基于速度-加速度时滞反馈的振动主动控制*

安 方， 陈卫东， 邵敏强
（南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京，210016）

摘要 在振动主动控制中，基于加速度测量信号，并考虑滤波器群时延引入的时滞，研究了一种时滞控制器设计方法。采用等维方法和状态导数反馈思想，提出一种速度-加速度时滞反馈控制器的设计方法。该控制器不含位移信号，可省去两次数值积分和去直流分量、趋势项这两个过程，并可避免由两次数值积分带来的累积误差。以粘帖有压电陶瓷和加速度传感器的智能梁为控制对象，采用该控制器控制其自由振动，并与速度-加速度反馈控制效果进行比较。仿真结果表明，当采用速度-加速度反馈直接控制时滞系统时，若时滞超出其稳定区间，该方法失效，而速度-加速度时滞反馈控制方法则具有良好的控制效果。

关键词 振动主动控制；加速度；时滞；状态导数；速度-加速度时滞反馈控制
中图分类号 O328；O329；TB123；TH134

引 言

在面向土木工程的某些结构振动系统中，由于基础与被测物体都在移动，缺乏绝对的参照系，位移较难准确测量，而加速度测量不需要参照系，且加速度传感器体积小，对被测对象的动态特性影响较小；因此，在大多数振动测控系统中，加速度测量被认为是最可靠和最经济的[1-3]。在采用加速度传感器测量的振动测控系统中，若采用位移反馈，需将采集到的加速度信号经两次数值积分得到位移信号；但由于测量误差和噪声不可避免，经两次积分得到的位移信号通常存在较大误差[4-5]，即使控制器设计良好，也未必能达到期望的控制效果。为了避开位移反馈，并使控制频带范围增大，Yang 引入了状态导数反馈的概念[1]，设计出基于状态导数反馈的速度-加速度联合反馈最优控制器[1-2]。有学者研究了状态导数反馈控制系统的稳定性[6]、极点配置[7]及优化设计[8-9]等问题。将这些方法应用到含加速度传感器测量的振动控制系统中，可避免位移反馈中加速度信号经两次积分得到位移信号时的误差，但控制器设计均未考虑系统中输入时滞的影响。

在采用加速度传感器测量的低频振动的主动控制系统中，所测得的加速度信号往往含有噪声和高频干扰信号，需采用低通滤波器来消除噪声和高频干扰，由此引入滤波器群时延[10]，会产生明显的时滞效应，导致所测信号为时滞加速度信号。针对输入时滞问题，通常有两种处理方法：a. 扩维方法[11]；b. 等维方法[12]。这两种方法均旨在把时滞系统转换为无时滞系统，不过在时滞量较之采样时间间隔较大时，扩维方法会引起系统维数过高，加大控制器设计的难度。

基于时滞加速度信号，结合等维方法和状态导数反馈思想[8]，笔者提出一种速度-加速度时滞反馈的控制器设计方法。该控制器充分考虑系统中的时滞问题，且可省去两次数值积分和去直流分量、趋势项的过程。以粘帖有压电陶瓷片和加速度传感器的智能梁为振动控制对象，首先，通过分析低通滤波器的相频特性和真实信号与滤波后信号的相位差异，揭示了滤波器的群时延现象；其次，通过数值积分和去除直流、趋势项后的速度和位移信号进行对比，说明控制器不依赖于位移信号的优势；最后，采用所设计的速度-加速度时滞反馈控制器来控制智能梁的自由振动，并与速度-加速度反馈控制效果进行比较。仿真结果表明，当采用速度-加速度反馈直接控制含输入时滞的振动系统时，若时滞超出其稳定区间，该方法失效，而速度-加速度时滞反馈控制的效果良好。

* 国家杰出青年科学基金资助项目（编号：10825207）
收稿日期：2012-01-05；修改稿收到日期：2012-03-22

1　滤波器群时延与考虑时滞的被控对象

1.1　滤波器的群时延

实际的振动测控系统中所测量的加速度信号通常含有噪声和高频干扰信号，需设计合适的低通滤波器对信号进行提纯，从而在控制系统中引入滤波器的群时延。对于一般的滤波器频谱$H(f)$

$$H(f)=A(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(f)} \tag{1}$$

其中：$A(f)=|H(f)|$为振幅谱；$\Phi(f)$为相位谱。

滤波器的群时延[10]可定义为

$$T_g(f)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi(f)}{\mathrm{d}f} \tag{2}$$

