

◀ 专家论坛 ▶

# 多平行轴齿轮耦合转子系统的振动响应\*

张义民, 何永慧, 朱丽莎, 黄婧, 刘鑫, 马辉

(东北大学机械工程与自动化学院 沈阳, 110004)

**摘要** 以一个两对斜齿轮耦合的三平行轴转子系统膨胀机子系统为研究对象,建立了斜齿轮啮合副动力学模型和转子系统有限元模型,考虑了齿轮啮合刚度、方位角、啮合角、螺旋角以及主动轴转动方向的影响,推导出齿轮啮合刚度矩阵。基于模态叠加法,对弯-扭耦合转子系统膨胀机子系统进行了固有特性分析和瞬态方式的不平衡响应分析,得到齿轮啮合前、后系统加载处的不平衡响应变化曲线。研究表明,齿轮间的耦合使系统之间的振动强烈,系统可能会在某个非固有频率处不平衡响应进行积累叠加,出现最大振动的现象,同时识别出共振峰的产生机理。齿轮耦合对转子系统动力学特性产生了很大的影响,使系统振型表现为耦合振型,必须以耦合的方式分析系统的振动特性,为防止系统发生大的振动提供依据,对齿轮系统的设计和故障分析具有指导意义。

**关键词** 齿轮; 转子; 振动; 耦合; 共振峰

**中图分类号** TH113.1; TH132.413; O323

## 引言

近年来,PA3型离心压缩机在世界上发展得很快,在我国广泛应用于冶金、石化和制药等领域。随着旋转机械向着高转速、大功率的方向发展,齿轮传动已成为转子轴承系统中重要的一类传动。机器运转时若振动过大很容易出现各种故障,甚至造成重大事故。转子系统中齿轮耦合是较为复杂的一类,而转子动力学和齿轮动力学等在系统动力学研究中至关重要。目前,国内、外学者已经做了相应的实验和理论研究。齿轮耦合对转子系统的动力学分析有很大影响,大量文献致力于耦合振动的研究<sup>[1-5]</sup>。文献[1]建立了DH型压缩机三齿轮耦合几何模型和弯扭耦合振动方程,进行转子间耦合与不耦合情况下的模态分析。文献[2]基于齿轮的啮合作用,考虑啮合刚度和啮合阻尼,且不考虑齿侧间隙和啮合线位置的变化,对三平行轴齿轮耦合转子系统进行了动力学分析,表明齿轮耦合系统具有不同于单根转子的振动特性。文献[3]针对细长轴的转子系统特点建立了突变扭矩激励下的耦合转子系统动力学模型,对模型进行求解和仿真,结果表明联轴器的刚度对横向振动响应影响较大,使得横、纵向位移发生偏移,同时振幅也变大。文献[4]对直齿轮轴系的弯扭耦合振动进行研究,忽略齿轮弹性变形,建立刚性接

触的齿轮啮合模型,系统的横向振动模态计算表明弯扭耦合在系统动力学特性分析中不可忽略。文献[5]研究了涡轮发动机齿轮传递装置在短路扭矩激励作用下的横向响应,分析弯曲特性对平衡转子的影响,同时考虑齿轮和轴向扭矩对弯扭耦合的影响,表明弯曲特性分析在转子-轴承系统分析中的重要性。

在分析齿轮耦合转子系统的振动特性时,建立的模型各不相同<sup>[6-11]</sup>。文献[6]建立了人字齿轮转子系统的弯-扭耦合振动分析模型,对燃气轮机齿轮-转子系统进行了振动特性分析,采用耦合转子动力学方法分析齿轮转子系统的不平衡响应。文献[7]采用有限单元法建立含裂纹 Jeffcott 转子的有限元模型,利用应变能释放率法得到裂纹单元的刚度矩阵。文献[8]采用有限元法研究了直齿轮转子系统的动力学特性,建立弯扭耦合有限元模型,该模型包含弯扭3个自由度,在不平衡作用下进行了强迫振动分析,得到啮合刚度对系统动力学响应的影响规律。文献[9]建立了多齿轮啮合的动力学模型,该模型包含弯-扭-轴3个方向,研究齿轮-轴-轴承系统的自由受迫振动特性,表明系统某些关键参数对系统动力学的影响。文献[10]建立了涡轮制冷机增速齿轮转子-轴承模型,包含横向和扭转方向10个自由度,考虑齿轮刚度变化和转速的影响,对单对齿轮进行了弯-扭耦合的动力学分析。文献[11]分析了多齿轮啮合的动态特性,建立3对斜齿轮的三维模型,该模型包括弯-

