

# 使用有效模态质量和遗传算法的有限元模型修正\*

张保强<sup>1</sup>, 陈国平<sup>1</sup>, 郭勤涛<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

(2. 南京航空航天大学机电学院 南京, 210016)

**摘要** 提出将模态频率和有效模态质量构造的残差作为遗传算法的目标函数进行结构动力学有限元模型修正的方法。有效模态质量不但可以为结构动力学响应分析提供一种判断模态贡献程度的方法,而且能够为有限元模型修正提供更多的信息量。介绍了有效模态质量的概念和基于遗传算法的结构动力学模型修正理论,在此基础上采用仿真算例验证了所提出方法的正确性和有效性。仿真结果显示,模型修正后参数最大误差为-0.062%,不管是在修正频段内还是修正频段外,频率和有效模态质量的均方误差都小于0.025%。研究表明,使用有效模态质量和遗传算法的结构动力学有限元模型修正是有效可行的。

**关键词** 结构动力学; 模型修正; 模态频率; 有效模态质量; 遗传算法

**中图分类号** O327; TH113

## 引言

在工程结构的设计中,经常出现仿真计算结果与试验得到的测量值之间存在偏差的现象;因此,需要用试验数据对仿真模型进行修正<sup>[1]</sup>。结构动力学模型修正技术的研究一直是学术界和工业界关心的热门话题<sup>[1-3]</sup>。目前,已经从传统的模型修正阶段发展到模型确认阶段<sup>[4-5]</sup>。模型修正作为模型确认中的一个关键环节<sup>[5]</sup>是研究的热点,对模型修正和模型确认的深入理解可以参考文献<sup>[6]</sup>。

结构动力学模型修正一般分为矩阵型和设计参数型两种,而后者物理意义明确,更有益于实际应用<sup>[7]</sup>。由于模态频率包含的信息较少,且获得试验的高阶模态比较困难,高频误差较大,修正参数较多时会引起修正方程的不适定性而得不到全局最优解,这时必须增加其他模态参数。以往的研究中,其他特征量的信息一般包括模态振型<sup>[8]</sup>,振型相关系数<sup>[9]</sup>和反共振频率<sup>[10-11]</sup>等,费庆国等<sup>[12]</sup>对其进行了比较。Bijaya等<sup>[13]</sup>使用模态频率加模态应变能进行修正,同时提出使用模态柔度进行损伤识别的方法<sup>[14]</sup>。杨智春等<sup>[15]</sup>对模型修正中目标函数的选取进行了总结。模型修正中除了采用传统的基于灵敏度方法以外,各种优化方法也被采用<sup>[16]</sup>,其中遗传算

法<sup>[16-19]</sup>的应用更广泛。在众多模态参数中,有效模态质量<sup>[20-21]</sup>作为一种判断振动模态重要程度的方法在结构动力学中被广泛的应用。Sedaghati等<sup>[22-23]</sup>对有效模态质量的试验识别进行了研究。在结构动力学模型修正中,有效模态质量作为模态频率特征量的有效补充同样能够提供更多的信息量而降低修正过程中的不适定性。笔者提出使用模态频率和有效模态质量残差的组合作为目标函数,采用遗传算法进行结构动力学模型修正的新方法。

## 1 有效模态质量理论

多自由度系统的无阻尼振动特征方程为

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \varphi_i = 0 \quad (1)$$

其中: $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}$ 分别为系统的刚度矩阵和质量矩阵; $\lambda_i$ 、 $\varphi_i$ 分别为系统特征方程的第*i*阶特征值和特征向量。

假设系统振型已经进行了模态质量归一化,则模态质量为

$$\hat{m}_{ii} = \varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i = 1 \quad (2)$$

