

超长斜拉索张力振动测量的传递矩阵法*

刘志军, 芮筱亭, 展志焕, 冯宾宾, 王国平

(南京理工大学发射动力学研究所 南京, 210094)

摘要 振动法测量拉索张力需要准确描述索力与自振频率的关系,为反映超长斜拉索的真实构形及垂度效应,满足超大跨斜拉桥对测试精度的要求,考虑超长斜拉索垂度、倾角、自重及切向张力沿拉索变化的影响,在静力分析推导出斜拉索静态构形的悬链线方程基础上建立超长斜拉索振动的离散模型,应用多体系统传递矩阵法计算拉索固有频率,通过求解特征方程建立索力与振动频率的关系,提高了超长斜拉索张力的振动测量精度,完善了索力振动测量方法。通过对实际工程的测试结果分析表明,该方法具有准确、实用和易编程的特点,完全能满足工程应用要求。

关键词 传递矩阵法; 超长斜拉索; 索力; 固有频率

中图分类号 U448.27

引言

斜拉索是斜拉桥的重要承载构件,负载着结构的绝大部分载荷,斜拉索张力的大小直接影响斜拉桥结构稳定的效果。为了分析斜拉桥结构的内力分布和调整其应力分布状况,保证斜拉桥的线型和减小其主梁梁体的应力,可以通过调整索力来改变结构的受力状态。调整索力首先需要准确地测量斜拉索张力;因此,斜拉索张力测试的准确与否直接关系到斜拉桥施工控制的顺利进行和斜拉桥建成投入使用后的安全运营。利用放在索中的小型电磁传感器测定磁通量变化可检测索力,但因成本高、仪器标定过程繁琐和需温度补偿而使其应用受到限制^[1]。从测得的固有频率估算拉索张力的振动法因其简单、快速而在拉索张力的测量中常常被采用,特别是斜拉桥建成投入使用后的索力复测,振动法几乎成了惟一的选择^[2-6]。在大江、大河及海湾地区建造桥梁,由于通航和基础水深的限制,对扩展跨径的要求一直在持续。苏通长江大桥主跨已达到1.088 km,文献^[7]通过风洞测量试验研究了该桥超长斜拉索风阻系数。Zui基于拉索几何形状的抛物线假设提出了索力求解的实用公式,但其公式以分段的形式给出^[8]。文献^[9]基于静态拉索的抛物线方程和非线性

振动理论,通过单模态振动分析结果确定拉索高阶振动频率阶数,由修正后的基频来进行索力计算。文献^[10]结合有限元分析分别采用弦振动理论公式和Zui公式^[8]等4种索力计算公式对苏通大桥两根拉索索力识别进行研究。斜拉索往往要经过多次张拉后索力才达到成桥设计值,特别是初张拉的斜拉索,索力值较小而垂度影响较大。随着斜拉桥跨径的增大,斜拉桥最上面的拉索越来越长,斜拉索长度的增加导致斜拉索垂度非线性影响增大,此时用忽略高次项影响的抛物线理论会带来一定的误差,学者建议超大跨斜拉桥拉索设计分析采用基于悬链线理论的分析方法^[11-13]。

振动法测量索力往往假定切向张力沿拉索保持不变^[2-6,8-10],实际上由于垂度的影响切向张力沿拉索会发生变化。为精确反映超长斜拉索的真实构形及垂度效应,满足超大跨斜拉桥对测试精度的要求,笔者考虑超长斜拉索垂度、倾角、自重及切向张力沿拉索变化的影响,通过静力分析得到斜拉索静态构形的悬链线方程,在建立超长斜拉索振动的离散模型基础上应用多体系统传递矩阵法得到元件的传递方程及系统总传递方程,通过特征方程求解得到拉索固有频率及其变化规律^[14],确定了拉索张力与其固有频率之间的关系,提高了超长斜拉索张力的振动测量精度,结合具体工程实例进行了讨论分析。

