb 波的分析方法和损伤评价特征提取方法等还有许多问题需要深入研究。鉴于线性 Lamb 波对微小裂纹检测的局限性及非线性 Lamb 波对外界干扰的敏感性, 研究微裂纹超声 Lamb 波的非线

性特征增强方法对板构件的早期裂纹损伤识别具有重要意义。

基于混沌振子系统的弱信号检测技术利用混沌振子的非平衡相变对系统参数的敏感性以及对噪声信号的免疫能力, 实现强噪声背景下微弱信号的检测。混沌检测系统在 Lamb 波的缺陷检测已经进行了一段时间的探索性研究。武静等^[5]采用 Lyapunov 指数对管道缺陷损伤进行了评价与定位。文献^[6]研究了斜裂纹管道超声导波的混沌振子检测方法。但目前的研究主要集中在 Lamb 波分析中, 还没有涉及到微裂纹产生的非线性 Lamb 波检测。应用 Duffing 混沌振子对微弱信号检测理论来分析板材结构微裂纹在 Lamb 激励下的非线性特性进行微裂纹的检测, 是一个全新的研究领域。笔者在分析非线性 Lamb 波信号的产生激励及传播特性的基础上, 采用 Duffing 振子方程对微弱周期信号进行了增强, 并采用 Lyapunov 指数对裂纹产生 Lamb 波的非线性特征进行了量化分析。

1 非线性 Lamb 波的传播原理

当 Lamb 波经过发生换能器输入材料中, 材料在超声波作用下内部空间受到扰动, 在这种较大扰动下, 内部的微小裂纹出现周期性的闭合张开。当

* 中国自然科学基金资助项目(51475052, 51675064); 中央高校基本科研业务费资助项目(106112016CDJZR115502); 博士后基金资助项目(2016T90833, 2015M582519)
收稿日期: 2017-01-11; 修回日期: 2017-03-09

超声波信号与微裂纹相互作用时,将改变微裂纹处的阻尼,使之与周边均匀材料不同,局部质点的振动速度也将发生变化,所以与连续体材料相比会产生显著的高频谐波信号^[7-8]。对大部分材料而言,应力 σ 与应变 ϵ 成非线性的关系。在小区间内,可由胡克定律描述为

$$\sigma = E\epsilon(1 + \beta\epsilon + \dots) \quad (1)$$

其中: E 为弹性模量; β 为二阶弹性系数,也称为非线性系数。

β 可以作为描述介质非线性的一个参数。对出现接触类损伤的金属结构来说,可认为结构的非线性主要是由接触类损伤导致的,因此可以通过测量参数 β 的变化检测、评价结构的损伤

$$\beta = \frac{8}{k^2 x} \frac{A_2}{A_1^2} \quad (2)$$

其中: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数; λ 为波长; x 为传播的距离; A_1 和 A_2 分别为基波和二次谐波幅值。

根据文献[9],微裂纹导致的超声非线性系数的表达式为

$$\beta' = \frac{A_2}{A_1} \quad (3)$$

在实际非线性 Lamb 波测试过程中,二次谐波的幅值与基波的幅值相对非常小,常常被淹没在噪声信号中。因此,对微弱谐波信号进行有效增强,采用微弱谐波信号检测技术对其进行定性定量分析。

2 基于 Duffing-Holmes 的微弱波检测

杜芬(Duffing)振子方程被用于微弱信号检测的基本原理是:由于其非线性特征,当输入信号中有周期信号时,系统将发生状态的迁移。由于裂纹引起的非线性 Lamb 波中的二次谐波非常微弱且易收到外界环境干扰,为提高振子对微弱谐波检测的灵敏度与工作稳定性,去掉原始 Duffing 系统中恢复力项的线性部分 x ,引入非线性部分 x^5 ,转化为 Duffing-Holmes 振子方程^[10]

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) - x^3(t) + x^5(t) = F\cos(\omega t) \quad (4)$$