\* 国家自然科学基金资助项目(编号:51135003;50805019)

收稿日期:2012-01-13;修改稿收到日期:2012-03-09

扭-轴-摆 4 个方向,明确在两种不同加载工况下,螺旋角、加载条件对转子系统固有特性的影响程度。

笔者以一个三平行轴转子系统膨胀机子系统为研究对象,建立了斜齿轮啮合副动力学模型和转子系统有限元模型,其中转子系统采用梁单元来模拟,齿轮之间的耦合作用通过啮合刚度矩阵模拟,在考虑齿轮啮合刚度、方位角、啮合角、螺旋角和主动轴转动方向对齿轮啮合刚度矩阵的影响下,推导齿轮啮合刚度。对弯-扭耦合转子系统膨胀机子系统进行瞬态方式的不平衡响应分析,对比齿轮啮合前、后系统加载处的不平衡响应变化曲线,通过与固有特性的对比得到与之对应的隔离裕度表,并识别出共振峰的产生机理。

## 1 斜齿轮啮合副动力学模型

为分析平行轴齿轮耦合多转子系统的振动特性,建立一个斜齿轮副全自由度啮合模型,且考虑弯-扭的耦合效应。如图 1 所示,该系统由两个斜齿轮副  $i, j$  组成(主动轮为齿轮  $i$ ,从动轮为齿轮  $j$ ),取主动轮顺时针旋转为正,逆时针旋转为负,加载形式为不平衡激励。将啮合齿轮视为一对通过弹簧和阻尼器联接的刚性圆盘,采用一个弹簧-阻尼单元来模拟,由于斜齿轮的传动具有重合度大的优点,齿与齿交替啮合刚度波动小,虽然啮合刚度是时变的,但不存在阶跃型突变,由于斜齿轮突变性不强,在计算时将啮合刚度视为定值。斜齿轮间的啮合简化为一个刚度为  $k_{ij}$  的线性弹簧,弹簧沿着由螺旋角  $\beta_{ij}$  确定的轮齿的啮合线方向,并假设压为正、拉为负。齿轮的相对位置由齿轮的方位角  $\alpha_{ij}$  ( $0 \leq \alpha_{ij} < 2\pi$ ) 确定,方位角定义为主动轮  $i$  的  $x$  轴逆时针旋转至中心线的夹角。 $\psi_{ij}$  为主动轮  $y$  轴正向与啮合平面的夹角,逆时针为正,顺时针为负。

$$\psi_{ij} = \begin{cases} -\varphi_{ij} + \alpha_{ij} & (\text{主动轮逆时针}) \\ \varphi_{ij} + \alpha_{ij} - \pi & (\text{主动轮顺时针}) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\varphi_{ij}$ 为啮合角。

螺旋角  $\beta$  定义为

$$\beta = \begin{cases} > 0 & (\text{主动轮左旋}) \\ < 0 & (\text{主动轮右旋}) \end{cases} \quad (2)$$

引入  $\text{sgn}$  函数

$$\text{sgn} = \begin{cases} 1 & (\text{主动轮 } i \text{ 逆时针}) \\ -1 & (\text{主动轮 } i \text{ 顺时针}) \end{cases} \quad (3)$$

齿轮质心  $O$  的位移向量表示为

$$\mathbf{X}_{ij} = [x_i \quad y_i \quad \theta_{zi} \quad x_j \quad y_j \quad \theta_{zj}]^T \quad (4)$$