定义系数向量为

$$\mathbf{L}_i = \varphi_i^T \mathbf{M} \mathbf{r} \quad (3)$$

其中: $\mathbf{r}$ 为位移变换向量,表示由于施加单位支座静位移引起的每个结构自由度的位移<sup>[21]</sup>。

系统的第*i*阶模态参与因子和有效模态质量分

\* 江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(编号:CXZZ11-0193);南京航空航天大学基本科研业务费专项科研资助项目(编号:NJ2010009)

收稿日期:2012-03-07;修改稿收到日期:2012-04-13

别定义为

$$\Gamma_i = \frac{L_i}{\varphi_i^T M \varphi_i} = \frac{\varphi_i^T M r}{\varphi_i^T M \varphi_i} = \frac{\varphi_i^T M r}{\hat{m}_{ii}} \quad (4)$$

$$m_{ei} = \frac{L_i^T L_i}{\varphi_i^T M \varphi_i} = \frac{(r^T M \varphi_i)(\varphi_i^T M r)}{\hat{m}_{ii}} \quad (5)$$

对应第  $i$  阶模态,如果取  $n$  个自由度,则模态参与因子  $\Gamma_i$  为  $1 \times n$  的向量,有效模态质量  $m_{ei}$  为  $n \times n$  的矩阵。第  $i$  阶模态的有效质量  $m_{ei}$  的独立变量只有  $n$ ,因此可以把  $m_{ei}$  当成一个向量描述。实际应用中根据模态振型的方向,选择每一阶中振型方向上的值作为该阶的有效模态质量进行模型修正。

在平动方向上,各方向所有模态的有效模态质量之和等于系统总质量;在转动方向上,有效模态质量之和等于系统总转动惯量<sup>[21]</sup>。

## 2 结构动力学模型修正理论

### 2.1 基于优化的模型修正

确定性的模型修正可以看作如下的优化问题

$$\begin{cases} \min & f(\theta) \\ \text{s. t.} & \text{VLB} \leq \theta \leq \text{VUB} \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\theta$ 为模型修正参数向量;VLB和VUB分别为修正参数的下限和上限; $f(\theta)$ 为目标函数,可以为不同特征量的残差。

笔者采用模态频率和有效模态质量的两种残差组合构造目标函数。设有限元模型的第  $i$  阶模态频率为  $\omega_{ai}$ ;试验的第  $i$  阶模态频率为  $\omega_{ei}$ ,定义前  $n$  阶模态频率的相对误差为

$$J_\omega = \sum_{i=1}^n \omega_{\omega i} \left| \frac{\omega_{ai} - \omega_{ei}}{\omega_{ei}} \right| \quad (7)$$

其中: $\omega_{\omega i}$ 为各阶模态频率的加权系数。

定义前  $k$  阶有效模态质量的相对误差为

$$J_m = \sum_{i=1}^k \omega_{mi} \left| \frac{m_{aei} - m_{e ei}}{m_{e ei}} \right| \quad (8)$$

其中: $m_{aei}$ 和 $m_{e ei}$ 分别为有限元模型和试验的第  $i$  阶有效模态质量; $\omega_{mi}$ 为各阶有效模态质量的加权系数。

构造目标函数为

$$f(\theta) = \omega_\omega J_\omega(\theta) + \omega_m J_m(\theta) \quad (9)$$

其中: $\omega_\omega$ 和 $\omega_m$ 分别为频率残差和有效模态质量残差的加权系数。

### 2.2 振型相关系数

有限元模型修正中,当采用频率为响应特征时,在迭代过程中常出现模态阶次跳动而使有限元计算

与实验之间的目标频率匹配错乱。振型相关系数(modal assurance criterion,简称MAC)即模态置信度用来解决模态匹配问题,达到模态跟踪的目的。

MAC是相关分析中的一种,它用来表示两个模型之间的模态振型相似程度,是一个介于0~1之间的标量。当MAC值为1时,代表两个振型完全相关;当值为0时,表示两个振型线性无关。本研究只采用振型相关系数进行模态匹配。

