

弹性支承索参数识别方法*

魏金波^{1,2}, 李国强², 段欣³, 瞿海雁²

(1. 江苏省绿色建筑工程技术研究中心 南京, 210009)

(2. 同济大学土木工程学院 上海, 200092) (3. 南京天华百润投资有限公司 南京, 210009)

摘要 为了准确识别索参数,提出了采用有限单元法和系统参数识别技术相结合进行索参数识别的方法。考虑索的垂度、抗弯刚度、弹性嵌固和弹性支承等因素建立有限单元模型,采用反映出索非线性振动特性的轴力的梁单元模拟索。利用索特征值关于模型参数的灵敏度矩阵,建立了参数识别的理论/试验频率差与模型参数之间的关系式。该方法基于实测频率,通过迭代可以同时识别拉索索力和抗弯刚度。数值算例和试验验证了该方法的准确性和实用性。

关键词 弹性支承; 拉索; 有限单元法; 参数识别; 灵敏度矩阵

中图分类号 U443.38; TU312.1; TU317.1

引言

拉索是仅承受拉力的柔性构件,具有明显的非线性效应,伴随较小的应力和应变,就会产生较大的位移,而且会产生松弛和应力损失^[1-3]。由于这些特点,索参数识别在结构施工期和使用期内具有重要意义^[4-5]。对于工程中使用的索,很多情况下索端非线性支承,因此,必须考虑支承弹性变形对拉索参数识别的影响。

笔者提出有限单元法和系统识别技术相结合进行索参数识别,不仅可以识别拉索索力,而且可以识别拉索的抗弯刚度。有限单元法可以充分考虑拉索的非线性效应,如拉索的大变形和垂度等影响,比解析法能更全面地反映拉索的振动特性^[6-7]。

1 拉索的有限单元模型

拉索的物理模型如图1所示。考虑拉索的垂度、抗弯刚度、弹性嵌固和弹性支承等因素建立有限单元模型。索采用考虑轴力的梁单元,该单元是只考虑索抗弯刚度的虚拟梁单元和不考虑索抗弯刚度的理想索单元的综合,不仅可以模拟细长索,而且可以模拟短粗索和索力不大的索。为了简化有限单元法,采用如下假定:a.材料为线弹性;b.梁的截面变形后仍保持为平面;c.长细比很大。

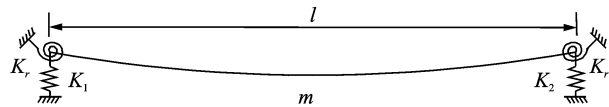


图1 索的物理模型

采用三节点一维等参单元,如图2所示。插值函数为^[8]

$$N_1 = (1 - \xi) / 2 - (1 - \xi^2) / 2 \quad (1)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \quad (2)$$

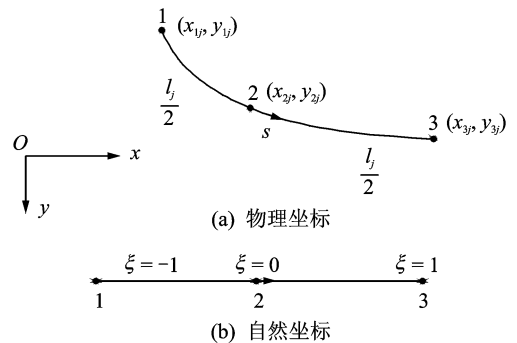


图2 三节点理想索单元

$$N_3 = (1 + \xi) / 2 - (1 - \xi^2) / 2 \quad (3)$$

取节点的位移向量为

$$U_j = \{U_{j1}^T \ U_{j2}^T \ U_{j3}^T\}^T = \{u_{1j} \ v_{1j} \ u_{2j} \ v_{2j} \ u_{3j} \ v_{3j}\}^T \quad (4)$$

单元位移为

* 收稿日期:2010-03-09;修改稿收到日期:2010-04-29

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \{u \quad v^T\} = [N_1 I \quad N_2 I \quad N_3 I] \\ \{\mathbf{D}_{j1}^T \mathbf{D}_{j2}^T \mathbf{D}_{j3}^T\}^T = \mathbf{N} \mathbf{D}_j \end{cases} \quad (5)$$