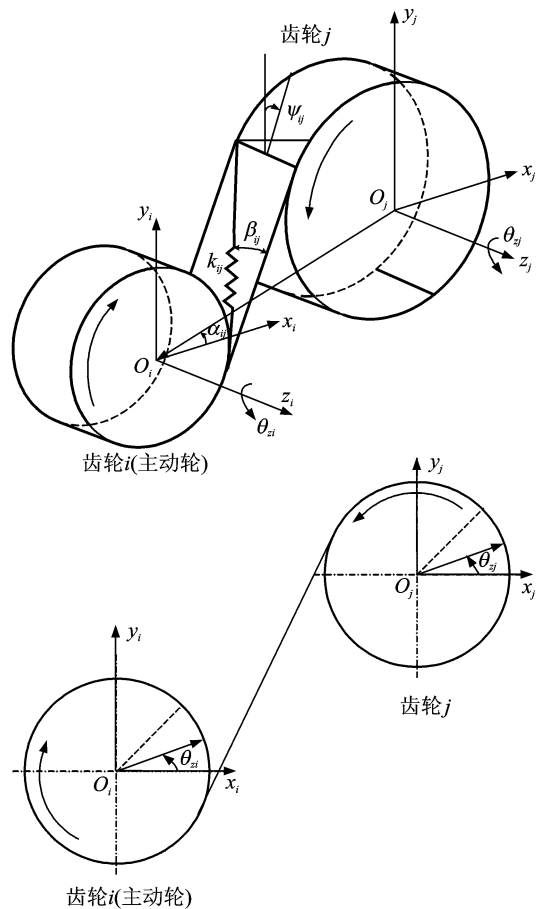


图 1 斜齿轮副三维动力学模型

其中: $x, y$ 为横向自由度; $\theta_z$ 为扭转自由度。

根据图 1 模型建立斜齿轮副运动微分方程为

$$m_i \ddot{x}_i - k_{ij} \mathbf{p}_{ij}(t) \cos \beta_{ij} \sin \psi_{ij} = m_i e_i \omega_i^2 \cos \omega_i t \quad (5a)$$

$$m_i \ddot{y}_i + k_{ij} \mathbf{p}_{ij}(t) \cos \beta_{ij} \cos \psi_{ij} = m_i e_i \omega_i^2 \sin \omega_i t \quad (5b)$$

$$J_i \ddot{\theta}_{zi} + \text{sgnr}_i k_{ij} \mathbf{p}_{ij}(t) \cos \beta_{ij} = \text{sgn} T_i \quad (5c)$$

$$m_j \ddot{x}_j + k_{ij} \mathbf{p}_{ij}(t) \cos \beta_{ij} \sin \psi_{ij} = m_j e_j \omega_j^2 \cos \omega_j t \quad (5d)$$

$$m_j \ddot{y}_j - k_{ij} \mathbf{p}_{ij}(t) \cos \beta_{ij} \cos \psi_{ij} = m_j e_j \omega_j^2 \sin \omega_j t \quad (5e)$$

$$J_j \ddot{\theta}_{zj} + \text{sgnr}_j k_{ij} \mathbf{p}_{ij}(t) \cos \beta_{ij} = \text{sgn} T_j \quad (5f)$$

其中: $\mathbf{p}_{ij}(t)$ 为齿轮副  $ij$  在啮合线方向的相对位置,用位移向量表示为

$$\mathbf{p}_{ij}(t) = (-x_i \sin \psi_{ij} + x_j \sin \psi_{ij} + y_i \cos \psi_{ij} - y_j \cos \psi_{ij} + \text{sgnr}_i \theta_{zi} + \text{sgnr}_j \theta_{zj}) \cos \beta_{ij} \quad (6)$$

将以上方程组写成矩阵形式为

$$\mathbf{M}_{ij} \ddot{\mathbf{X}}_{ij} + \mathbf{C}_{ij} \dot{\mathbf{X}}_{ij} + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{X}_{ij} = \mathbf{F}_w \quad (7)$$

其中: $\mathbf{M}_{ij}$ 为质量矩阵; $\mathbf{C}_{ij}$ 为比例阻尼矩阵; $\mathbf{K}_{ij}$ 为啮合刚度矩阵; $\mathbf{F}_w$ 为外力向量。

