

小数据量法计算最大 Lyapunov 指数的参数选择*

杨永锋^{1,2}, 仵敏娟³, 高 喆², 吴亚锋², 任兴民²

(1. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室 上海, 200240)

(2. 西北工业大学振动工程研究所 西安, 710072) (3. 航天时代电子公司第 771 研究所 西安, 710065)

摘要 为避免人为选择平均周期和线性区间所带来的计算不准, 在分析小数据量法计算最大 Lyapunov 指数的基础方法之上, 提出平均周期和计算最大 Lyapunov 指数线性区域的确定方法。仿真算例表明, 所提出的方法可以快速便捷地实现小数据量法计算最大 Lyapunov 指数。

关键词 非线性; 最大 Lyapunov 指数; 小数据量法; 平均周期; 线性区间

中图分类号 O322

引 言

混沌信号的诊断及其特性的描述已经广泛地应用于时间序列的分析中^[1-2]。研究实际观测序列是否具有混沌特性的常用方法是分析序列的最大 Lyapunov 指数, 当其为正时, 认为系统具有混沌特性。自 Wolf 提出根据观测序列计算 Lyapunov 指数的方法以来^[3], 至今在这方面比较成熟的算法还有 Jacobian 法、p 范数法和 Rosenstein 等提出的小数据量法^[4-6]。小数据量法相对于其他方法更具有对相空间的嵌入维数、重建延时、观测噪声等鲁棒性, 计算 Lyapunov 指数的同时, 还可以得到关联维数等其他混沌系统的重要特征量^[7]; 但这种方法在计算过程有些参数需要人为选择, 不利于计算机快速计算。笔者基于对混沌演化轨道的分析, 提出了平均周期和计算最大 Lyapunov 指数的线性区域确定方法, 可快速便捷地计算响应的最大 Lyapunov 指数。

1 小数据量方法计算最大 Lyapunov 指数

设混沌时间序列为 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, 嵌入维数 m , 时间延迟 τ , 则重构相空间

$$Y_i = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}) \in R^m$$
$$(i = 1, 2, \dots, M)$$

其中: $N = M + (m - 1)\tau$ 。

在重构相空间后, 寻找给定轨道上每个点的最邻近点, 即

$$d_j(0) = \min \|Y_j - Y_{\hat{j}}\|$$

这里采用了限制短暂分离, 即要求 $|j - \hat{j}| > P$, 其中: P 为时间序列的平均周期; $d_j(0)$ 为第 j 个参考点 Y_j 和最近邻点 $Y_{\hat{j}}$ 的初始距离; $\|\cdot\|$ 表示二范数。那么最大 Lyapunov 指数就可以通过基本轨道上每个点的最邻近点的平均发散速率估计出来^[5]。

Sato 估计最大 Lyapunov 指数^[8]为

$$\lambda_1(i, k) = \frac{1}{k\Delta t} \frac{1}{(M - k)} \sum_{j=1}^{M-k} \frac{d_j(i+k)}{d_j(i)} \quad (1)$$

其中: k 为常数; Δt 为样本周期; $d_j(i)$ 为基本轨道上第 j 对最邻近点经过 i 个离散时间步长后的距离。

最大 Lyapunov 指数的几何意义是量化初始闭轨道的指数发散和估计系统的总体混沌水平的量, 所以结合 Sato 的估计式有

$$d_j(i) = C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)}, C_j = d_j(0)$$

将上式两边取对数得

$$\ln d_j(i) = \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t) \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

显然, 最大 Lyapunov 指数大致相当于上面这组直线的斜率, 它可以通过最小二乘法逼近这组直线而得到, 即

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle \quad (2)$$

其中: $\langle \cdot \rangle$ 表示所有关于 j 的平均值。

* 国家自然科学基金资助项目(编号:10902084);机械系统与振动国家重点实验室开放课题资助项目(编号:MSV-2010-16);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(编号:2011JQ1011);西北工业大学翱翔之星资助项目;西北工业大学基础研究基金资助项目(编号:JC201242)