其中: k 为阻尼比; $(-x^3(t) + x^5(t))$ 为系统的非线性恢复力项; $F\cos(\omega t)$ 为内策动力项; F 为策动力幅值; ω 为策动力角频率。

当确定式(1)中的阻尼比 k ,逐渐增大策动力幅值 F ,使 Duffing 振子处于由混沌状态向大尺度周期状态转变的临界状态。在这种状态下,稍增大策动力幅值 F ,Duffing 振子的运动状态将转变为大尺度周期状态。

为了实现 Duffing 系统对任意频率谐波检测的普适性,需对系统的时间尺度进行缩放。令 $t = \omega_0 \tau$, ω_0 为待测频率,则式(9)进行尺度变化为

$$\ddot{x}(t) + \omega_0 k \dot{x}(t) - \omega_0^2 x^3(t) + \omega_0^2 x^5(t) = \omega_0^2 F \cos(\omega t) \quad (5)$$

采用式(5)可以在不改变 Duffing 振子系统的参数条件下,通过变化系统计算步长,实现对非线性 Lamb 波高次谐波的检测,从而大大降低系统复杂度,进一步增强了系统的微弱谐波检测性能。

混沌状态可利用相轨迹图进行判断,但这不便于工程的应用。混沌系统的另一个基本特征是对初始条件的敏感性。两个相近的初始条件会产生两条混沌轨道,这两条轨道会随着时间的变化逐渐分离, Lyapunov 指数就是用来描述相邻轨道分离程度的。Lyapunov 指数特别适用于检测初始条件微小变化及敏感性非常大情况下的特性,可用来定量描述混沌系统的稳定性。在一维动力系统 $x_{n+1} = F(x_n)$ 中,原动力系统在 x_0 处的 Lyapunov 指数表示为

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \left| \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_k} \quad (6)$$

Lyapunov 指数对轨道运动的平均结果用来表示整个系统的特征。当 $\lambda > 0$ 时,可判定系统处于混沌状态;当 $\lambda < 0$ 时,系统运行轨迹是局部稳定的,且对初始条件不敏感。系统的运动状态为大尺度周期状态。计算 Lyapunov 指数的方法包括定义法、正交法、wolf 法^[11]和小数据量法等。笔者采用 Wolf 法计算 Duffing 系统的求解信号。

3 微裂纹检测与量化方法

Duffing 振子系统具有对参数敏感及对噪声免疫的特性,噪声在有限时间内使系统产生复杂运动,但最终趋于规则,而且在统计意义上,零均值的噪声不会改变系统原有的运动趋势,只是在原有轨迹附近做振荡。因此可根据系统是否发生相变来检测微小非线性 Lamb 信号的存在与否以及确定其参数,具体的实施步骤如下:

- 1) 根据 Lamb 波的采样频率及激发频率,设置 Duffing-Holmes 振子系统的变换尺度及分析步长 h 与内置频率 ω ;
- 2) 初步确定系统的混沌临界阈值 f_d ,然后在没有待测信号和噪声输入情况下调整好 f_d 和 k 的值,使得系统刚好处在倍混沌临界状态;
- 3) 由于裂纹波包属于瞬态信号,而 Duffing 振

子一般用于稳定谐波的检测,因此需要对获得采集的 Lamb 波包进行周期延拓处理;

4) 为降低一次谐波对二次谐波检测的影响,采用高通滤波方法将一次谐波去掉,将滤波后的信号输入到 Duffing-Holmes 振子系统,利用龙格库塔法求解模型;

5) 对 Duffing-Holmes 振子系统输出的时间序列采用 C-C 法确定时延参数 τ 与嵌入维数 m , 进行相空间重构;

6) 采用 Wolf 方法在重构相空间中计算出最大 Lyapunov 指数,并进行归一化处理;