对于具有严格线性相位响应的有限脉冲响应(finite impulse response，简称FIR)滤波器，群时延在频域中是个常量；对于一般的无限脉冲响应(infinite impulse response，简称IIR)滤波器，相位响应是非线性的，其对输入信号的不同频率成分的时延量不同，但在通带频率范围内具有近似的线性相位，可在控制通带内线性拟合相位特性，以近似得到滤波器的固定时延[10]。

1.2　考虑输入时滞的被控对象

采集到的含噪声的加速度信号经低通滤波器后，由于滤波器存在群时延，从而在振动测控系统中引入了输入时滞。考虑控制输入时滞的结构振动控制系统，在模态空间下的动力学方程一般可写为

$$\ddot{\varphi}_n(t)+\mu_n\dot{\varphi}_n(t)+\omega_n^2\varphi_n(t)=V_nu(t-\tau)$$
$$(n=1,2,\cdots) \tag{3}$$

其中：$\varphi_n(t)$为结构的第n阶模态函数；$u(t-\tau)$为作动器施加的控制力；τ为输入时滞量；V_n为控制力系数。

记$Y_i(x)$为第i阶振型函数，则物理空间下的位移为

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{N}Y_i(x)\varphi_i(t) \tag{4}$$

相应的速度、加速度分别为

$$\begin{cases} w'(x,t)=\sum_{i=1}^{N}Y_i(x)\dot{\varphi}_i(t) \\ w''(x,t)=\sum_{i=1}^{N}Y_i(x)\ddot{\varphi}_i(t) \end{cases} \tag{5}$$

采用加速度传感器，物理空间下的加速度输出信号为

$$y(t)=w''(s,t)=\sum_{i=1}^{N}Y_i(s)\ddot{\varphi}_i(t) \tag{6}$$

其中：s为加速度传感器测点的位置。

令$\boldsymbol{x}=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N,\dot{\varphi}_1,\dot{\varphi}_2,\cdots,\dot{\varphi}_N]^{\mathrm{T}}$，将振动方程(3)转换为如下状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}u(t-\tau) \tag{7}$$

其中：$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$分别为状态矩阵和输入矩阵，具体形式参见文献[11]。

对于传统控制方法，可采用一次和两次数值积分得到速度和位移信号，应用时滞状态反馈来设计时滞位移-速度反馈[11]。这需要将采集到的加速度信号经一次、两次数值积分分别得到速度、位移信号，而数值积分这一过程会引起直流分量和趋势项[13]，需引入去趋势项和直流分量这一过程。在控制系统中，去直流和趋势项比较常用的方法为高通滤波。采集到的加速度信号含有噪声信号，在数值积分之前，需设计合适的数字低通滤波器进行滤波，具体控制流程图见图1。其中：acc为加速度信号；vel为速度信号；dis为位移信号；τ为滤波器群时延带来的时滞量。

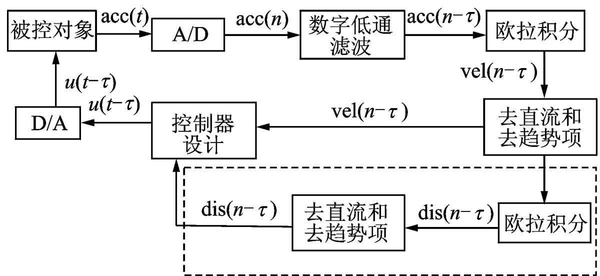


图1　传统时滞位移-速度反馈控制流程图

2　速度-加速度时滞反馈控制器设计

笔者设计了一种不含位移项的控制器，用来省去传统时滞位移-速度反馈中两次数值积分和去直流-趋势项的步骤(图1中虚线所标的步骤)。

由式(5)～式(7)可知

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\dot{\varphi}_1(t),\dot{\varphi}_2(t),\cdots,\dot{\varphi}_N(t),$$
$$\ddot{\varphi}_1(t),\ddot{\varphi}_2(t),\cdots,\ddot{\varphi}_N(t)]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

由式(8)及式(5)可以看出，状态导数中仅含速度和加速度信号，不含位移信号，不需要进行两次数值积分的过程，可回避相应的累计误差；因此，可结合状态导数反馈的思想，并考虑系统中的输入时滞，来设计速度-加速度时滞反馈控制器，省去图1中虚线的过程，控制流程图如图2所示。