收稿日期:2011-03-21;修改稿收到日期:2011-07-07

2 平均周期的确定

在计算最大Lyapunov指数时,为了避免参考点和最近邻点位于同一轨线上,采用限制短暂分离的策略,参考点与其最近邻点的间隔应大于序列的平均周期,Rosenstein指出,平均周期可以通过功率谱的平均频率的倒数估计出来^[5]。关于确定混沌序列的平均周期问题,一直存在比较大的争议。一方面混沌序列的功率谱理论上应该是连续谱,不存在比较明显的周期;另一方面对于某些低维混沌吸引子确实存在一定的伪周期性。笔者提出一种加权平均的方法来计算平均周期。

设信号经过FFT变换后对应于其频率 f_1, f_2, \dots, f_n 的幅值为 A_1, A_2, \dots, A_n ,则其平均频率为

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n f_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

相应的平均周期为

$$P = \frac{1}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{\sum_{i=1}^n f_i A_i} \quad (3)$$

3 小数据量方法计算最大Lyapunov指数线性区域的选择

传统小数据量法需要人为选择一段线性区域作为计算最大Lyapunov指数的区域。笔者针对小数据量法计算最大Lyapunov指数过程中线性区域不易寻找和计算的问题,提出用最大无波动区间作为其线性区域,用最小二乘法进行直线拟合,求得该线性区的斜率,即最大Lyapunov指数。

最大无波动区间,即在序列 $\ln d_j(i)$ 中选取导数波动在一定范围内的最大区间作为计算最大Lyapunov指数的线性区域。对于 $\ln d_j(i)$,若最大离散演化步数(即 $\ln d_j(i)$ 数据长度)为 n ,可设定初始线性区域大小为 $j=2$,初始线性区域起始位置 $k=1$,然后按下列步骤计算:

- 1) 对序列 $\ln d_j(i)$ 求导得到其导数序列 $\ln d_j(i)'$;
- 2) 取序列 $\ln d_j(i)'$ 中 $\ln d_j(k)'$, $\ln d_j(k+1)'$, \dots , $\ln d_j(k+j)'$ 构成新序列 z ;
- 3) 计算序列 z 的平均值 a_c ;
- 4) 计算 z 中每个元素与平均值之差 c ;
- 5) 如 $\max(c) < \epsilon$ 成立,则认为 $\ln d_j(i)$ 从 k 到 $k+j$ 段数据满足线性区域要求,存储 $m=j$, $n=k$;若 $\max(c) > \epsilon$ 不成立,则执行下一步;

6) 如 $k+1 < n-1-j$ 成立,则 $k=k+1$,重复步骤1~4;如 $k+1 < n-1-j$ 不成立,则 $k=1$,执行下一步;

7) 如 $j+1 < n-1$ 成立,则 $j=j+1$,重复步骤1~5;如 $j+1 < n-1$ 不成立,则结束程序。

因此对于 $\ln d_j(i)$, m 为其最大线性区域大小, n 为其最大线性区域起始位置。选取 $\ln d_j(n), \ln d_j(n+1), \dots, \ln d_j(n+m)$ 进行线性拟合,其斜率即为最大Lyapunov指数。

在计算过程中,当最大Lyapunov指数为正时, ϵ 可选 $a_c/10$ (其波动不超过平均值的10%);当最大Lyapunov指数为负时, ϵ 可选0.01左右。为了减小计算量,线性区域初始大小可从 $j=n/10$ 开始计算。