由Hamilton原理^[8]得到振动方程

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{U}}_1 + [\mathbf{K}_{01} + \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_{21}(\mathbf{U}_1) + \\ \quad \mathbf{K}_{31}(\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^T)] \mathbf{U}_1 = 0 \\ \mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{U}}_j + [\mathbf{K}_{0j} + \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_{2j}(\mathbf{U}_j) + \\ \quad \mathbf{K}_{3j}(\mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^T)] \mathbf{U}_j = 0 \\ \mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{U}}_n + [\mathbf{K}_{0n} + \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_{1n} + \mathbf{K}_{2n}(\mathbf{U}_n) + \\ \quad \mathbf{K}_{3n}(\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T)] \mathbf{U}_n = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中: n 为索的单元数目。

$$\mathbf{M}_j = mJ \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{0j} = EAJ \int_{-1}^1 \mathbf{B}_0^T \mathbf{B}_0 d\xi + \frac{1}{2J} \int_0^1 H \left[\frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \right]^T \left[\frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \right] d\xi \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \mathbf{K}_1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_{2j} = EAJ \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_i) d\xi \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_j = 2EAJ \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_i d\xi \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_{0i} = \frac{1}{J^2} \left\{ \frac{dx}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dx}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} \quad 0 \right\} \quad (13)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{2J^2} \left\{ \frac{du}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{dv}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} \quad \frac{d\tau_w}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} \right\} \quad (14)$$

$$J = ds/d\xi \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_a = J \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi \quad (16)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{RJ} \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{d\xi} & 0 & R \frac{dN_i}{d\xi} \\ 0 & R \frac{dN_i}{d\xi} & -RJ \frac{dN_i}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \quad (18)$$

度较大,索力在索跨范围内的变化不可忽略,而索力的水平分量在整个索跨范围内是不变的。因此,取索力的水平分量和抗弯刚度为识别参数。

2×1 阶的识别参数向量 \mathbf{U} 包括索力水平分量 H 和抗弯刚度 EI ,表达如下

$$\mathbf{U} = [H \quad EI]^T \quad (19)$$

令拉索的第 n 阶特征值为 λ_n , λ_n 的变分为

$$\delta\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{U} + d\mathbf{U}) - \lambda_n(\mathbf{U}) \quad (20)$$

将式(20)的右边第1项进行Taylor展开可得

$$\lambda_n(\mathbf{U} + d\mathbf{U}) = \lambda_n(\mathbf{U}) + \nabla \lambda_n(\mathbf{U}) d\mathbf{U} + o^2(d\mathbf{U}) \quad (21)$$

将式(21)代入式(20),整理可得

$$\delta\lambda_n = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \lambda_n}{\partial U_i} dU_i \quad (22)$$

其中: U_i 是向量 \mathbf{U} 中的第 i 个元素。

将式(22)两边同除以 λ_n 得到它的无量纲形式

$$\frac{\delta\lambda_n}{\lambda_n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \lambda_n}{\partial U_i} \frac{U_i}{\lambda_n} \frac{dU_i}{U_i} \quad (23)$$

如果 q 阶自振频率被用于索力识别,由式(23)

可得

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F} \alpha \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{Z} = \left[\frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1} \quad \frac{\delta\lambda_2}{\lambda_2} \quad \dots \quad \frac{\delta\lambda_q}{\lambda_q} \right]^T \quad (25)$$

$$\alpha = \left[\frac{dU_1}{U_1} \quad \frac{dU_2}{U_2} \quad \dots \quad \frac{dU_p}{U_p} \right]^T \quad (26)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial U_1} \frac{U_1}{\lambda_1} & \dots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial U_p} \frac{U_p}{\lambda_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_q}{\partial U_1} \frac{U_1}{\lambda_q} & \dots & \frac{\partial \lambda_q}{\partial U_p} \frac{U_p}{\lambda_q} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial U_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_q}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial \lambda_q}{\partial U_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{U_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{U_p}{\lambda_p} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} \frac{U_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{U_p}{\lambda_p} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

