基于固有振型的复杂结构分布动载荷时域识别*

姜金辉[1,2]， 张 方[1,2]， 陈 寅[1,2]
(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京，210016)
(2. 南京航空航天大学振动工程研究所 南京，210016)

摘要 基于传统的分布动载荷时域识别理论，提出了一种基于固有振型的复杂结构分布动载荷时域识别技术。传统的分布动载荷识别是基于正交多项式理论，在对非正规结构件应用时，需要进行模型坐标映射。基于固有振型的复杂结构分布动载荷识别可以避开模型坐标映射。最后经过有限元仿真实验，验证了此方法的正确性。

关键词 载荷识别；正交多项式；振型多项式；时域方法
中图分类号 TH113；O32

引 言

载荷识别属于结构动力学中的第2类逆问题[1-2]。按照载荷形式可以分为集中力识别、分布力识别以及移动载荷识别等；按照数学模型分类，可以分为频域识别和时域识别。在频域内系统的数学模型呈现输入输出关系的线性算子，而在时域内，系统的数学模型在输入输出方面为卷积关系。频域识别技术存在的主要困难是矩阵的病态和噪声影响的问题[3]，这导致识别出的载荷有很大的偏差。时域识别技术[4-6]虽然发展较晚，但因其直接给出动载荷的时间历程，在工程界的实际应用中较为直观而受欢迎。分布动载荷的时域识别技术[7]在航空方面占有重要的地位，文献[8-9]给出了基于广义正交多项式的复杂结构分布动载荷识别理论。受此识别技术启发，笔者提出基于固有振型的复杂结构分布动载荷时域识别技术。

1 基本原理

1.1 正交多项式

正交多项式是一类特殊的多项式，各个函数之间存在着一种特殊的关系，即正交性。利用这一点可以将原函数离散为多个具有正交性函数的线性组合，并具有很高的拟合精度。

数学上定义在区间[−1，1]的函数$f(x)$和$g(x)$关于权函数$\rho(x)$正交性的充分必要条件为

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$

满足式(1)的函数具有正交性。根据权函数的不同，可以分为勒让德正交多项式和切比雪夫正交多项式等。

当权函数为1、积分区间为[−1，1]时，对应的正交多项式就是勒让德正交多项式，通项表达式为

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(x^2-1)^n\} \quad (n = 2,3,\cdots) \end{cases} \tag{2}$$

正交性表现为

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{2}{2n+1} & (m = n) \end{cases} \tag{3}$$

1.2 振型多项式

振型多项式或振型力表示作用在某结构上一点处的外力，其值等于此结构在该点处的振型值(一般采用按质量归一化的振型)。以四边简支矩形板连续结构为例，其固有振型的解析式为

$$W_{mn}(x,y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{4}$$

作用在板上的某一阶分布振型力指的是一个随位置变化的力，且此分布力随位置变化的函数表达式

* 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(编号：NS2012080)；南京航空航天大学引进人才科研启动经费资助项目(编号：1001-YAH10033)
收稿日期：2011-02-22；修改稿收到日期：2012-04-25

为$W_{mn}(x,y)$。一些结构的振型虽然没有解析表达式，但也存在振型力，此振型力不能用解析表达式连续表示，只能通过有限元软件计算得到离散的振型力。

2 基于固有振型的分布动载荷时域识别技术

设薄板受到纵向的分布动载荷函数$q(x,y,t)$为x,y,t的函数，将其在振型多项式和正交多项式下展开，有

$$q(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}T_k(x,y)T_l(t) \tag{5}$$

其中：$T_k(x,y)$为模型第k阶质量归一化振型在坐标(x,y)处的值。

$T_l(t)$为第l阶勒让德正交多项式，可表示为

$$q(x,y,t)=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{kl}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{kl}\end{Bmatrix} \tag{6}$$

其中

$$T_{kl}=T_k(x,y)T_l(t)$$

模态力表达式为

$$Q_{mn}(t)=\int_0^b\int_0^a W_{mn}(x,y)q(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7}$$

将式(6)代入式(7)得

$$Q_{mn}(t)=\begin{bmatrix}\int_0^b\int_0^a W_{mn}(x,y)T_{11}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\int_0^b\int_0^a W_{mn}(x,y)T_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\vdots\\\int_0^b\int_0^a W_{mn}(x,y)T_{kl}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{kl}\end{Bmatrix} \tag{8}$$

由杜哈梅尔积分和模态解耦可知，在零初始条件下时域响应表达式为

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}(x,y)\int_0^t h(t-\tau)Q_{mn}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