7) 对不同裂纹模型数据重复步骤 3~4, 得出不同裂纹模型数据的 Lyapunov 指数,进行 Lyapunov 指数与裂纹长度的线性分析。

4 有限元模型

当前主要通过数值计算模拟 Lamb 波在含微裂纹的铝板中传播,得出影响非线性系数 β 的因素,并且定量地得出一定的线性相关性。为了进行 Duffing 振子对裂纹大小的定量分析,采用有限元软件 ABAQUS 建立了 1 个无裂纹铝板及 6 个尺寸分别为 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1 及 1.2 mm 的二维微小椭圆型裂纹的有限元模型。用 ABAQUS 进行有限元分析,采用二维 shell 模型,铝板尺寸为 1 000 mm \times 2 mm, 铝板材料密度为 2 700 kg/m³, 弹性模量为 70 GPa, 泊松比为 0.35。在边界条件中给左端添加位移激励来激励铝板产生 S₀ 模态 lamb 波, 激励信号是中心频率为 140 kHz 的 10 周期汉宁窗调制正弦信号, 最大幅值为 1 \times 10⁻⁸ mm。激励点与裂纹距离为 500 mm, 裂纹与接收点距离为 100 mm, 右端固定。采样时间间隔设为 2 \times 10⁻⁸ s, 采样频率为 5 \times 10⁷ Hz。

不同的混沌振子具有不同的混沌检测性能,为了能更有效地实现微弱非线性 Lamb 谐波的检测,必须要选择一个对二次谐波信号敏感的混沌系统,设置式(5)中的系统参数 $k=0.5$, 初始状态 $x(0)=dx(0)=0$, 并调节参数 F 至 0.725 时使系统处于混沌临界状态。取 0.6 mm 长裂纹模型的 Lamb 波信号进行分析,接收点接收到的波形及其频谱如图 1 所示。