* 江苏省自然科学基金攀登计划资助项目(编号:BK2008046);国家自然科学基金资助项目(编号:10902051)
收稿日期:2010-12-27;修改稿收到日期:2011-03-15

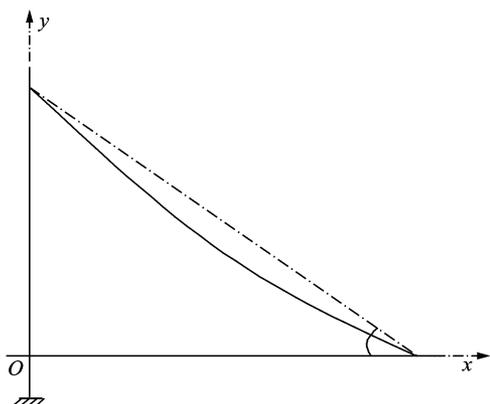
1 静态构形

图1(a)为超长斜拉索模型及其坐标系。假设拉索等截面且材料匀质,忽略超长斜拉索抗弯刚度影响^[15-17],取斜拉索微元体进行分析,微元体受力如图1(b)所示,超长斜拉索在张紧状态下的静力平衡方程为

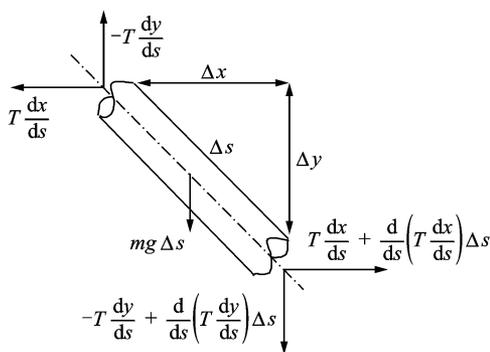
$$T \frac{dx}{ds} = T \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) \Delta s \quad (1)$$

$$T \frac{dy}{ds} = -mg\Delta s + T \frac{dy}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) \Delta s \quad (2)$$

其中: T 为超长斜拉索的切向拉力; m 为拉索单位长度质量; g 为重力加速度; s 为弧长坐标; α 为超长斜拉索倾角。



(a) 超长斜拉索静态构形示意图



(b) 超长斜拉索的计算力学模型

图1 超长斜拉索的计算力学模型

令 $H_t = T \frac{dx}{ds}$, 由式(1)可知 H_t 为常数, 即超长斜拉索切向拉力 T 的水平方向分量处处相等, 代入式(2)得

$$H_t \frac{d^2y}{dx^2} = mg \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (3)$$

式(3)的通解为

$$y(x) = \frac{H_t}{mg} \cosh \left(\frac{mgx}{H_t} + C_1 \right) + C_2 \quad (4)$$

斜拉索两端的边界条件为

$$y(0) = L \sin \alpha \quad (5)$$

$$y(L \cos \alpha) = 0 \quad (6)$$

其中: L 为斜拉索两端弦长。

由式(5)有

$$C_2 = L \sin \alpha - \frac{H_t}{mg} \cosh(C_1) \quad (7)$$

令 $\gamma = \frac{mgL \cos \alpha}{2H_t}$, 则由式(6)和式(7)得到

$$\cosh(2\gamma + C_1) - \cosh(C_1) = -2\gamma \tan \alpha \quad (8)$$

化简式(8)得到

$$\sinh(\gamma) \sinh(\gamma + C_1) = -\gamma \tan \alpha \quad (9)$$

即

$$C_1 = -\gamma + \sinh^{-1} \left(\frac{-\gamma \tan \alpha}{\sinh(\gamma)} \right) \quad (10)$$