$\mathbf{M}_{ij}, \mathbf{C}_{ij}$ 表示为

$$\mathbf{M}_{ij} = \text{diag}(m_i, m_i, J_i, m_j, m_j, J_j) \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_{ij} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (9)$$

在与固有特性作对比时,利用 Modal Analysis

(QR 阻尼法)对齿轮转子系统进行固有特性分析,阻尼形式为比例阻尼,即用  $\alpha$  阻尼和  $\beta$  阻尼<sup>[12]</sup>来表示,取值为

$$\alpha = \frac{2\zeta_{mr1}\omega_{r1}\omega_{r2}^2 - 2\zeta_{mr2}\omega_{r2}\omega_{r1}^2}{\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2} \quad (10)$$

$$\beta = \frac{2\zeta_{mr2}\omega_{r2} - 2\zeta_{mr1}\omega_{r1}}{\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2} \quad (11)$$

通常情况下取  $\zeta_{mr1} = \zeta_{mr2} = \zeta_m$ 。其中:  $\omega_{r1}$  和  $\omega_{r2}$  分别为第 1 阶和第 2 阶临界转速;  $\zeta_{mr1}$  和  $\zeta_{mr2}$  分别为对应的第 1 和第 2 阶模态阻尼比。

$$\mathbf{K}_{ij} = k_{ij} \alpha_{ij}^T \alpha_{ij} \quad (12)$$

$$\alpha_{ij} = [-\sin\psi_{ij}\cos\beta_{ij}, \cos\psi_{ij}\cos\beta_{ij}, \operatorname{sgn}r_i\cos\beta_{ij}, \sin\psi_{ij}\cos\beta_{ij}, -\cos\psi_{ij}\cos\beta_{ij}, \operatorname{sgn}r_j\cos\beta_{ij}] \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_w = [m_i e_i \omega_i^2 \cos\omega_i t, m_i e_i \omega_i^2 \sin\omega_i t, \operatorname{sgn}T_i, m_j e_j \omega_j^2 \cos\omega_j t, m_j e_j \omega_j^2 \sin\omega_j t, \operatorname{sgn}T_j]^T \quad (14)$$

## 2 转子系统有限元模型

以大型转子系统膨胀机子系统为研究对象,基于有限元方法建立齿轮-转子-轴承系统的有限元模型,如图 2 所示。该模型包括膨胀机大齿轮轴、膨胀机 Stage<sub>2</sub> 和膨胀机 Stage<sub>1</sub>,该膨胀机子系统共有 2 对齿轮啮合,轮齿综合啮合刚度通过 GB3480-1997 确定,如表 1 所示。

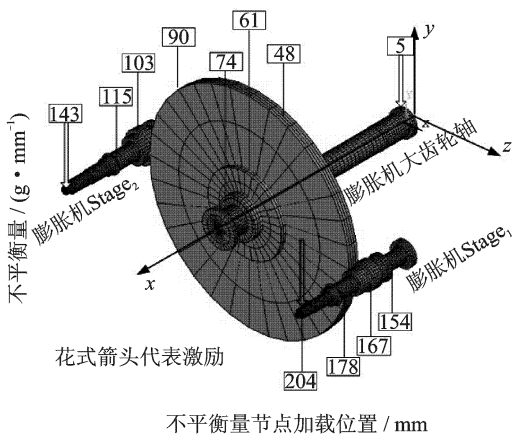


图 2 膨胀机子系统有限元模型图

表 1 齿轮啮合参数

部件	啮合刚度 $k_{ij}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	方位角 $\alpha_{ij}/(^{\circ})$	符号函 数 sgn	螺旋角 $\beta/(^{\circ})$	啮合角 $\varphi_i/(^{\circ})$
膨胀机大齿轮轴	$4.55 \times 10^9$	90	1	-13	20
膨胀机小齿轮级 2	$1.74 \times 10^9$	180	-1	-13	20
膨胀机小齿轮级 1	$1.69 \times 10^9$	0	-1	-13	20