其中: \mathbf{S} 为灵敏度矩阵。

对式(24)的迭代求解可以得到识别参数 H 和 EI 有7个步骤:

1) 选取索力和抗弯刚度的初始值 H_0 和 EI_0 。

2) 计算在静力状态下拉索的形状。拉索的形状采用抛物线方程表示为^[9]

$$y = \frac{4y_0}{l^2} x(l-x) \quad (28)$$

其中: y_0 为拉索的跨中垂度。

3) 基于第2步的拉索形状,采用上节得到的刚

2 索参数识别方法

实际工程中,拉索的抗弯刚度不可知。拉索的垂

度矩阵和质量矩阵对索进行动力特征值分析得到索的特征值 λ_n 。

4) 计算矩阵 F 。分别在索力和抗弯刚度初始值处改变小量 $0.0005H_0$ 和 $0.0005EI_0$,由上节的有限元模型得到索的频率的变化,然后由式(27)得到矩阵 F 。

5) 采用式(29)计算 Z

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{r1} - \lambda_{k1}}{\lambda_{k1}} & \dots & \frac{\lambda_{rn} - \lambda_{kn}}{\lambda_{kn}} & \dots & \frac{\lambda_{rq} - \lambda_{kq}}{\lambda_{kq}} \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

其中: λ_n 为第 n 阶频率的测量值; λ_{kn} 为第 k 次迭代后得到的第 n 阶计算特征值。

6) 假定式(24)为超定方程组($p < q$),采用式(30)计算 α 值为

$$\alpha = F^{-1}Z \quad (30)$$

其中 $F^{-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F^T F + \epsilon]^{-1} F^T$ (31)

式(30)中的广义逆解基于最小二乘法。

7) 采用式(32)得到修正后的识别参数的值,用于第 $i+1$ 次迭代

$$U_{k+1i} = (1 + \alpha_{ki})U_{ki} \quad (32)$$

其中: U_{ki} 为第 k 次迭代后 U_k 的第 i 个识别参数; α_{ki} 为第 k 次迭代后 α 的第 i 个元素。

重复以上步骤直到 α_i 趋近于零。

3 数值算例

选用两类拉索进行分析,具体数据见表1。假定索力的初始值为实际值的70%,抗弯刚度的初始值为实际值的130%;拉索两端的竖向弹性支承刚度分别为 $K_1=10^4$ N/m和 $K_2=10^3$ N/m;拉索两端弹性转动约束刚度为 $K_{r1}=K_{r2}=10^6$ N·m/rad;拉索的前6阶频率如表2所示。反映垂度影响的参数 λ^2 和反映抗弯刚度影响的无量纲参数 ξ 分别定义为^[6,8]

$$\lambda^2 = \left(\frac{mgl}{H} \right)^2 \frac{EA}{H} \frac{l}{L} \quad (33)$$

其中

$$L = l \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{mgl}{H} \right)^2 \right] \quad (34)$$

$$\xi = l \sqrt{H/EI} \quad (35)$$

表1 两根索的物理参数和几何参数

索号	λ^2	ξ	$m/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})$	$g/(\text{N} \cdot \text{kg}^{-1})$	l/m	H/N	E/Pa	A/m^2	I/m^4
1	0.71	605.5	400.0	9.8	100.0	2.904×10^6	1.599×10^{10}	7.851×10^{-3}	4.954×10^{-6}
2	1.31	50.5	400.0	9.8	100.0	26.133×10^6	2.083×10^{13}	7.863×10^{-3}	4.920×10^{-6}

表2 索的振动频率

索号	ω_1^2	ω_2^2	ω_3^2	ω_4^2	ω_5^2	ω_6^2
1	0.306 0	14.780 9	2.754 4	59.142 9	7.654 5	133.143 8
2	0.336 5	131.40	3.122 5	550.00	9.198 4	1 328.80

识别过程如下:

1) 计算索力的初始值为实际值的70%、抗弯刚度的初始值为80%实际值时的振动频率,见表3;