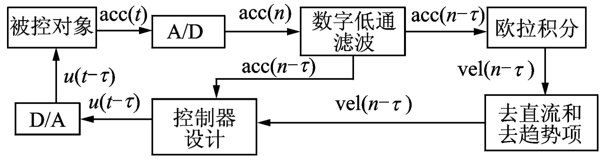


图2　速度-加速度时滞反馈控制流程图

2.1 无时滞系统的状态导数反馈控制器设计

针对输入时滞系统式(7),采用等维方法,利用如下变换[12]

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{-A(s-t)}\mathrm{e}^{-A\tau}Bu(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

可将控制器中带有时滞的系统(7)转换为如下无时滞系统

$$\dot{z}(t) = Az(t) + B_A u(t) \tag{10}$$

其中:$B_A = \mathrm{e}^{-A\tau}B$。

考虑到计算机振动控制系统的可实施性,针对无时滞系统(10),设计形如式(11)的离散状态导数反馈控制器

$$u(t) = u(kT) = -K_d\dot{z}(kT) \tag{11}$$

其中:T 为采样时间间隔。

具体步骤[8]为:

1) 连续系统状态反馈控制器设计。

应用LQR 方法,可设计连续系统(10)的状态反馈控制器为

$$u(t) = -K_c z(t) \tag{12}$$

将式(12)代入式(10),并转化为离散系统

$$z_c(kT+T) = G_c z_c(kT) \tag{13}$$

其中:$G_c = \mathrm{e}^{(A-B_AK_c)}$。

设计合适的采样时间 T,使时滞量满足

$$\tau = lT \tag{14}$$

其中:$l>0$ 为任意正整数。

2) 离散系统状态反馈控制器设计。

为了设计离散状态导数反馈控制器,设带有离散输入控制的连续系统的状态反馈控制描述为

$$\dot{z}_d(t) = Az_d(t) + B_A u_d(t) \tag{15}$$

其中

$$u_d(t) = U_d(kT) = -K_d z_d(kT) \quad (kT \leqslant t \leqslant kT+T) \tag{16}$$

其中:K_d 为离散反馈增益矩阵。

将式(16)代入式(15),并离散化可得到

$$z_d(kT+T) = (G_d - H_dB_AK_d)z_d(kT) \tag{17}$$

其中:$G_d = \mathrm{e}^{AT}$;$H_d = \int_0^T \mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t$。

若 A 为正则矩阵,则 H_d 可写为

$$H_d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}A^{k-1}T^k \tag{18}$$

K_d 可通过解线性矩阵不等式(19)和式(20)得到。如果存在正定矩阵Γ,F 及标量$\beta>0$,使得如下最小约束问题的矩阵不等式成立

$$\min_{\mu}\begin{bmatrix} -\Gamma & * \\ G_c\Gamma - G_d\Gamma + HF & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

其中:$\mu=\beta^2$;$F=K_d\Gamma$;$H=A^{-1}(G_d-I_n)B_A$。

则

$$K_d = F\Gamma^{-1} \tag{20}$$

由连续系统的反馈控制增益矩阵 K_c 可得到离散控制增益矩阵 K_d 和控制律式(16),使得系统(17) Lyapunov 稳定。

3) 离散系统状态导数反馈控制器设计。

考虑式(17),可得离散状态导数反馈控制器

$$u_{df}(kT) = -K_{df}\dot{z}_d(kT) \quad (kT \leqslant t \leqslant kT+T) \tag{21}$$

其中

$$K_{df} = K_d(A - B_AK_d)^{-1} \tag{22}$$

2.2 速度-加速度时滞反馈控制器设计

式(21)是经式(9)变换后的无时滞系统(10)的控制力,需将此转化成时滞系统(7)的控制力。记

$$I_z(t) = \int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{-A(s-t)}\mathrm{e}^{-A\tau}Bu(s)\mathrm{d}s \tag{23}$$

由式(9)及式(23)得

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + AI_z(t) + \mathrm{e}^{-A\tau}Bu(t) - Bu(t-\tau) \tag{24}$$

若 $t=kT$,$k=1,2\cdots$,根据零阶保持器的性质,式(24)的离散形式为

$$\dot{z}(kT) = \dot{x}(kT) + AI_z(kT) + \mathrm{e}^{-A\tau}Bu_{df}(kT) - Bu_{df}(kT-lT) \tag{25}$$

其中

$$\begin{cases} I_z(kT) = \sum\limits_{i=1}^{l} \mathrm{e}^{-A(i-1)T}Nf_Tu_{df}(kT-lT+(i-1)T) \\ Nf_T = \int_0^T \mathrm{e}^{-A\eta}\mathrm{d}\eta B \end{cases} \tag{26}$$