### 2.3 遗传算法的基本原理

对于式(6)的优化问题,笔者选择遗传算法寻求最优解。遗传算法是模拟生物遗传和进化过程而形成的一种自适应全局优化搜索算法,它在整个求解空间内搜索,能够获得问题的全局优化解。遗传算法将生物进化理论用于优化编码,算法简单,基本步骤如下:

1)选择。从当前种群中选出优良个体以产生新的群体。遗传算法通过选择群体中的个体进行优胜劣汰。

2)交叉。指相互配对的两个染色体按照某种方式进行信息交换得到两个新的个体,新的个体组合了父辈个体的特征。

3)变异。指对于选中的个体以一定的概率随机改变个体结构数据中的值。遗传算法通过变异提高了局部搜索能力,防止出现早熟,是遗传算法中必不可少的步骤。

本研究采用二进制编码,初试种群为50,最大进化代数数为100,代沟为0.9,采用均匀交叉,交叉概率为0.7,变异概率为0.05。

## 3 算例研究

含复杂边界的弹性梁如图1所示,梁的长度为1 m,截面宽度 $b=0.1$  m,厚度 $h=0.02$  m; $k_t, k_r$ 分别为弹性支承端的拉伸刚度和扭转刚度;集中质量 $m$ 距支承端0.4 m;材料为铝,弹性模量为 $E$ ,泊松比为0.33,密度为 $2700 \text{ kg/m}^3$ 。

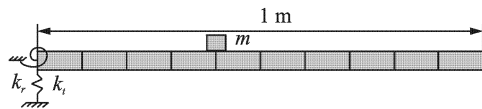


图1 复杂边界梁有限元模型

有限元建模采用通用有限元软件Nastran,有限元模型中包含10个梁单元和1个集中质量单元,弹性支承采用bush单元描述。选择有限元模型中的4个设计参数作为待修正参数,包含材料的弹性模量 $E$ 、集中质量 $m$ 和弹性支承的两个刚度参数 $k_t$ 和 $k_r$ 。

修正参数的初始值和目标值如表1所示。

表1 修正前、后参数比较

参数	初始值	目标值	初始误差/%	修正后误差/%
$E/\text{GPa}$	70.0	77.0	-9.1	-0.062
$m/\text{kg}$	5.0	6.5	-23.1	-0.038
$k_t/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$2.0\times 10^7$	$1.0\times 10^7$	100.0	0.059
$k_r/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	$5.0\times 10^7$	$2.0\times 10^7$	150.0	0.049

模型修正中,要求修正后有限元模型不但可以复现修正频段内的动态特性,还可以预示修正频段以外的有限频段的动态特性。选择前4阶模态参数作为目标进行修正,将第5阶和第6阶作为检验模态以评估修正后有限元模型的预测能力。如果只选择前4阶模态频率进行修正,即选择式(7)作为目标函数,方程(6)不存在惟一解,因此采用式(9),即模态频率和有效模态质量残差的组合作为目标函数并都取前4阶。式(7)~(9)中各项加权系数都取1。

图2为在修正过程中目标函数随迭代次数的变化情况。根据表1结果可知,参数修正后的最大误差为-0.062%。从图2可以看到,修正目标函数在迭代50步时已经收敛,最后目标函数收敛值为0.0014,验证了该方法的正确性。