表3 索的振动频率

索号	ω_1^2	ω_2^2	ω_3^2	ω_4^2	ω_5^2	ω_6^2
1	0.279 5	13.348 0	2.516 5	53.417 3	6.996 9	120.259 7
2	0.334 0	61.64	3.211 2	295.504	10.062 3	765.843 0

2) 计算矩阵 F

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.966 3 & 0.000 1 \\ 0.965 9 & 0.000 5 \\ 0.965 2 & 0.001 2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.018 8 & 0.977 4 \\ 0.071 1 & 0.925 0 \\ 0.147 2 & 0.848 9 \end{bmatrix} \quad (37)$$

3) 计算向量 Z

$$Z_1 = [0.107 4 \quad 0.107 3 \quad 0.107 1]^T \quad (38)$$

$$Z_2 = [0.106 6 \quad 0.096 3 \quad 0.080 9]^T \quad (39)$$

4) 计算 α 值

$$\alpha_1 = [0.111 1 \quad -0.090 6]^T \quad (40)$$

$$\alpha_2 = [0.110 8 \quad -0.089 1]^T \quad (41)$$

5) 计算修正后的参数值

$$U_1 = [2.904 \times 10^6 \quad 7.924 1 \times 10^4]^T \quad (42)$$

$$U_2 = [26.125 7 \times 10^6 \quad 1.026 9 \times 10^8]^T \quad (43)$$

6) α 值较大,再迭代1次后得到

$$\alpha_1 = [-7.243 \times 10^{-4} \quad 8.000 \times 10^{-7}]^T \quad (44)$$

$$\alpha_2 = [-1.819 \times 10^{-4} \quad 2.760 \times 10^{-5}]^T \quad (45)$$

7) 计算修正后的参数值

$$U_1 = [2.904 \times 10^6 \quad 7.387 7 \times 10^4]^T \quad (46)$$

$$U_2 = [26.139 9 \times 10^6 \quad 1.026 8 \times 10^8]^T \quad (47)$$

识别值与实际值的对比如表4、表5所示。

表4 1号索的识别值与实际值的对比

迭代次数	索力 H			抗弯刚度 EI		
	实际值/N	识别值/N	误差/%	实际值/(N·mm ²)	识别值/(N·mm ²)	误差/%
2	2.904×10^6	2.904×10^6	0	7.345 8 $\times 10^4$	7.387 7 $\times 10^4$	0.57

表5 2号索的识别值与实际值的对比

迭代次数	索力 H			抗弯刚度 EI		
	实际值/N	识别值/N	误差/%	实际值/($N \cdot mm^2$)	识别值/($N \cdot mm^2$)	误差/%
2	26.133×10^6	26.140×10^6	0.028	1.0248×10^8	1.0268×10^8	0.20

从数值算例可以看出,经过两次迭代后, α 值趋近于零,收敛于精确值。

4 试验验证

4.1 试验模型

钢索采用直径4 mm的7×19的镀锌钢丝绳,截面形式如图3所示。在索上沿全长每隔200 mm布置一个重29.23 g的质量块,如图4所示。钢丝绳的各项参数如表6所示。采用弹簧模拟索端弹性支承。根据弹簧丝直径、弹簧中径和弹簧节距的大小设计了3种弹簧,如图5所示。弹簧钩环压中心,几何参数如表7所示。

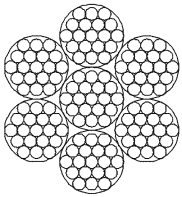


图3 钢绞线截面示意图

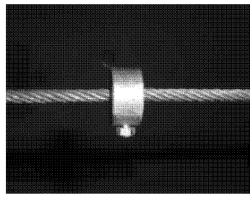


图4 质量块与紧固螺丝

表6 钢丝绳的各项参数

规格	钢索长度/m	直径/mm	强度等级/MPa	线质量/($kg \cdot m^{-1}$)	弹性模量/($N \cdot m^{-2}$)
7×19	2.4	4.0	1 600	0.365	1.234×10^{11}