则考虑时滞的式(25)的离散形式可表示为

$$\dot{z}(kT-lT) = \dot{x}(kT-lT) + AI_z(kT-lT) + \mathrm{e}^{-A\tau}Bu(kT-lT) - Bu(kT-2lT) \tag{27}$$

由控制律式(21)及式(27),可得原系统式(7)中的离散控制力为

$$u_{df}(kT-lT) = K_x(\dot{x}(kT-lT) + AI_z(kT-lT) - Bu(kT-2lT)) \tag{28}$$

其中

$$K_x = -(I + K_{df}\mathrm{e}^{-AlT}B)^{-1}K_{df} \tag{29}$$

$$I_z(kT-lT) = \sum_{i=1}^{l} \mathrm{e}^{-A(i-1)T}Nf_Tu(kT-2lT+(i-1)T) \tag{30}$$

式(28)为模态空间下的模态控制力,利用式(5)和式(28),可将模态空间量转化为对应的物理空间

量，即

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(kT-lT)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}^{-1} & \boldsymbol{W}' \\ \boldsymbol{Y}^{-1} & \boldsymbol{W}''\end{bmatrix} \\ \boldsymbol{W}'=[W'(S_1,kT-lT),\cdots,W'(S_N,kT-lT)]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{W}''=[W''(S_1,kT-lT),\cdots,W''(S_N,kT-lT)]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{31}$$

其中：$\boldsymbol{Y}$ 由文献[11]给出；$S_1,S_2,\cdots S_N$ 为 N 个传感器的位置。

将式(31)代入式(28)，可得物理空间下的控制力为

$$u_{k-l}=\boldsymbol{K}_x\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{W}' \\ \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{W}''\end{bmatrix}+ \left(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}lT}\boldsymbol{N}\boldsymbol{f}_T\left(\sum_{i=1}^{1}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{B}u_{k-l-i}\right)-\boldsymbol{B}u_{k-2l}\right) \tag{32}$$

由式(32)可知，该控制器只含速度信号 w' 和加速度信号 w''，不含位移信号 w，较之时滞位移-速度反馈的控制流程图1，可避开加速度信号经两次数值积分得到位移信号这一步骤，对应控制流程见图2。

3　时滞系统的速度-加速度反馈控制

为了与不考虑时滞所设计的速度-加速度反馈控制器的控制效果进行比较，考虑如下不计控制输入时滞的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}u(t) \tag{33}$$

根据前面的设计步骤，将$\boldsymbol{B}_A$ 替换为$\boldsymbol{B}$，可设计基于系统(33)的离散速度-加速度反馈控制器为

$$u_{no}(kT)=-\boldsymbol{K}_{no}\dot{x}_{no}(kT) \quad (kT\leqslant t\leqslant kT+T) \tag{34}$$

其中：$\boldsymbol{K}_{no}$为不考虑时滞的速度-加速度反馈控制器的反馈增益矩阵。

将此控制器直接控制含输入时滞的系统(7)，得闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{no}\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau) \tag{35}$$

式(35)为中立型时滞微分方程[14]，其特征方程为

$$s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H}_\tau s\mathrm{e}^{-s\tau}-\boldsymbol{A}=0 \tag{36}$$

其中：$\boldsymbol{H}_\tau=\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{no}$。

当反馈增益矩阵确定以后，可用 NDDE-biftool[14]工具来分析特征根实部随时滞量 τ 变化的分布图，从而得到系统的随时滞量变化的稳定区域。

4　数值仿真

考虑均匀等截面 Euler-Bernouli 梁的横向振动控制问题，如图3所示。其中：s_1,s_2 为压电片粘贴位置；s_3 为加速度传感器的位置。梁的有关参数为：弹性模量$E_b=70$ GPa，密度$\rho_b=2\ 700$ kg/m^3，长度$l_b=0.35$ m，宽度$w_b=0.02$ m，厚度$t_b=0.000\ 7$ m。压电陶瓷的有关参数为：机电耦合系数 $d_{31}=-270\times10^{-12}$m/V，弹性模量$E_a=60$ GPa，宽度$w_a=0.02$ m，厚度$t_a=0.000\ 5$ m。作动器和传感器的位置参数为：$s_1=0.04$ m，$s_2=0.1$ m，$s_3=0.22$ m。可在模态空间下建立该结构控制系统的机电耦合动力学方程如式(3)所示。仿真中考虑控制智能梁的前1阶模态引起的振动，经计算得该智能梁的前2阶固有频率分别为4.70 Hz 和29.45 Hz。