记

$$\mathrm{HT}_{mnkl}^{t}=\int_0^t h(t-\tau)T_l(t)\left(\int_0^b\int_0^a W_{mn}(x,y)T_k(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

将模态力表达式代入时域响应表达式，得到

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}(x,y)\begin{bmatrix}\mathrm{HT}_{mn11}^{t}\\\mathrm{HT}_{mn12}^{t}\\\vdots\\\mathrm{HT}_{mnkl}^{t}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{kl}\end{Bmatrix} \tag{11}$$

若识别实验共布置测点w个，且每个测点的采样时间点数为s，则可以将所有点的响应表达式写在一个矩阵中，得到

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{G}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}W_{mn}(x_1,y_1)\begin{bmatrix}\mathrm{HT}_{mn11}^{t_1} & \mathrm{HT}_{mn12}^{t_1} & \cdots & \mathrm{HT}_{mnkl}^{t_1}\end{bmatrix}\\W_{mn}(x_1,y_1)\begin{bmatrix}\mathrm{HT}_{mn11}^{t_2} & \mathrm{HT}_{mn12}^{t_2} & \cdots & \mathrm{HT}_{mnkl}^{t_2}\end{bmatrix}\\\vdots\\W_{mn}(x_1,y_1)\begin{bmatrix}\mathrm{HT}_{mn11}^{t_s} & \mathrm{HT}_{mn12}^{t_s} & \cdots & \mathrm{HT}_{mnkl}^{t_s}\end{bmatrix}\\W_{mn}(x_2,y_2)\begin{bmatrix}\mathrm{HT}_{mn11}^{t_1} & \mathrm{HT}_{mn12}^{t_1} & \cdots & \mathrm{HT}_{mnkl}^{t_1}\end{bmatrix}\\\vdots\\W_{mn}(x_w,y_w)\begin{bmatrix}\mathrm{HT}_{mn11}^{t_s} & \mathrm{HT}_{mn12}^{t_s} & \cdots & \mathrm{HT}_{mnkl}^{t_s}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{w}=\{w_{11}\quad w_{12}\quad\cdots\quad w_{1s}\quad w_{21}\quad\cdots\quad w_{ws}\}^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{A}=\{a_{111}\quad a_{112}\quad\cdots\quad a_{kl}\}^{\mathrm{T}}$

当$ws=kl$时，可直接对$\boldsymbol{G}$求逆，得到识别系数

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{w} \tag{13}$$

当$ws>kl$时，对$\boldsymbol{G}$求最小二乘广义，得到识别系数

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}]^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{w} \tag{14}$$

将多项式系数$\boldsymbol{A}$代入式(5)，得到待识别载荷，在实际识别中均要求$ws\geqslant kl$。

3 标定矩阵来源

在进行时域动载荷识别时，核心步骤对标定矩阵进行求逆或者求最小二乘广义逆。在进行求逆和求最小二乘广义逆之前需要组集标定矩阵，即求取标定矩阵的每个元素。以$\boldsymbol{G}$的第1行第1列元素为例，将求和符号放入矩阵各元素内得到$\boldsymbol{G}$第1行第1列元素表达式为

$$\boldsymbol{G}^{(1,1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}(x_1,y_1)\mathrm{HT}_{mn111}^{t_1} \tag{15}$$

根据模态叠加原理可知，标定矩阵中元素$\boldsymbol{G}^{(1,1)}$的物理意义是：当作用分布的时域动载荷$q(x,y,t)$为$T_1(x,y)T_1(t)$时，通过模态叠加法计算得到薄板位于坐标(x_1,y_1)处、时间为t_1时的动响应值。如果要计算$\boldsymbol{G}^{(1,1)}$的值，只需对结构件的有限元模型上施加标定外载荷$T_1(x,y)T_1(t)$，计算时域动响应。响

应结果中，坐标为(x_1,y_1)、时间为$t=t_1$时的动响应值即为$\boldsymbol{G}^{(1,1)}$，其余$\boldsymbol{G}$的元素可以通过相同方法求得。得到标定矩阵$\boldsymbol{G}$后可根据式(13)或式(14)求解识别系数，进而识别出载荷。