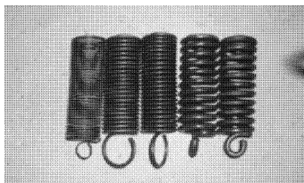


图5 3种弹簧

表7 弹簧的几何参数

弹簧编号	材料直径/mm	弹簧中径/mm	节距/mm	自由高度/mm	曲度系数	有效圈数	伸直长度/mm
1	2	50	4	150	1.03	35	5 810
2	5	50	7	150	1.15	20	3 460
3	9	50	11	150	1.28	11.5	2 050

采用增挂砝码的方法标定3种弹簧的刚度,如表8所示。弹簧的安装如图6所示。

试验布置示意图如图7所示,现场试验布置图如图8所示。

表8 3种弹簧刚度

参数	弹簧1	弹簧2	弹簧3
刚度/($N \cdot m^{-1}$)	$k_1=36$	$k_2=2\ 450$	$k_3=44\ 729$

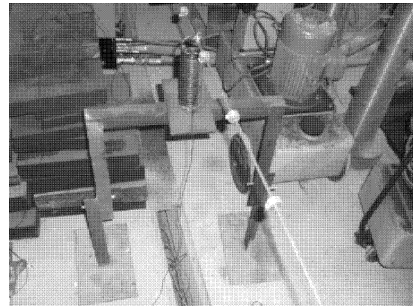


图6 弹簧的安装

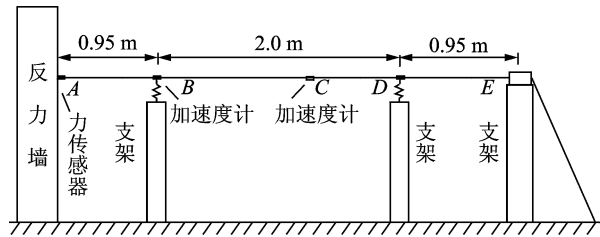


图7 试验布置示意图

4.2 试验过程

试验设备包括INV306U智能信号采集处理分析仪、YE5852电荷放大器、压电式电荷加速度计、5t应变式拉压力传感器、YJR-5A静态电阻应变仪及相应信号线。

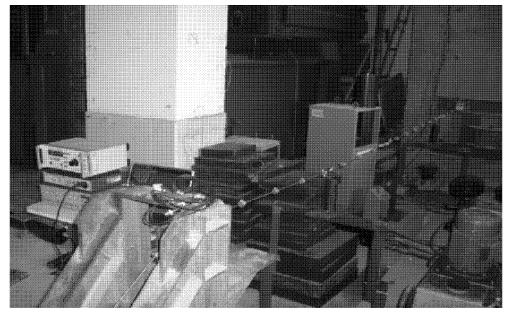


图8 现场试验布置图

试验过程为:

- 1) 采用力传感器测试索拉力,力传感器安装于索在反力墙上的固定端;
- 2) 采用压电式加速度传感器采集信号;
- 3) 采用轻敲索体的方法进行人工激振;
- 4) 加速度计采集的索振动信号经过电荷放大器后,传入信号分析仪,在屏幕上就显示出测得的加速度时程曲线与频谱图,从而识别出索的自振频率。

4.3 试验结果

采用不同索端弹性支承刚度,进行3组试验:a. $k_B=36\ N/m, k_D=36\ N/m$; b. $k_D=2\ 450\ N/m$; c.

$k_B=N/m, k_D=44\ 729\ N/m$ 。 k_B 和 k_D 分别为试验布置示意图(见图7)中 B 和 D 点弹性支承刚度。

实测的索力和频率分别列于表9~表11,索参数识别结果见表12、表13。

表9 实测的索力和频率($k_B=k_D=36\ N/m$)

H/N	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz	f_4/Hz	f_5/Hz	f_6/Hz
800	5.97	11.95	17.92	23.88	29.87	35.83
1 000	6.71	13.44	20.11	26.86	33.53	40.26
3 000	11.51	23.01	34.52	46.02	57.53	69.03

表10 实测的索力和频率($k_B=k_D=2\ 450\ N/m$)

H/N	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz	f_4/Hz	f_5/Hz	f_6/Hz
800	9.75	19.51	29.26	39.01	48.77	58.52
1 000	10.67	21.51	32.71	43.62	54.52	65.43
3 000	18.97	38.77	56.66	75.55	94.44	113.32