从图 1 可知,接收 Lamb 波包中的二次谐波非常微弱,与 1 次谐波的幅值相差 3 个数量级,在实测信号中裂纹二次谐波易受到噪声的影响,不管是在时

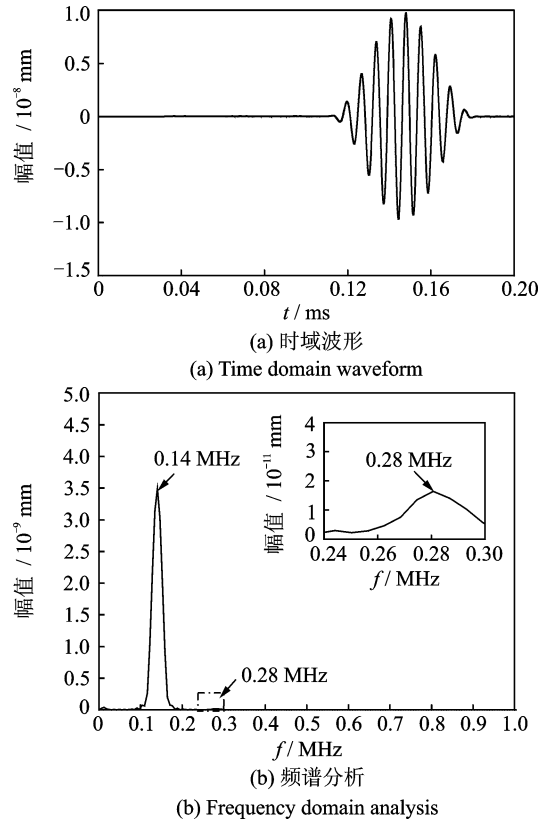


图 1 0.6 mm 裂纹时接收到的时域波形及频谱
Fig. 1 The time waveform and spectrum of 0.6 mm crack

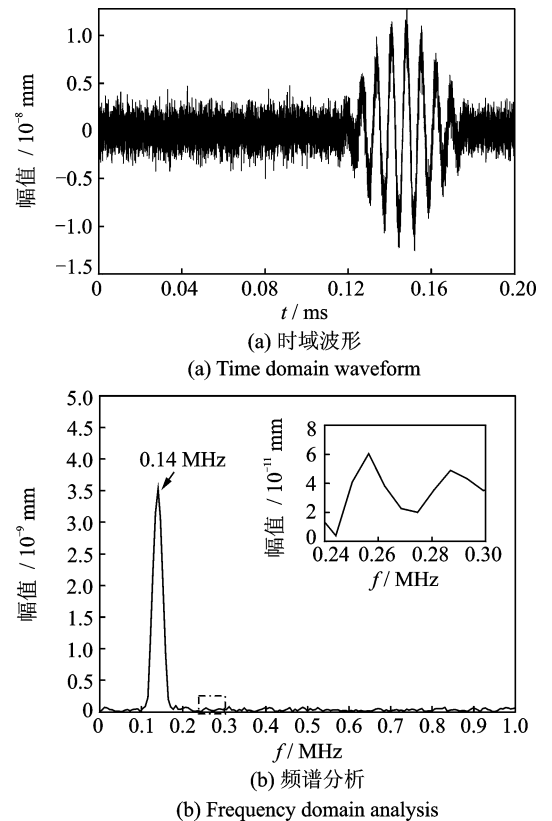


图 2 加噪裂纹信号及其频谱
Fig. 2 The time waveform and spectrum of crack signal with plus noise

域还是在频域都无法检测出来。为模拟真实的检测 Lamb 波,在图 1 的接收信号中加入标准差为 $1.124 2 \times 10^{-9}$ 的白噪声,如图 2 所示。可以看出,二次谐波已经完全淹没在噪声中,放大频谱中的二次谐波幅值无法直接分辨出来。可见,传统的 β 指数量化分析裂纹方法在干扰情况下已经完全失效。

采用本研究方法首先截取 Lamb 波波包进行整周期延拓,并进行低阻滤波去掉 1 次谐波对混沌振子的影响。将滤波后的信号输入调整好的 Duffing 系统中,采用 4~5 阶变步长 Runge-Kutta 法求解,得到系统的相轨图以及庞加莱界面图如图 3 所示。从图 3 的相轨图可看出,在加入滤波裂纹信号后,系统已经从混沌状态进入了大尺度周期状态,在相应的 Poincare 图上为变一个稳定的离散点,证实了加入信号二次谐波成分的存在,表征了模型中裂纹损伤。其中,相轨迹 x 与 dx/dt 为无量纲参数。

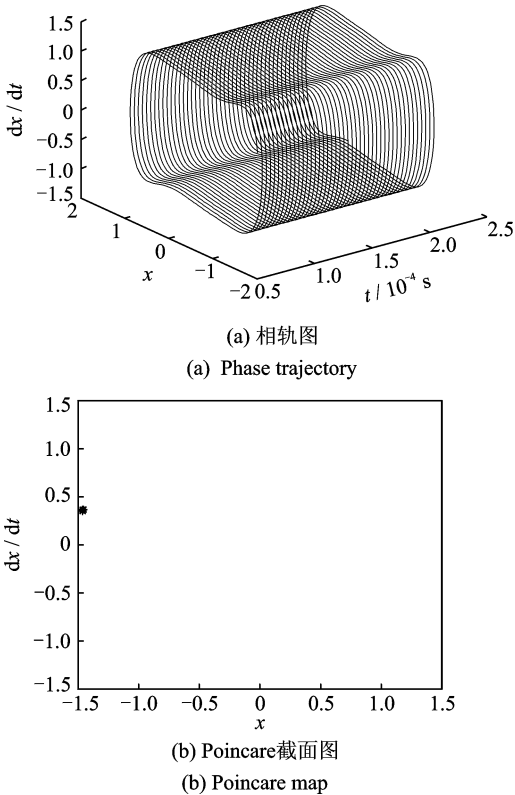


图 3 裂纹信号的相轨图和庞加莱图

Fig. 3 The phase trajectory and Poincaré map of crack signal

采用同样的方法,在无裂纹健康模型产生的 Lamb 波信号中加同样大小的噪声,同样采用周期延拓与滤波处理后,输入到 Duffing 系统中得到的相轨迹图以及庞加莱界面图如图 4 所示。可以看出,Duffing 系统的相图为混沌状态,且 Poincaré 图中为一遍分散点,此时系统无法稳定在某一个周期成分。因此可判定,输入信号中并不存在二次谐波