齿轮啮合矩阵  $\mathbf{K}_{ij}$  与 5 个参数相关,分别为齿轮啮合刚度  $k_{ij}$ 、方位角  $\alpha_{ij}$ 、啮合角  $\varphi_{ij}$ 、螺旋角  $\beta$  和符号函数  $\operatorname{sgn}$ 。此矩阵为一个通用啮合矩阵,对于任意工况下的齿轮啮合均适用。齿轮啮合通过 Matrix27 单元啮合,如图 3 所示,矩阵为  $12 \times 12$  的完全对称矩阵,为了分析弯-扭任意形式下的动力学特性,可以通过改变耦合项实现。不考虑轴向振动和绕  $x, y$  的摆动,框内的值只需根据式(13)填入即可,其余项设置为 0。

图 3 考虑弯-扭耦合后的啮合刚度矩阵形式

## 3 不平衡响应分析

基于有限元法,利用 Ansys 对膨胀机子系统进行不平衡响应分析,采用瞬态响应得到系统的临界转速和隔离裕度,将结果与系统的固有特性进行对比,识别出共振峰的产生机理。根据 API617(美国石油协会)标准,笔者对膨胀机子系统不平衡量的施加位置和大小进行确定,如图 2 和表 2 所示。

表 2 不平衡量的加载

部件	转速/ $(\text{r} \cdot \text{min}^{-1})$	质量/kg	不平衡量/ $(\text{g} \cdot \text{mm}^{-1})$	施加位置
膨胀机大齿轮轴	1 201	2 679.286	56 664.327	膨胀机轴端
膨胀机小齿轮级 1	11 358	173.765	388.593	螺母 1 处
膨胀机小齿轮级 2	9 035	467.745	1 314.966	螺母 2 处

完成不平衡量加载后,利用 Ansys 对膨胀机子系统进行瞬态响应分析,得到膨胀机 2 级和 1 级螺母处的不平衡响应曲线如图 4 和图 5 所示。

通过膨胀机螺母处不平衡响应曲线分析可得振幅最大值处对应的临界转速,如表 3 所示,得到膨胀机 2 级、1 级处放大因子,由于放大因子均不大于 2.5,根据 API617 标准可知无须求解对应的隔离裕

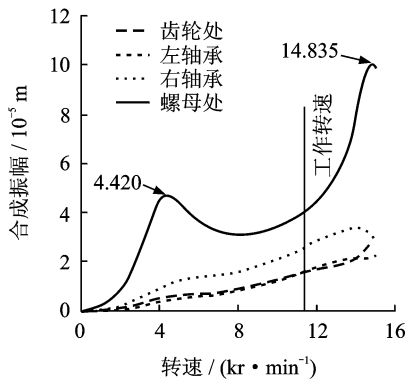


图4 膨胀机2级螺母处不平衡响应曲线

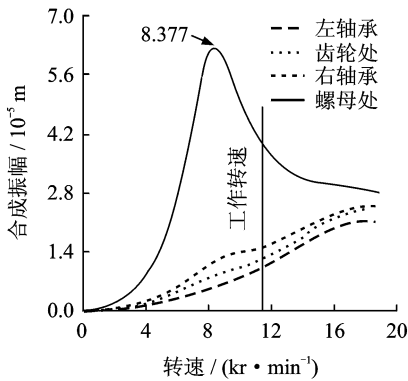


图5 膨胀机1级螺母处不平衡响应曲线

度,膨胀机子系统稳定。将临界转速与转子系统膨胀机子系统的固有频率进行对比,识别出共振峰产生的机理,如表4所示。通过瞬态响应分析识别出转子系统膨胀机子系统的临界转速,为防止系统发生大的振动提供了理论依据;通过瞬态响应与固有特性振型的对比可知,齿轮耦合对膨胀机子系统的临界转速和振型产生了影响:齿轮耦合的作用使得瞬态响应在非固有频率处出现较大的峰值,膨胀机2级