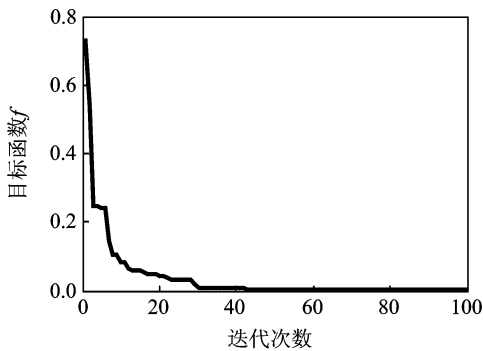


图2 目标函数收敛曲线

为了进一步说明修正后特征量的变化情况,将修正后的参数值代入有限元模型,重新计算修正前、后特征量的频率,有效模态质量误差以及MAC值,如表2~4所示。可以看出,模型修正后在修正频段内模态频率的最大相对误差为0.0304%,均方误差(RMS)从最初的33.16%降为0.0178%;有效模态质量的最大相对误差为-0.0306%,RMS从最初的13.93%降为0.0226%。在修正频段外,模态频率和有效模态质量的RMS在修正后也大大减小。不管是在修正频段内还是修正频段外,频率和有效模态质量的均方误差都小于0.025%。从表4可以看出,初始模型的MAC值基本上都在0.97以上,而修正后模型不管是在修正频段内还是修正频段外,所有

MAC值基本都为1。

表2 修正前、后模态频率及相对误差比较

阶次	初始值/Hz	目标值/Hz	初始误差/%	修正后误差/%
1	12.41	10.08	23.11	$6.45\times 10^{-3}$
2	21.07	13.10	60.90	$3.04\times 10^{-2}$
3	57.26	52.75	8.55	$-1.58\times 10^{-2}$
4	224.66	205.86	9.13	$-7.29\times 10^{-3}$
RMS			33.16	$1.78\times 10^{-2}$
5	229.05	231.64	-1.12	$-2.69\times 10^{-2}$
6	425.37	399.62	6.44	$-1.52\times 10^{-2}$
RMS			4.62	$2.19\times 10^{-2}$

表3 修正前、后有效模态质量及相对误差比较

阶次	初始值/kg	目标值/kg	初始误差/%	修正后误差/%
1	7.36	9.13	-19.41	$-3.06\times 10^{-2}$
2	8.39	9.84	-14.79	$-2.43\times 10^{-2}$
3	2.23	2.05	8.46	$8.86\times 10^{-3}$
4	1.54	1.72	-10.46	$-2.08\times 10^{-2}$
RMS			13.93	$2.26\times 10^{-2}$
5	0.19	0.19	1.49	$-1.12\times 10^{-2}$
6	0.34	0.32	4.52	$-3.42\times 10^{-3}$
RMS			3.37	$8.26\times 10^{-3}$

表4 修正前、后MAC值比较

阶次	1	2	3	4	5	6
修正前MAC	0.998	1.000	0.983	0.986	0.995	0.971
修正后MAC	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

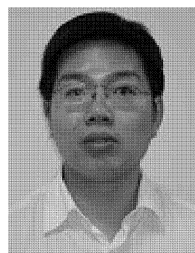
## 4 结束语

有效模态质量作为模态频率特征量的有效补充应用于结构动力学模型修正中,能有效增加试验信息量。仿真算例的结果表明,该方法具有较高的修正精度,所有修正参数都基本回到了设定的目标值。为了推动该方法的实用性,需要采用复杂结构的修正进行进一步验证,同时需要提高遗传算法的收敛速度和发展有效模态质量的试验识别技术。

## 参 考 文 献

- [1] Mottershead J E, Friswell M I. Model updating in structural dynamics: a survey[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993,167(2):347-375.
- [2] Friswell M I, Mottershead J E. Finite element model updating in structural dynamics[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1995:1-286.
- [3] 李辉,丁桦. 结构动力学模型修正方法研究进展[J]. 力学进展,2005,35(2):170-180.