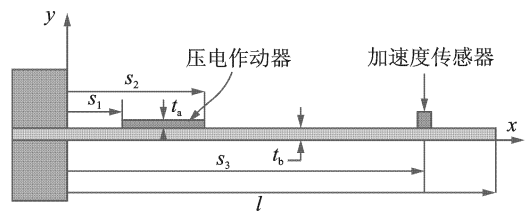


图3　粘贴有压电作动器和加速度传感器的智能梁示意图

4.1　滤波器群时延和数值积分

在实际振动控制中，采集到的加速度信号多含有噪声信号，根据其低频控制目标，结合模拟噪声特性设计合适的Butterworth 低通滤波器，对含噪声的加速度信号进行滤波。当信号通过该滤波器时，会在通带范围内产生固定时延。由相频特性可以看出，在通带范围内相位随频率变化基本呈线性关系。参见图4(a)，在通带范围内信号经滤波器作用后产生恒定的时延，通过在控制通带内线性拟合相应的相位特性(图4(a)中虚线)，由式(2)计算，可获得通带内滤波器的固定时延为0.054 s。由真实信号与滤波后的信号的对比可以看出(图4(b))，滤波后信号相位发生了变化。

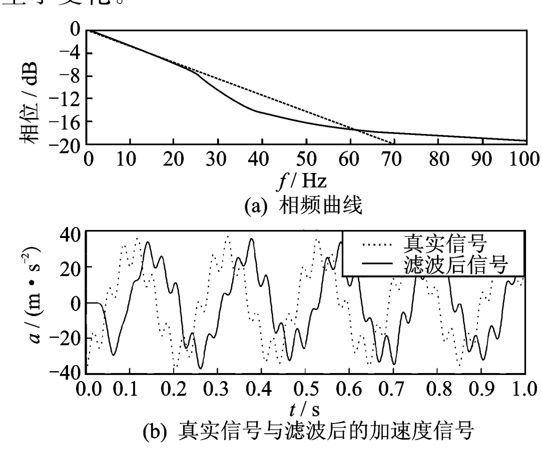


图4　低通滤波器产生的群时延

由图5可看出，数值积分后的速度和位移信号存在比较明显的直流和趋势项，在设计控制器之前首先要去除直流分量和趋势项，如图1、图2所示。通常采用高通滤波器滤除直流分量和趋势项，信号经高通滤波器后，得到图6所示的速度和位移信号。由此看出，去直流分量和趋势项后的位移与其真实信号存在较大误差，而相应的速度与其真实信号的近似程度比位移的近似程度要好，所以说控制器中省去位移反馈是有意义的。

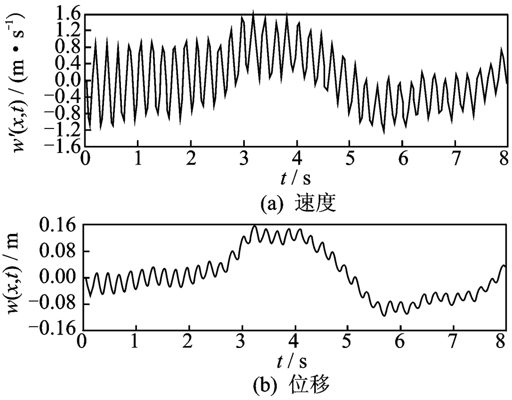


图5　滤波后的加速度信号经1次和2次数值积分结果

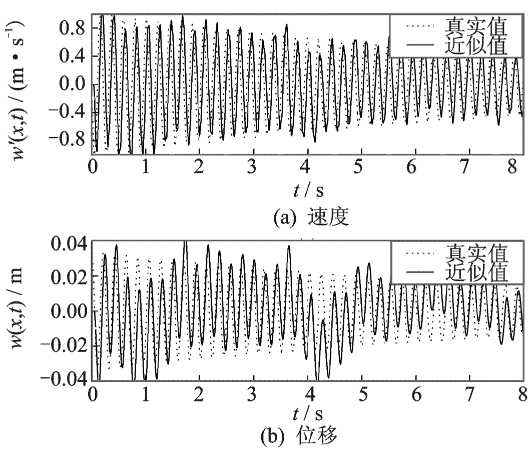


图6　去直流分量和趋势项后的信号

4.2　控制效果及分析

为了便于区别，在下面的仿真中，记C1为采用速度-加速度时滞反馈控制器(28)控制含输入时滞的系统(7)；C2为采用速度-加速度反馈控制器(34)控制含输入时滞的系统(7)。