表13 索抗弯刚度识别结果

H/N	$EI/10^6(N \cdot mm^2)$	$k_D=k_E=36\ N/m$		$k_D=k_E=2\ 450\ N/m$		$k_D=k_E=44\ 729\ N/m$	
		$EI_i/10^6(N \cdot mm^2)$	$(EI_i-EI)/EI/\%$	$EI_j/10^6(N \cdot mm^2)$	$(EI_i-EI)/EI/\%$	$EI_k/10^6(N \cdot mm^2)$	$(EI_i-EI)/EI/\%$
800	3.87	4.03	4.14	3.75	-3.12	3.98	2.77
1000	3.87	4.07	5.25	3.95	2.18	3.79	-1.98
3 000	3.87	3.72	-3.89	4.04	4.32	3.99	3.12

表11 实测的索力和频率($k_B=k_D=44\ 729\ N/m$)

H/N	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz	f_4/Hz	f_5/Hz	f_6/Hz
800	11.65	23.41	35.11	46.82	58.52	70.22
1 000	13.01	26.17	39.26	52.34	65.43	78.51
3 000	22.46	45.33	67.99	90.66	113.32	135.99

表12 索力识别结果

H/N	$k_D=k_E=36\ N/m$		$k_D=k_E=2\ 450\ N/m$		$k_D=k_E=44\ 729\ N/m$	
	H_i/N	$(H_i-H)/H$	H_j/N	$(H_j-H)/H$	H_k/N	$(H_k-H)/H$
800	808.16	1.02	792.15	-0.98	799.12	-0.11
1 000	978.90	-2.11	1 012.51	1.25	1 007.18	0.72
3 000	2 959.79	-1.34	3 035.09	1.17	2 986.47	-0.45

5 结论

1) 给出了有限单元法和系统识别技术相结合的拉索参数识别方法。该方法可以同时识别出拉索索力和抗弯刚度。

2) 通过数值算例和试验,验证了该参数识别方法的准确性和有效性。

参 考 文 献

[1] 李国强,魏金波,张开莹.考虑边界弹性约束的索力动力检测理论与试验研究[J].建筑结构学报,2009,30(5):220-226.

Li Guoqiang, Wei Jinbo, Zhang Kaiying. Theoretical and experimental study on cable tension estimation by vibration method accounting for rotational end restraints [J]. Journal of Building Structures, 2009, 30(5):220-226. (in Chinese)

[2] 魏建东.斜拉桥拉索的参数振动及其控制[D].成都:西南交通大学,1999.

[3] 姜健,李国强,郝坤超.拉索平面内自由振动影响因素分析[J].振动、测试与诊断,2009,29(3):308-312.

Jiang Jian, Li Guoqiang, Hao Kunchao. Analysis of influencing factors on free in-plane vibration of tensile cable [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2009, 29(3):308-312. (in Chinese)

[4] 唐亚鸣,张河.大型桥梁拉索损伤与健康监测[J].桥梁建设,2002(5):79-82.

Tang Yaming, Zhang He. Large-span bridge cable damage and health monitoring [J]. Bridge Construction, 2002(5):79-82. (in Chinese)

[5] Wei Jinbo, Li Guoqiang, Mohammad R R. Theoretical study on cable tension detection considering support vibration[C]//Transportation and Development Innovative Best Practices. Beijing: American Society of Civil Engineering, 2008:450-455.

[6] Ceballos M A, Prato C A. Determination of axial force on stay cables accounting for their bending stiffness and rotational end restraints by free vibration tests [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008(317):127-141.

[7] 张俊平.桥梁检测[M].北京:人民交通出版社,2002.

[8] 王勖成.有限单元法基本原理和数值方法[M].北京:清华大学出版社,1995.

[9] 魏金波.弹性支承钢索受力动力检测理论与试验研究[D].上海:同济大学,2009.

第一作者简介:魏金波,男,1980年1月生,博士。研究方向为钢索受力动力检测理论。曾发表《考虑边界弹性约束的索力动力检测理论与试验验证》(《建筑结构学报》2009年第5期)等论文。
E-mail:weijinbo0117@163.com