4　避开模型坐标映射

以薄板为例来说明如何避开模型坐标映射。一些复杂平面结构的构件不适合、甚至是不可能直接应用传统的基于正交多项式的分布动载荷识别，因为识别前需要进行模型坐标转化，转化为标准矩形。即如果识别的薄板不是正规的矩形形状，则需要进行坐标转化，转化为矩形后再进行识别。如图 1 所示，对于不规则区域到直角坐标系的坐标映射[10]，如果采用振型力作为标定力，则不必进行模型坐标映射，因为振型力是随着模型的变化而变化，即使面形状复杂，振型力依然能够很容易地施加在模型上。

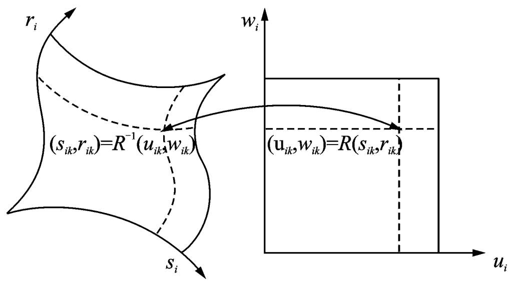


图 1　坐标映射

5　识别流程

基于固有振型的二维结构件分布动载荷时域的识别流程为：

1）对结构件施加一组待识别载荷进行测试，获取在待识别载荷作用下的实验响应数据；

2）建立实验件的有限元模型；

3）通过实验或有限元模型获取结构件的固有振型；

4）在有限元模型上施加振型力载荷进行时域分析；

5）提取时域分析结果，组集标定矩阵$\boldsymbol{G}$；

6）对标定矩阵$\boldsymbol{G}$求逆或广义逆，得到拟合系数；

7）根据拟合系数重构载荷。

6　复杂结构仿真验证

薄板的仿真算例采用一个类似机翼的薄板模型，厚度为1 cm，模型外形尺寸如图 2 所示。

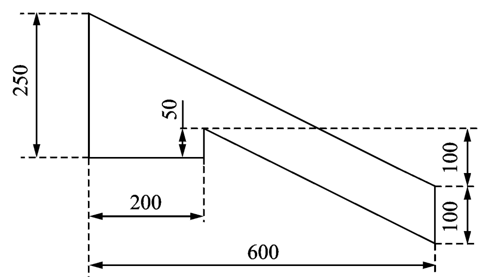


图 2　薄板模型尺寸图(单位：cm)