根据式(4)、式(7)和式(10)可得到斜拉索静力悬链线解。

2 斜拉索振动分析的传递矩阵法

图2为一段弦长为 L 、两端固定的拉索横向振动系统。为推导制约此段拉索振动的运动方程,将此连续系统视为相应的离散系统自由度无限增加时的极限。

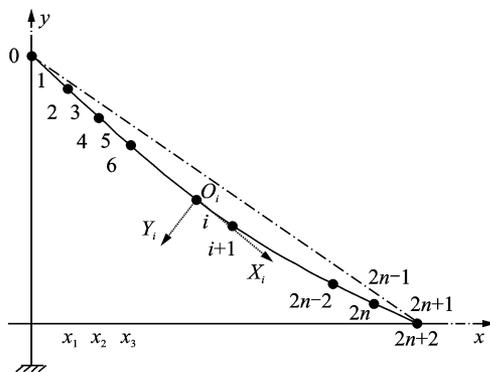


图2 斜拉索离散模型

首先,沿斜拉索静态构形曲线将拉索的质量集中成为 $n+2$ 个质点,假设它们等距均布在斜拉索的水平方向上,即有 $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ (x_i 为质点坐标, $i = 0, 1, \dots, n$), 且这些质点由没有质量、只有张力的弦连接起来。假设拉索做微幅振动,即有各段弦与元件坐标系 x 轴的交角 θ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 很小, 因而有 $\sin \theta_i \approx \tan \theta_i$ 。如图2所示建立整体惯性直角坐标系,系统中无质量弦为较元件,质点为体元件,由 $n+2$

个集中质量和 $n+1$ 个无质量弦组成简单链式离散系统,系统的元件个数为 $2n+3$,各元件只在横向振动,左端为系统输入端,右端为系统输出端,从左至右为传递方向,依次对元件编号,输入端边界编号为 0,输出端边界编号为 $2n+2$ 。假设 P_{ij} 表示连接点,其中第 1 个下标 i 为体元件的序号,第 2 个下标 j 为铰元件的序号。定义状态矢量 $\mathbf{Z}_{0,1}, \mathbf{Z}_{2,1}, \mathbf{Z}_{2,3}, \mathbf{Z}_{4,3}, \dots, \mathbf{Z}_{2n,2n-1}, \mathbf{Z}_{2n,2n+1}$ 和 $\mathbf{Z}_{2n+2,2n+1}$ 的形式均为 $\mathbf{Z}=[Y, \Theta]^T$ 。

2.1 坐标变换矩阵

图 2 所示为无质量弦 i 和质点 $i+1$ 建立元件模态坐标系 $O_i x_i y_i$,相应物理坐标系为 $O_i x_i y_i$,设 $O_i x_i$ 轴与整体坐标系 Ox 轴夹角为 β_i ,则有

$$\tan \beta_i = \frac{y\left(\frac{i+1}{2}\Delta x\right) - y\left(\frac{i-1}{2}\Delta x\right)}{\Delta x} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, 2n+1) \quad (11)$$

图 2 中所建立的各个元件坐标系 $O_i x_i y_i (i=1, 3, 5, \dots, 2n+1)$ 的方位不相同,元件坐标系 $O_i x_i y_i$ 与 $O_{i+2} x_{i+2} y_{i+2}$ 相邻且它们之间的夹角为 $\varphi_{i+2} (i=1, 3, 5, \dots, 2n-1)$,如图 3 所示。

$$\varphi_{i+2} = \beta_{i+2} - \beta_i \quad (12)$$

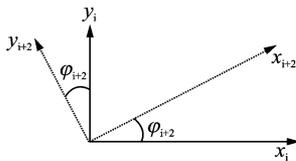


图 3 坐标变换

$\mathbf{Z}_{i+1,i+2}$ 为定义在坐标系 $O_{i+2} x_{i+2} y_{i+2}$ 中系统状态矢量, $\mathbf{Z}_{O_i,i+1}$ 为定义在坐标系 $O_i x_i y_i$ 中描述质点 $i+1$ 输出点的状态矢量, $\mathbf{Z}_{i+1,i+2}$ 与 $\mathbf{Z}_{O_i,i+1}$ 为同一个状态矢量在两个不同坐标系中的表示,因此有

$$\mathbf{Z}_{i+1,i+2} = \mathbf{H}_{\varphi_{i+2}} \mathbf{Z}_{O_i,i+1} \quad (13)$$