由于在控制系统中采用了低通滤波器，如图2所示，由滤波器群时延引起的系统时滞不可避免。若在设计控制器时忽略时滞，直接用速度-加速度反馈控制器(34)去控制含输入时滞的系统(7)，便形成中立型时滞系统(35)。应用NDDE-biftool工具，可得到对应特征方程(36)的特征根分布见图7。由图7可知，当$\tau \leqslant 0.007$s时，系统无正实部特征根，加入控制器(34)的系统(7)是稳定的。当$\tau \geqslant 0.008$ s，特征根实部曲线穿越了$\mathrm{Re}(\lambda)=0$这条直线，出现了正实部特征根，即闭环系统(35)的稳定区间为$\tau \in [0, 0.007\ \mathrm{s}]$。而滤波器引起的时延为0.054 s，在此时滞量下采用速度-加速度反馈，极易使系统不稳定。

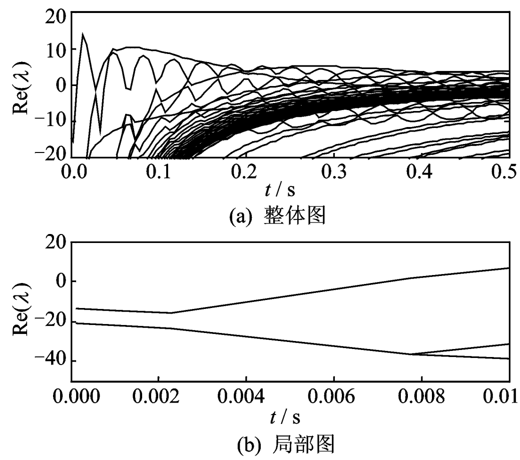


图7　时滞τ与特征根实部分布图

下面将通过C1，C2方法在多种不同时滞下的控制效果进行对比，以表明速度-加速度时滞反馈控制较之速度-加速度反馈控制的优势。

假定输入时滞为$\tau=0.007$ s，在此时滞下，由图7可知C2方法稳定，其对应的控制效果如图8所示。由此可知，采用不考虑时滞所设计的速度-加速度反馈控制器(34)来控制含有输入时滞的系统(7)时，只要选择的反馈增益矩阵和时滞量能使系统稳定，则受控后的位移和加速度响应仍然有较好的控制效果。在相同时滞下，采用C1控制方法，比C2有更好的控制效果，如图9所示。

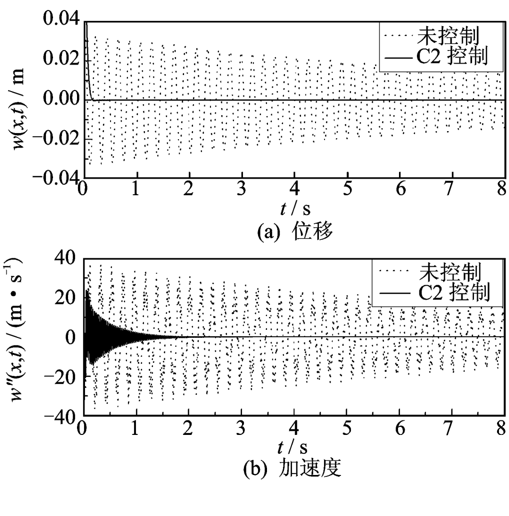
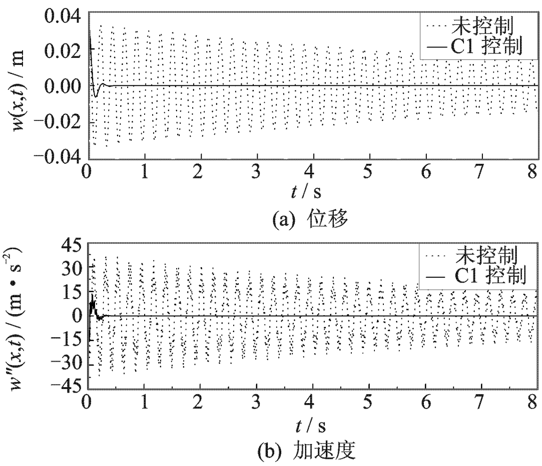