左端固支，施加z向激励式为

$$f(x,y,t)=10(x+y)\sin(2\pi t) \tag{16}$$

z轴为负方向，激励随时间变化为正弦函数，频率为1 Hz，仿真识别时间为2 s。

部分仿真识别结果如图 3 所示。仿真识别云图按时间排列，如图 4 所示。

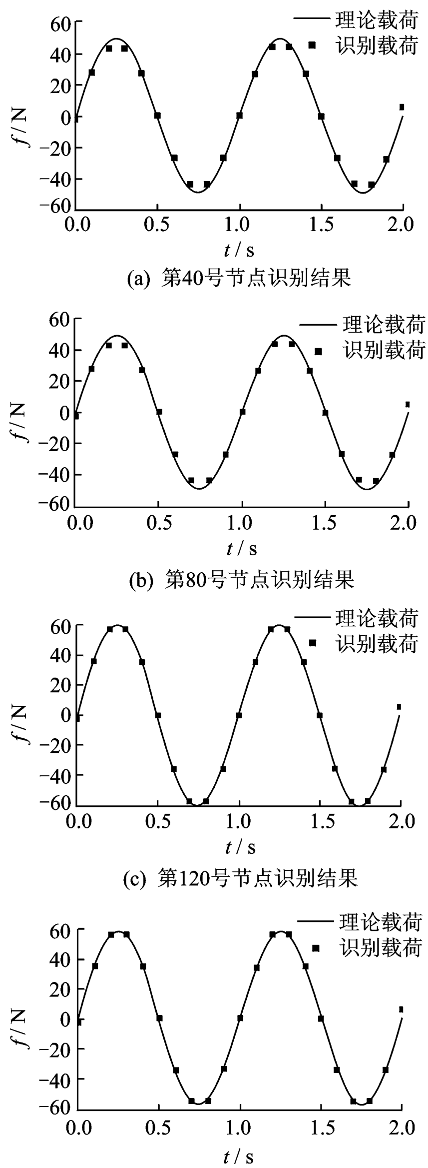
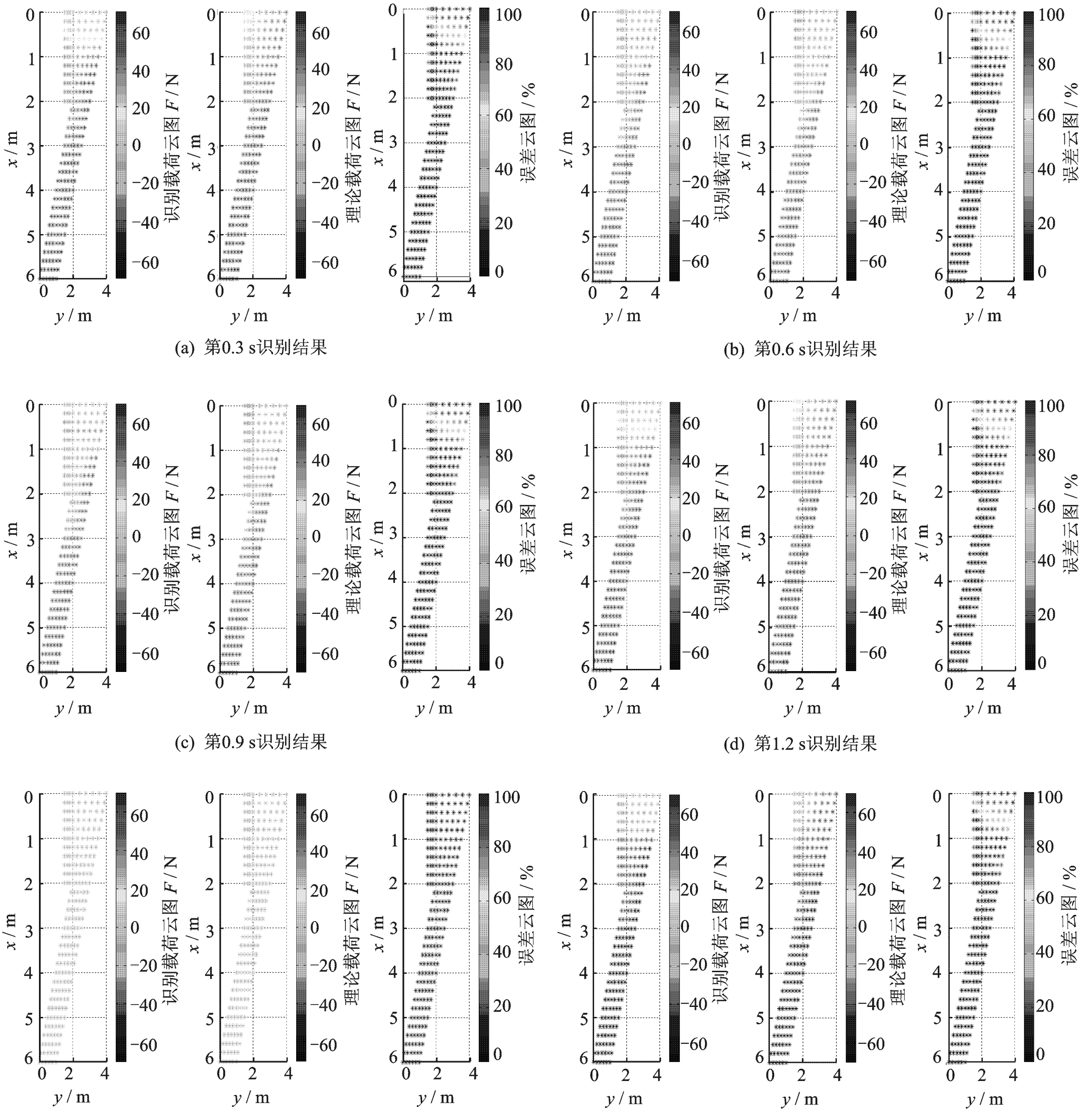


图 3　部分节点识别结果



(a) 第0.3 s识别结果 (b) 第0.6 s识别结果

(c) 第0.9 s识别结果 (d) 第1.2 s识别结果

(e) 第1.5 s识别结果 (f) 第1.8 s识别结果

图4 仿真识别云图

从仿真结果可以看出，大部分识别结果除了在固支点附近有较大误差外，其余各点的误差还是很小的，这是因为在固支附近的理论载荷非常小，接近于零，误差表达式为

$$\varepsilon = |a - \tilde{a}|/a \tag{17}$$

其中：a 为理论值；$\tilde{a}$ 为识别值。

虽然两者差很小，但是由于分母 $a \approx 0$ 造成误差很大。图4(e)中第1.5 s 识别结果就是由于这个原因造成识别误差较大。实际上，识别出的载荷与理论载荷相差很小。从图5 可以看出系数呈收敛趋势。