表3 膨胀机瞬态响应临界转速表

膨胀机子系统	临界转/ ( $r \cdot \min^{-1}$ )	放大因子 AF	隔离裕度/%		是否满足标准
			实际	要求	
膨胀机小齿轮级2	4 420	1.36	/	/	是
膨胀机小齿轮级1	8 377	2.21	/	/	是

表4 瞬态响应临界转速与固有频率的对比

膨胀机轴	瞬态响应特性	固有频率/Hz	振型分析
膨胀机2级(螺母处)	4.420 kr/min (73.7 Hz)	64.307 83.504	耦合振型(膨胀机2轴占主导)
膨胀机1级(螺母处)	8.377 kr/min (139.6 Hz)	140.65 188.45	耦合振型(膨胀机1轴占主导)

的临界转频介于固有频率之间,对应为耦合振型。

根据模态叠加法,对照表4可知,膨胀机2级螺母处的频率为73.7Hz,固有特性中固有频率为64.307Hz和83.504Hz,后者对应的振型为耦合振型(膨胀机2轴占主导),说明此时由于齿轮耦合作用发生了频率的偏移,通过放大因子的计算可知隔离裕度满足API617标准系统为安全的;膨胀机1级螺母处的瞬态响应特性也同样。为了分析齿轮耦合对转子系统膨胀机子系统响应的影响,对系统各个位置进行不平衡响应分析,同时进行两种情况的对比,分别为考虑齿轮弯-扭耦合的作用与不考虑齿轮耦合的作用,如图6和图7所示。可知,对应位置的幅值和临界转速都不相同,在齿轮耦合的情况下膨胀机2级螺母处和右轴承处都出现新的临界转速,对应的幅值较原来的幅值大得多,如膨胀机2级螺母处新的临界转速(14.835 kr/min)对应的幅值为 $1.01 \times 10^{-4}$  m,为原幅值的一倍多;不考虑齿轮耦合的影响,膨胀机子系统不会出现明显的振动。产生这种情况的原因是齿轮的耦合对系统的不平衡响应影响很大,膨胀机子系统的振动分析必须考虑齿轮耦合的影响,多对齿轮耦合的转子系统必须考虑齿轮耦合的作用。

在大型齿轮转子系统中,由于齿轮间的耦合,系

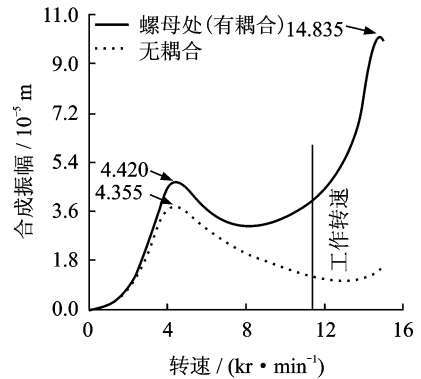


图6 膨胀机2级螺母处不平衡响应曲线

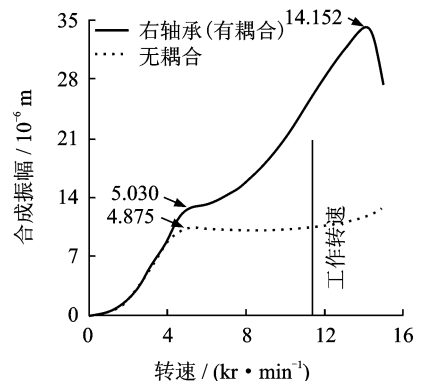


图7 膨胀机2级右轴承处不平衡响应曲线

统各轴之间的耦合振动较强烈,表现为对应的耦合振型,因此不能仅仅通过固有特性判断系统的振动最大值,须以耦合的方式分析系统的固有特性,防止在齿轮耦合作用下系统会在某个非固有频率处不平衡响应进行积累叠加,出现最大振动的现象。

## 4 结 论

1) 考虑两对齿轮啮合,建立了一个斜齿轮副三自由度啮合模型,结合膨胀机子系统,考虑了弯-扭耦合效应。建立模型过程中对啮合刚度矩阵进行了综合考虑,包括齿轮啮合刚度、方位角、啮合角、螺旋角及主动轴旋转方向5个因素。