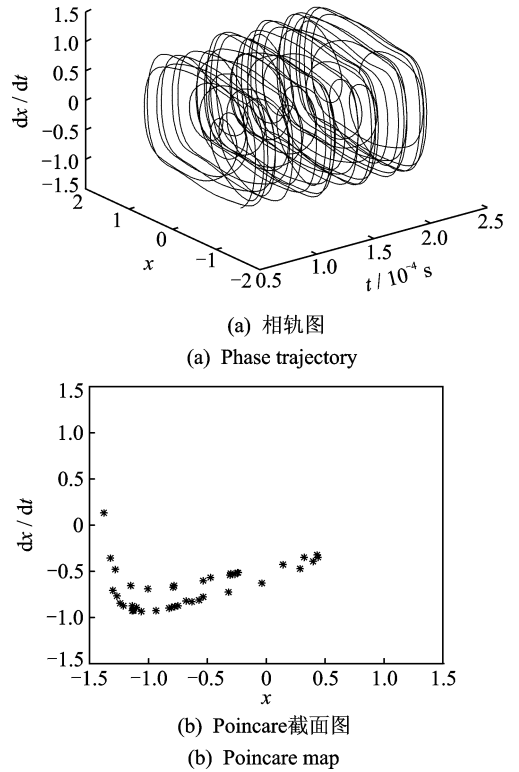


图 4 无损信号的相轨迹图与庞加莱图

Fig. 4 The phase trajectory and Poincaré map of no crack signal

频率 280kHz,验证了模型中无裂纹缺陷。

为了对裂纹做进一步的量化分析,通过 C-C 法,对时间 Duffing 系统获得的时间序列 $x(t)$ 进行最大 Lyapunov 指数计算。首先,需要对时间序列 $x(t)$ 做相空间重构,采用 C-C 法计算出的延迟时间和最小嵌入维数分别为 $\tau=7$ 和 $m=5$,通过 wolf 法求取 $x(t)$ 的最大 Lyapunov 指数为 $-2.439 3 \times 10^{-4}$ 。采用同样的方法分别对其他 5 个裂纹模型非线性 Lamb 波及无损信号获得最大 Lyapunov 指数,结果如表 1 所示。可以发现,对于裂纹模型的最大 Lyapunov 指数均小于 0,这说明待检信号中只要包含和 Duffing-Holmes 系统外策力频率相同的二次谐波 280kHz,都会导致 Lyapunov 指数由大于 0 转变为小于 0。以裂纹信号的 Lyapunov 指数的相反数与无损信号的 Lyapunov 指数之比作为裂纹损伤指标 γ ,即

$$\gamma = -\left(\frac{\text{LLE}_1}{\text{LLE}_0}\right) \times 10^2 \quad (7)$$