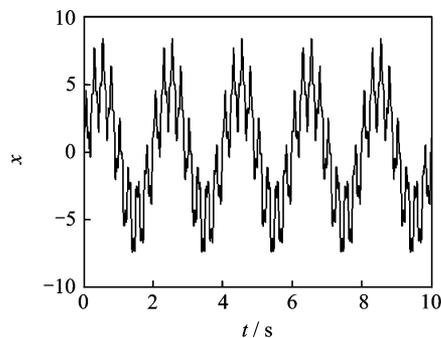
4 仿真算例

4.1 平均周期算例

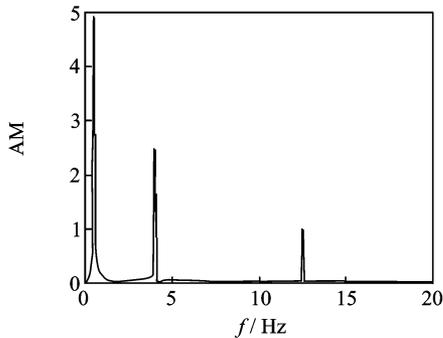
采用正弦信号对平均周期进行验证,设正弦波如下

$$x = 5\sin(\pi t/2) + 2.5\sin(8\pi t) + \cos(25\pi t)$$

仿真时间取 $t \in [0, 10]$,步长取 $1/100$,则上式正弦信号的波形图和频谱图如图1所示。采用本研究方法计算其平均周期为0.36 s。



(a) 波形图



(b) 频谱图

图1 平均周期确定仿真算例

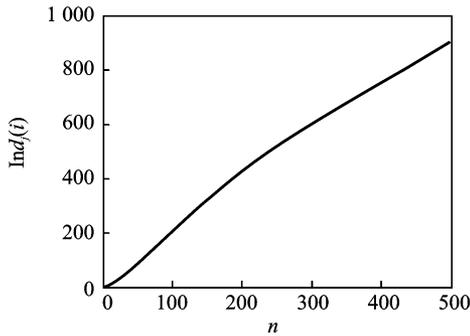
4.2 线性区间选择算例

目前,Lorenz 系统仍然被用于描述许多不同的物理现象,例如激光装置、发电机组部件和一些与对流相关的问题^[9]。若用 x 表示对流体运动, y 表示水平温度变化, z 表示垂直温度变化,则无量纲 Lorenz 方程^[10]可写为

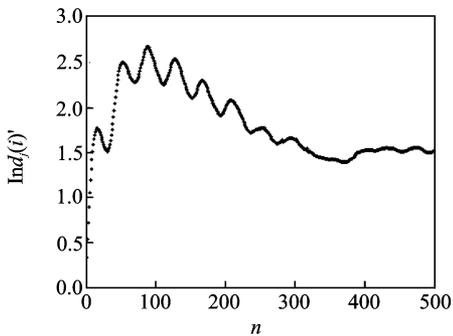
$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (4)$$

其中: a 和 c 为相应的普朗特数和雷诺数; b 为几何因子。

选取参数 $a = 16, b = 4, c = 45.92$,采用四阶 Runge-Kutta 算法积分,积分步长为 0.01,积分初值为 $[-1, 0, 1]$ 。利用小数据量法计算系统的 x 分量最大 Lyapunov 指数为 1.501 5(文献[3]参考值为 1.5,在本研究中嵌入维数 m 根据 Takens 定理和 Cao 方法选取,时间延迟根据互信息法选取),具体计算参数见表 1,线性区间选取的中间参数见图 2。



(a) $Ind(i)$ 随点数变化图



(b) $Ind(i)$ 随点数变化图

图 2 线性区域选择仿真算例

表 1 Lorenz 系统最大 Lyapunov 指数所选参数

延迟时间 τ	嵌入维数 m	线性区间	平均周期 P	最大 Lyapunov 指数 λ_1
10	3	[269 499]	0.719	1.501 5

4.3 Duffing 系统混沌响应最大 Lyapunov 指数计算

笔者仅选取经典方程进行参数验证,研究如下具有负线性刚度的 Duffing 方程

$$\ddot{x} + c\dot{x} - x + x^3 = f\cos\omega t \quad (5)$$

给定 $c = 0.3$ 和 $\omega = 1.2$,令 f 逐渐增加,系统运动会出现多次倍周期分岔而产生混沌运动。应用笔者提出的方法,采用 Newmark- β 法积分,积分步长为 0.01,积分初值为 0,利用小数据量法计算了 $f = 0.32$ 时混沌响应的最大 Lyapunov 指数为 0.794 1。具体计算参数见表 2。

表 2 Duffing 系统混沌响应最大 Lyapunov 指数所选参数

延迟时间 τ	嵌入维数 m	线性区间	平均周期 P	最大 Lyapunov 指数 λ_1
23	4	[183 374]	2.645	0.794 1

5 结束语

为了快速便捷地计算序列的最大 Lyapunov 指数,笔者提出了计算其参数平均周期的方法以及利用最大无波动区间选取线性区域的方法,并通过 Lorenz 系统和 Duffing 系统混沌响应的最大 Lyapunov 指数计算验证了平均周期和线性区间选择方法的正确性。