2) 在考虑齿轮弯扭耦合与不耦合的情况下,对弯-扭耦合齿轮系统进行瞬态响应的不平衡分析,得到膨胀机子系统的响应曲线,通过与固有特性的对比得到与之对应的隔离裕度表。结果表明,膨胀机子系统是安全的,同时在系统分析时必须考虑齿轮耦合的影响。

3) 对转子系统膨胀机子系统进行不平衡响应分析,考虑齿轮耦合与不耦合两种情况,由于齿轮间的耦合,系统各轴之间的振动强烈,因此必须以耦合的方式分析系统的固有特性,防止在齿轮耦合作用下系统可能会在某个非固有频率处不平衡响应进行积累叠加,出现最大振动的现象。

## 参 考 文 献

[1] 夏伯乾,虞烈,谢友柏. DH型压缩机齿轮-轴承-转子系统动力学分析[J]. 振动工程学报, 2003, 16(2): 251-255.  
Xia Boqian, Yu Lie, Xie Youbai. Dynamic analysis of geared rotor-bearing system of DH type turbine compressor[J]. Journal of Vibration Engineering, 2003, 16(2): 251-255. (in Chinese)

[2] 庞辉,方宗德,欧卫林. 多平行轴齿轮耦合转子系统的振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2007, 26(6): 21-25.  
Pang Hui, Fang Zongde, Ou Weilin. Analysis on lateral-torsional coupling vibration characteristics of multi-parallel gear-rotor system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(6): 21-25. (in Chinese)

[3] 孙虎儿,杨兆建. 突变扭矩激励下转子系统横振响应[J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(5): 622-625.  
Sun Huer, Yang Zhaojian. Transverse vibration response of rotor system under mutational torque excitation[J]. Journal of Vibration, Measurement & Engineering, 2011, 31(5): 622-625. (in Chinese)

[4] Hiroshi L, Akiyoshi T. Coupled torsional-flexural vibration of a shaft in a geared system of rotors[J]. Bulletin of Japan Society Mechanical Engineering, 1980, 23(241): 2111-2117.

[5] Rao J S, Shiau T N, Chang J R. Theoretical analysis of lateral response due to tensional excitation of geared rotors[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(6): 961-783.

[6] 李国云,秦大同. 燃气轮机齿轮耦合转子系统动力学特性分析[J]. 中国机械工程, 2010, 21(14): 1655-1660.  
Li Guoyun, Qin Datong. Research on dynamic characteristics of gear coupling rotor system in gas turbine[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(14): 1655-1660. (in Chinese)

[7] 刘长利,谢朋儒. 基于有限元的呼吸裂纹转子动力学特性[J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(2): 185-190.  
Liu Changli, Xie Pengru. Dynamics characteristics of rotor with breathing crack using finite element method[J]. Journal of Vibration, Measurement & Engineering, 2011, 31(2): 185-190. (in Chinese)

[8] Kahraman A, Ozguven H N, Houser D R. Dynamic analysis of geared rotors by finite elements[J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(3): 507-514.

[9] Kubur M, Kahraman A, Zini D M. Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: model and experiment[J]. Transactions of the American Society Mechanical Engineering, 2004, 126: 398-406.

[10] Lee A S, Ha J W, Choi D H. Coupled lateral and torsional vibration characteristics of a speed increasing geared rotor-bearing system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 263: 725-742.

[11] Kahraman A. Dynamic analysis of multi-mesh helical gear train[J]. Journal of Mechanical Design, 1994, 116: 706-711.

[12] Cai C, Zheng H, Khan M S. Modeling of material damping properties in ANSYS[C]// 2002 CADFEM Users' Meeting & ANSYS Conference. Germany: [s. n.], 2002.



**第一作者简介:**张义民,男,1958年9月生,长江学者、特聘教授。主要研究方向为机械动力学和动态设计、转子动力学、多体系统动力学和机械可靠性分析。曾发表《具有相关失效模式的多自由度非线性随机结构振动系统的可靠性分析》(《中国科学: E 辑》2003年第33卷第9期)等论文。

E-mail: zhangymneu@sohu.com