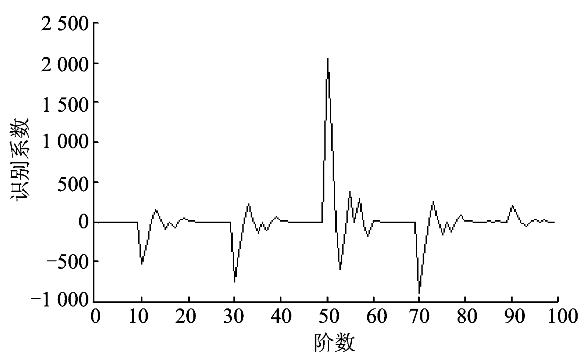


图5 系数收敛图

7　结束语

由于改进后的分布动载荷识别在组集标定矩阵时施加的标定力为振型力，并不是正交多项式载荷，因此无需进行模型坐标映射。对于某些无法进行模型坐标映射的复杂结构可以应用基于固有振型的分布动载荷识别理论，这提高了复杂结构的分布动载荷时域识别技术的应用层面。仿真实验证明了该方法切实可行，其局限性表现为必须在结构件的所有位置上施加标定力，即识别的是结构件全位置上的载荷。若实际载荷不是作用在全结构上，必定会出现较大误差。

参　考　文　献

[1] 张方，秦远田，邓吉宏. 复杂分布动载荷识别技术研究[J]. 振动工程学报，2006，19(1)：81-85.
Zhang Fang, Qin Yuantian, Deng Jihong. Research of identification technology of dynamic load distributed on the structure[J]. Journal of Vibration Engineering, 2006，19(1)：81-85. (in Chinese)

[2] Tadeusz U. The inverse identification problem and its technical application[J]. Archive of Applied Mechanics, 2007，77：325-333.

[3] 徐梅，张方. 分布动态载荷识别的抗噪处理[J]. 振动、测试与诊断，2009，29(4)：470-481.
Xu Mei, Zhang Fang. Anti-noise study on distributed dynamic load identification[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2009，29(4)：470-481. (in Chinese)

[4] 张方，朱德懋. 动态载荷时域识别的级数方法[J]. 振动工程学报，1996，9(1)：1-8.
Zhang Fang, Zhu Demao. Identification of dynamic load based on series expansion[J]. Journal of Vibration Engineering 1996，9(1)：1-8. (in Chinese)

[5] Zhu J, Lu Z. A time domain method for identifying dynamic loads on continuous systems[J]. Journal of Sound and Vibration 1991，148：137-46.

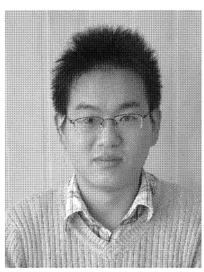
[6] Doyle J F. Reconstructing dynamic events from time limited spatially distributed data[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53:2721-2734.

[7] Pezerat C, Guyader J L. Force analysis technique：reconstruction of force distribution on plates[J]. Acustica United with Acta Acustica, 2000，86：322-332.

[8] 秦远田，张方. 具有连续分布梁模型动载荷的识别技术研究[J]. 振动与冲击，2005，24(2)：126-133.
Qin Yuantian, Zhang Fang. Identification of distributed load on continuous model[J]. Journal of Vibration and Shock, 2005, 24 (2)：126-133. (in Chinese)

[9] 张方，朱德懋. 基于广义正交域的一种动载荷识别方法研究[J]. 南京航空航天大学学报，1996，9(1)：1-8.
Zhang Fang, Zhu Demao. A new theoretical study of dynamic load identification based on generalized polynomial expansion[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 1996，9(1)：1-8. (in Chinese)

[10] 姜金辉，张方，陈国平. 盒状件分布动载荷频域识别方法[J]. 力学季刊，2008，29(2)：272-277.
Jiang Jinhui, Zhang Fang, Chen Guoping. Identification of distributed dynamic load on box-structure in frequency domain[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2008，29(2)：272-277. (in Chinese)



第一作者简介：姜金辉，男，1981 年 4 月生，博士、讲师。主要研究方向为动载荷识别、振动测试与数据处理。曾发表《多点平稳随机载荷识别方法研究》(《振动工程学报》2009 第 22 卷第 2 期)等论文。
E-mail：jiangjinhui@nuaa.edu.cn