- Li Hui, Ding Hua. Progress in model updating for structural dynamics [J]. Advances in Mechanics, 2005,35(2):170-180. (in Chinese)
- [4] Oberkampf W L, Trucano T G, Hirsh C. Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics[J]. Applied Mechanics Reviews, 2004,57(5):345-384.
- [5] 郭勤涛,张令弥,费庆国. 结构动力学有限元模型修正的发展——模型确认[J]. 力学进展, 2006,36(1):36-42.
- Guo Qintao, Zhang Lingmi, Fei Qingguo. From FE model updating to model validation: advances in modeling of dynamic structures[J]. Advances in Mechanics, 2006,36(1):36-42. (in Chinese)
- [6] Xiong Y, Chen W, Tsui K L, et al. A better understanding of model updating strategies in validating engineering models[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009,198(15-16):1327-1337.
- [7] Goge D. Automatic updating of large aircraft models using experimental data from ground vibration testing [J]. Aerospace Science and Technology, 2003, 7(1): 33-45.
- [8] Goge D, Link M. Results obtained by minimizing natural frequency and mode shape errors of a beam model [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003,17(1):21-27.
- [9] Thonon C, Golival J C. Results obtained by minimising natural frequency and MAC-value errors of a beam model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003,17(1):65-72.
- [10] Dambrogio W, Fregolent A. Results obtained by minimising natural frequency and antiresonance errors of a beam model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003,17(1):29-37.
- [11] Hanson D, Waters T P, Thompson D J, et al. The role of anti-resonance frequencies from operational modal analysis in finite element model updating [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007,21(1):74-97.
- [12] 费庆国,张令弥,李爱群,等. 基于不同残差的动态有限元模型修正的比较研究[J]. 振动与冲击, 2005,24(4):24-26.
- Fei Qingguo, Zhang Lingmi, Li Aiqun, et al. Evaluation of femodel updating using four kinds of residues [J]. Journal of Vibration and Shock, 2005,24(4):24-26. (in Chinese)
- [13] Bijaya J, Ren W X. Finite element model updating based on eigenvalue and strain energy residuals using multiobjective optimisation technique[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(5): 2295-2317.
- [14] Bijaya J, Ren W X. Damage detection by finite element model updating using modal flexibility residual [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006,290(1-2): 369-387.
- [15] 杨智春,王乐,李斌,等. 结构动力学有限元模型修正的目标函数及算法[J]. 应用力学学报, 2009,26(2):288-296.
- Yang Zhichun, Wang Le, Li Bin, et al. Objective functions and algorithms in structural dynamic finite element model updating[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2009,26(2):288-296. (in Chinese)
- [16] Wijker J J. Finite-element-model updating using computational intelligence techniques [M]. New York: Springer Publishing Company, 2010:49-66.
- [17] Levin R I, Lieven A J. Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1998,12(1):91-120.
- [18] 周星德,明宝华,潘瑞鸿,等. 基于遗传算法的降阶模型修正方法研究[J]. 振动、测试与诊断, 2007,27(1):25-28.
- Zhou Xingde, Ming Baohua, Pan Ruihong, et al. Research on modification of model reduction based on genetic algorithms[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2007,27(1):25-28. (in Chinese)
- [19] Tu Z, Lu Y. FE model updating using artificial boundary conditions with genetic algorithms [J]. Computers and Structures, 2008,86(7-8):714-727.
- [20] Wijker J J. Spacecraft structures [M]. New York: Springer Publishing Company, 2008:247-263.
- [21] Clough R W, Penzien J. Dynamics of structures[M]. 3rd ed. Berkeley: Computers and Structures, Inc, 1995:613-661.
- [22] Sedaghati R, Soucy Y, Etienne N. Experimental estimation of effective mass for structural dynamics and vibration applications[C]//Proceeding of the 21th International Modal Analysis Conference. Kissimmee, USA: [s. n.], 2003:1-10.
- [23] Sedaghati R, Soucy Y, Etienne N. Efficient estimation of effective mass for complex structures under base excitations[J]. Canadian Aeronautics and Space Journal, 2003,49(3):1795-1797.



**第一作者简介:**张保强,男,1981年9月生,博士研究生。主要研究方向为复杂结构动力学有限元建模、模型修正和模型确认。曾发表《结构动力学模型确认问题的核密度估计方法》(《机械工程学报》2011年第47卷第17期)等论文。  
E-mail:bqzhang@nuaa.edu.cn