其中: LLE_1 为裂纹信号的 Lyapunov 指数; LLE_0 为无损信号的 Lyapunov 指数。

损伤指标 γ 与裂纹大小之间的线性关系如图 5 (a)所示。无噪声干扰情况下非线性指数 β' 与裂纹大小的线性关系如图 5(b)所示。比较可知,在强噪

声干扰情况下得到的 Lyapunov 指数比 β' 指数能更有效地对微裂纹大小进行定量分析,为结构中微裂纹的辨识与衡量提供了新的手段与方法。

为了比较 γ 与 β 系数与裂纹长度及之间线性拟合关系,采用确定系数(R-square)来描述系数与裂纹大小之间的线性拟合度。

$$R\text{-square} = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (8)$$

其中:SSR 为拟合指数与实际指数均值之差的平方和;SST 为实际指数计算值和其均值之差的平方和。

SSR 的计算公式为

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$$

其中: y_i 为不同尺寸裂纹所对应的缺陷指数 γ 或 β 。

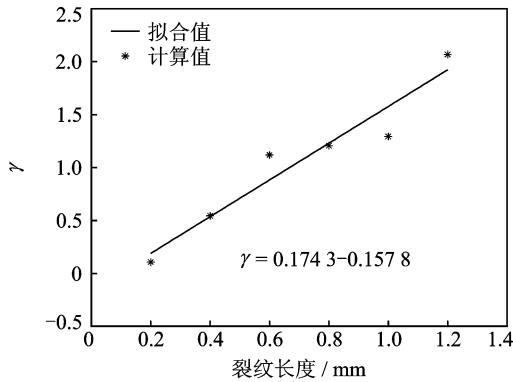
SST 的计算公式为

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2$$

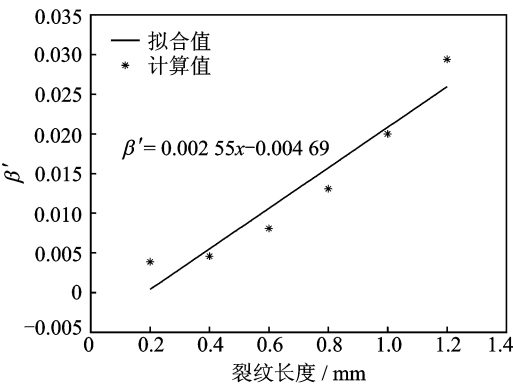
表 1 Lyapunov 指数与 β' 指数的对比

Tab. 1 Comparison and analysis of Lyapunov exponent and β exponent

裂纹长度/mm	无噪基波幅值 A_1	无噪二次谐波幅值 A_2	无噪 β'	加噪下 Lyapunov 指数	加噪下 γ 指数
0	4.891×10^{-9}	—	—	0.021 8	—
0.2	4.891×10^{-9}	1.909×10^{-11}	0.003 9	$-2.326 3 \times 10^{-5}$	0.106 7
0.4	4.891×10^{-9}	2.238×10^{-11}	0.004 6	$-1.185 4 \times 10^{-4}$	0.543 8
0.6	4.891×10^{-9}	3.981×10^{-11}	0.008 1	$-2.439 3 \times 10^{-4}$	1.118 9
0.8	4.890×10^{-9}	6.387×10^{-11}	0.013 1	$-2.631 2 \times 10^{-4}$	1.207 0
1.0	4.889×10^{-9}	9.782×10^{-11}	0.020 0	$-2.819 8 \times 10^{-4}$	1.293 5
1.2	4.881×10^{-9}	1.435×10^{-10}	0.029 4	$-4.506 6 \times 10^{-4}$	2.067 5



(a) Relationship between γ and crack length



(b) Relationship between β' and crack length

图 5 非线性参数 β' 、 γ 与裂纹长度的线性关系

Fig. 5 Linear relationship between β' and γ with crack length

根据式(8)计算出的 γ 与 β' 的 R-square 指数分别为 0.927 8 与 0.925 9。可见,单根裂纹损伤情况

下,损伤指数 γ 比 β 指数更能表达 Lamb 波非线性特征与裂纹大小的线性关系。

5 结束语

利用 Duffing-Holmes 振子和 Lyapunov 指数对强噪声背景下的非线性 Lamb 谐波进行检测并对其谐波对应的微小裂纹进行量化分析。从仿真实验结果可以看出,该方法可以有效检测强高斯白噪声下的非线性 Lamb 波的二次谐波并对其进行量化描述。由于 Duffing-Holmes 振子对噪声具有较强的免疫性,因此利用该方法进行微裂纹非线性 Lamb 波的检测时不需要对噪声进行抑制,从而避免了再抑制噪声过程中对微弱非线性谐波信号的抑制,体现了该方法检测微裂纹的优越性。

参 考 文 献

[1] Müller M F, Kim J Y, Qu J, et al. Characteristics of second harmonic generation of Lamb waves in nonlinear elastic plates[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2010, 127(4): 2141.