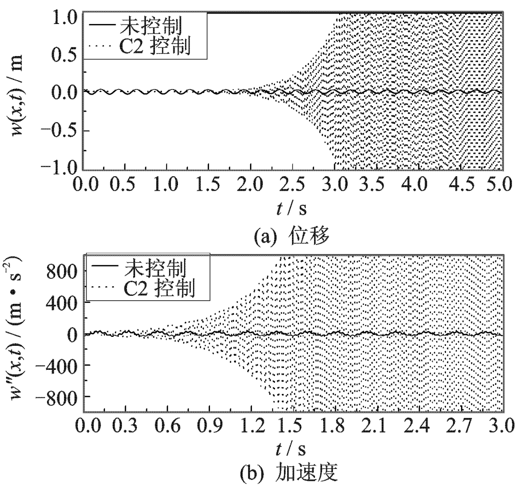
图8　$\tau=0.007$ s时C2控制效果图

再次选择使C2 方法不稳定的滞量 $\tau=0.008$ s，此时，C2 对含输入时滞的系统(7)的控制已不能凑效，甚至会使系统响应发散，如图 10(b)所示。而由图 11 的C1 方法的控制效果图可知，C1 控制下位移和加速度响应均有良好的控制效果。由此可见，速度



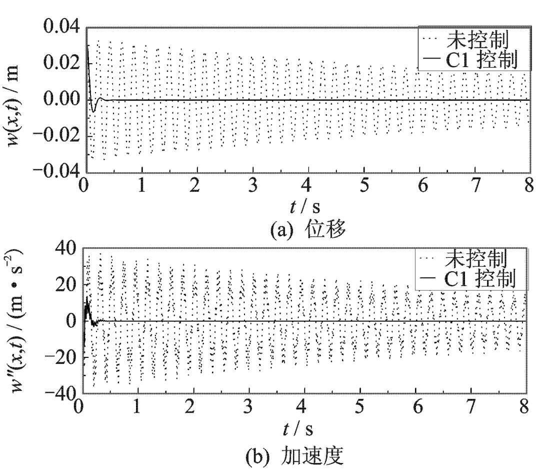
(a) 位移
(b) 加速度

图 9　$\tau=0.007$ s 时C1 方法控制自由振动的效果图



(a) 位移
(b) 加速度

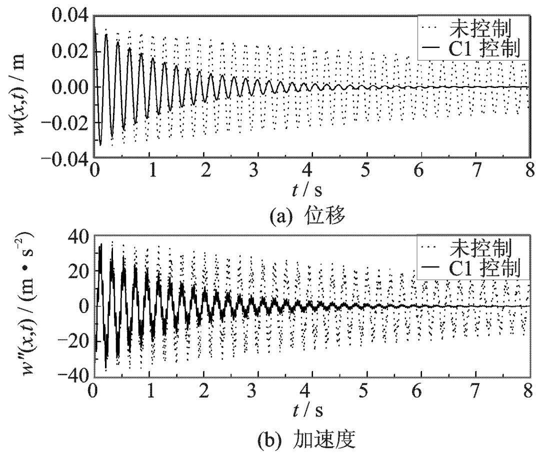
图 10　$\tau=0.008$ s 时C2 控制效果图



(a) 位移
(b) 加速度

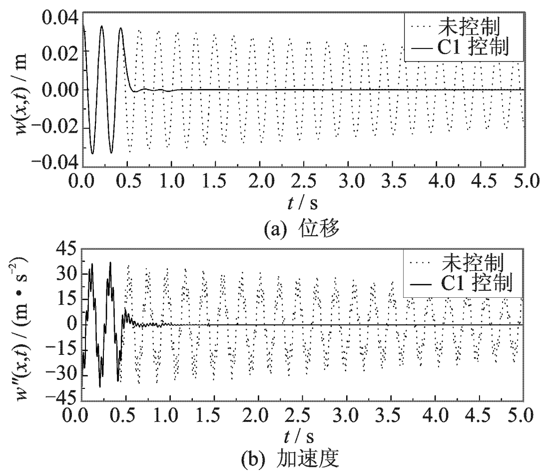
图 11　$\tau=0.008$ s 时C1 方法控制自由振动的效果图

-加速度反馈控制直接应用于存在输入时滞的系统是有风险的。若时滞量和反馈控制增益的选择使系统不稳定，则控制可能完全失效；而采用C1 方法，则不存在此问题。



(a) 位移
(b) 加速度

图 12　$\tau=0.054$ s 时C1 方法控制自由振动的效果图



(a) 位移
(b) 加速度

图 13　$\tau=0.426$ s 时C1 方法控制自由振动的效果图

考虑滤波器群时延引起的时滞，将时滞量 τ 增大至 0.054 s 时，由图 12 可以看出，C1 方法有良好的控制效果。说明在采用此低通滤波器的振动控制系统中，考虑滤波器群时延引起的时滞，采用C1 方法，能取得良好控制效果。