参 考 文 献

[1] 吕延军,张永芳,季丽芳,等. 可倾瓦轴承-转子系统非线性动力行为振动[J]. 振动、测试与诊断, 2010, 30(5): 539-543.
Lü Yanjun, Zhang Yongfang, Ji Lifang, et al. Analysis of nonlinear dynamic behaviors of rotor system supported by tilting-pad journal bearings [J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2010, 30(5):539-543. (in Chinese).

[2] 孙志峻,帅双辉,金家楣,等. 基于径向基神经网络的直线超声电机位置控制[J]. 振动、测试与诊断, 2010, 30(6): 650-653.
Sun Zhijun, Shuai Shuanghui, Jin Jiamei, et al. Position control of linear ultrasonic motor using radial basis function neural network [J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2010, 30(65):650-653. (in Chinese)

- [3] Wolf A, Swift J B, Swinney H L. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. *Physics D*, 1985, 16(3): 285-371.
- [4] Kantz H, Schreiber T. *Nonlinear time series analysis* [M]. New York: Cambridge University Press, 1997: 69-74.
- [5] Rosenstein M T, Collins J J, De L C. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, 65(3): 117-134.
- [6] 张晓丹, 刘翔, 赵品栋. 一类延迟混沌系统沿主轴方向上 Lyapunov 指数的计算方法 [J]. *物理学报*, 2009, 58(7): 4415-4420.
Zhang Xiaodan, Liu Xiang, Zhao Pindong. Methods for calculating the main-axis Lyapunov exponents of a type of chaotic systems with delay [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(7): 4415-4420. (in Chinese)
- [7] 张勇, 陈天麒, 陈滨. 计算最大 Lyapunov 指数的推广小数据量法 [J]. *电子科技大学学报*, 2004, 33(6): 254-257.
Zhang Yong, Chen Tianqi, Chen Bin. Extended methods for calculating largest Lyapunov exponent from small data sets [J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2004, 33(3): 254-257. (in Chinese)
- [8] Sato S, Sano M, Sawada Y. Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems [J]. *Progress of Theoretical Physics*, 1987, 77(1): 1-5.
- [9] Richter H. Controlling the Lorenz system: combining global and local schemes [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, 12(13): 2375-2380.
- [10] 韩修静, 江波, 毕勤胜. 快慢型超混沌 Lorenz 系统分析 [J]. *物理学报*, 2009, 58(9): 6006-6015.
Han Xiuqing, Jiang Bo, Bi Qinsheng. Analysis of the fast-slow hyperchaotic Lorenz system [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(9): 6006-6015. (in Chinese)



第一作者简介:杨永锋,男,1981年7月生,博士、副教授。主要研究方向为非线性动力学、转子动力学。曾发表《随机噪声对经验模态分解非线性信号的影响》(《物理学报》2010年第59卷第6期)等论文。

E-mail:yyf@nwpu.edu.cn

欢迎订阅《振动、测试与诊断》

《振动、测试与诊断》由工业和信息化部主管,南京航空航天大学 and 全国高校机械工程测试技术研究会联合主办,是反映振动、动态测试及故障诊断学科领域的科研成果及其应用情况的技术性刊物。主要刊登国内外以振动测试与故障诊断为中心的动态测试理论、方法和手段的研究及应用方面的技术文献,包括实验测试技术、测试仪器的研制、方法和系统组成、信号分析、数据处理、参数识别与故障诊断以及有关装置的设计、使用、控制、标定和校准等,不拘泥于行业和测试项目。

本刊入选 EI Compendex 数据库收录期刊和中文核心期刊,为双月刊,每逢双月末出版,每本定价 20 元,全年 120 元。欢迎订阅和投稿,欢迎在本刊刊登各类广告和科技信息。

编辑部地址:南京市御道街 29 号 邮政编码:210016 电话:(025)84893332
 传真:(025)84893332 E-mail:qchen@nuaa.edu.cn 网址:http://zdcns.nuaa.edu.cn