[2] Li Weibin, Cho Y. Thermal fatigue damage assessment in an isotropic pipe using nonlinear ultrasonic guided waves[J]. Experimental Mechanics, 2014, 54(8): 1309-1318.

[3] Deng Ming, Xiang Yanxun, Liu Liangbing. Time-do-

- main analysis and experimental examination of cumulative second-harmonic generation by primary Lamb wave propagation [J]. *Journal of Applied Physics*, 2011, 109(11):1829-1836.
- [4] Li Weibin, Cho Y, Ju T, et al. Evaluation of material degradation of composite laminates using nonlinear Lamb wave[M]. Netherlands: Springer, 2013; 593-598.
- [5] 武静, 张伟伟, 马宏伟. 利用 Lyapunov 指数实现超声导波检测的实验研究[J]. *振动与冲击*, 2014, 33(24): 82-87.
- Wu Jing, Zhang Weiwei, Ma Hongwei. Tests for ultrasonic guided wave inspection using Lyapunov exponents[J]. *Journal of Vibration & Shock*, 2014, 33(24): 82-87. (in Chinese)
- [6] Yang Fei, Jing Lin, Zhang Weiwei, et al. Experimental and numerical studies of the oblique defects in the pipes using a chaotic oscillator based on ultrasonic guided waves [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2015, 347: 218-231.
- [7] Matlack K H, Kim J Y, Jacobs L J, et al. Experimental characterization of efficient second harmonic generation of Lamb wave modes in a nonlinear elastic isotropic plate[J]. *Journal of Applied Physics*, 2011, 109(1): 014905.
- [8] Bermes C, Kim J Y, Qu J, et al. Nonlinear Lamb waves for the detection of material nonlinearity [J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2008, 22(3): 638-646.
- [9] Wan Xiang, Zhang Qing, Xu Guanghua, et al. Numerical simulation of nonlinear Lamb waves used in a thin plate for detecting buried micro-cracks[J]. *Sensors*, 2014, 14(5):8528-8546.
- [10] Dubrovski A D. The nature of chaos in conservative and dissipative systems of the Duffing-Holmes oscillator[J]. *Differential Equations*, 2010, 46(11): 1653-1657.
- [11] Xie Zhongyu, Wang Kejun, Zhang Li. Improved algorithm for calculating Lyapunov exponent and distinguishing chaos from noise[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2010, 17(1): 101-104.



第一作者简介: 柏林,男,1972年11月生,教授、博士生导师。主要研究方向为智能测试理论与技术及虚拟仪器,智能控制与计算机协同监控。曾发表《变转速下滚动轴承阶比峭度图法故障特征提取》(《振动、测试与诊断》2016年第36卷第4期)等论文。

E-mail: Bolin0001@aliyun.com

欢迎订阅《振动、测试与诊断》

《振动、测试与诊断》由工业和信息化部主管,南京航空航天大学 and 全国高校机械工程测试技术研究会联合主办,是反映振动、动态测试及故障诊断学科领域的科研成果及其应用情况的技术性刊物。主要刊登国内外以振动测试与故障诊断为中心的动态测试理论、方法和手段的研究及应用方面的技术文献,包括实验测试技术、测试仪器的研制、方法和系统组成、信号分析、数据处理、参数识别与故障诊断以及有关装置的设计、使用、控制、标定和校准等,不拘泥于行业和测试项目。

本刊为 EI Compendex 数据库收录期刊和中文核心期刊,双月刊,每逢双月末出版,每本定价 30 元,全年 180 元。欢迎订阅和投稿,欢迎在本刊刊登各类广告和科技信息。

编辑部地址:南京市御道街 29 号 邮政编码:210016

电话:(025)84893332

传真:(025)84893332 E-mail:qchen@nuaa.edu.cn

网址:http://zdc.nuaa.edu.cn