由于系统中噪声信号频率的复杂性，假定需要采用更高阶的低通滤波器，由此带来的群时延会更大，当继续增大时滞量至 0.426 s 时，由图 13 可以看出，C1 方法对含输入时滞较大的振动控制系统仍有良好的控制效果，在初始[0，0.426 s]，控制前后响应重合，在0.426 s 之后，开始有控制效果。由此可见，控制力是在延迟了 τ 时刻之后作用到被控对象并开始起控制作用的，这符合实际时滞系统控制器的实现过程。

以上仿真表明，在含输入时滞的智能梁的振动控制系统中，速度-加速度时滞反馈控制器能有效抑制其自由振动，且当不考虑时滞的速度-加速度反馈控制失效时，速度-加速度时滞反馈仍有良好的控制效果，从而体现出该控制方法在采用加速度传感器且存在输入时滞的振动主动控制系统中的潜在应用价值。

5 结 论

1）不含位移信号可避免状态反馈中两次数值积分求位移信号时带来的累积误差。

2）考虑滤波器群时延导致的时滞问题，充分利用采集到的时滞加速度信号设计速度-加速度时滞反馈控制器。

3）在存在输入时滞的振动控制系统中，速度-加速度反馈控制易于引起系统的不稳定，达不到应有的控制效果，而速度-加速度时滞反馈控制却能有效抑制系统的振动。

参 考 文 献

[1] Yang J N, Li Z, Liu S C. Instantaneous optimal control with acceleration and velocity feedback[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1991,6(3): 204-211.

[2] Yang J N, Li Z,Liu S C. Control of hysteretic system using velocity and acceleration feedbacks[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1992,118(11): 2227-2245.

[3] 张宏. 基于加速度校正的油气悬架系统位移特性分析[J]. 振动、测试与诊断，2010,30(5):566-569.
Zhang Hong. Displacement characteristic of hydro-pneumatic suspension using acceleration calibration [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010,30(5):566-569. (in Chinese)

[4] Stiros S C. Errors in velocities and displacements deduced from accelerographs: an approach based on the theory of error propagation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering,2008,28:415-420.

[5] 徐庆华. 试采用FFT方法实现加速度、速度与位移的相互转换[J]. 振动、测试与诊断，1997,17(4):30-34.
Xu Qinghua. Conversion between vibration acceleration, velocity and displacement using FFT[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1997,17 (4):30-34. (in Chinese)

[6] Tseng Y W, Kwak S K, Yedavalli R K. Stability, controllability and observability criteria for the reciprocal state space framework[C]// Proceedings of the American Control Conference. Denver, Colorado:[s. n.],2003.

[7] Abdelaziz T H S. Robust pole assignment for linear time-invariant systems using state-derivative feedback [J]. Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Part Ⅰ:Journal of Systems and Control Engineering, 2008, 223(2):187-199.

[8] Cardim R, Teixeira M C M, Faria A, et al. LMI-based digital redesign of linear time-Invariant systems with state-derivative feedback[C]// The 18th IEEE International Conference on Control Application Part of 2009 IEEE Multi-conference on Systems and Control. Saint Petersburg, Russia:IEEE Press,2009.

[9] Abdelaziz T H S. Optimal control using derivative feedback for linear systems[J]. Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Part Ⅰ:Journal of Systems and Control Engineering, 2010,224(2):185-202.

[10] 刘博. 一类多自由度机械系统的时滞反馈镇定[D]. 南京：南京航空航天大学，2009.

[11] Cai Guoping, Yang S X. A discrete optimal control method for a flexible cantilever beam with time delay [J]. Journal of Vibration and Control, 2006,12(5): 509-526.

[12] Kwon W H, Pearson A E. Feedback stabilization of linear systems with delayed control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1980,25(2):266-269.

[13] 张永强，宋建江，屠良尧，等. 软件数值积分误差原因分析及改进办法[J]. 机械强度，2006, 28 (3): 419-423.
Zhang Yongqiang, Song Jianjiang, Tu Liangyao, et al. Error analysis and improvement method when numerical integration with software[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28 (3): 419-423. (in Chiense)

[14] David A W B. Dynamics and bifurcations of non-smooth delay equations[D]. Bristol, UK: University of Bristol,2006.

第一作者简介：安方，女，1981年2月生，博士研究生。主要研究方向为考虑时滞的振动系统的动力学分析与控制。
E-mail:anfang@nuaa.edu.cn