其中: $\mathbf{H}_{\varphi_{i+2}}$ 为与两个坐标系之间的夹角 φ_{i+2} 对应的坐标变换矩阵,即

$$\mathbf{H}_{\varphi_{i+2}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{i+2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1) \quad (14)$$

2.2 无质量弦的传递矩阵

无质量弦的传递矩阵是表示其左、右侧面的状态矢量传递关系的传递矩阵。元件坐标系 $O_i x_i y_i$ 下铰元件无质量弦 i 的受力如图 4 所示。

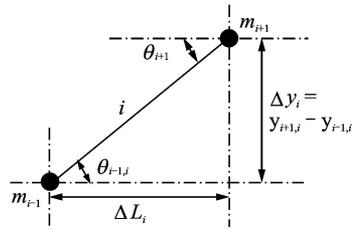


图 4 无质量弦受力图

图 4 中横向振动系统中的无质量弦 i 在输入点和输出点与 x_i 轴的夹角相等,即

$$\theta_{i-1,i} = \theta_{i+1,i} \quad (15)$$

由于索作微幅振动而无质量弦 i 与 x_i 轴的夹角很小,因此

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta L_i} = \frac{y_{i+1,i} - y_{i-1,i}}{\Delta L_i} = \tan \theta_{i-1,i} \approx \theta_{i-1,i} \quad (16)$$

其中: $\Delta L_i = \frac{\Delta x}{\cos \beta_i}$,为无质量弦 i 的长度。

对简谐振动无质量弦有传递方程

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Theta \end{bmatrix}_{i+1,i} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta L_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Theta \end{bmatrix}_{i-1,i} \quad (17)$$

即

$$\mathbf{Z}_{i+1,i} = \mathbf{U}_i \mathbf{Z}_{i-1,i} \quad (18)$$

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} 1 & \Delta L_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, 2n+1) \quad (19)$$

2.3 质点的传递矩阵

质点的传递矩阵表示该点的左、右侧面的状态矢量传递关系的传递矩阵。元件坐标系 $O_i x_i y_i$ 下体元件质点 $i+1$ 的受力如图 5 所示。

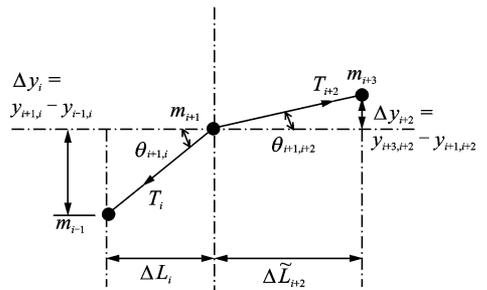


图 5 质点 $i+1$ 受力图

图 5 所示横向振动系统中的集中质量 m_{i+1} 的左侧和右侧位移相等,即

$$y_{i+1,i} = y_{i+1,i+2} \quad (20)$$

由 Newton 定律得

$$m_{i+1}\ddot{y}_{i+1,i} = T_{i+2}\sin\theta_{i+1,i+2} - T_i\sin\theta_{i+1,i} \quad (21)$$

对简谐振动集中质量 m_{i+1} 有传递方程

$$\begin{bmatrix} Y \\ \Theta \end{bmatrix}_{i+1,i+2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{m_{i+1}\omega^2}{T_{i+2}} & \frac{T_i}{T_{i+2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Theta \end{bmatrix}_{i+1,i} \quad (22)$$

即

$$\mathbf{Z}_{i+1,i+2} = \mathbf{U}_{i+1}\mathbf{Z}_{i+1,i} \quad (23)$$

$$\text{由式(1)和式(11)有 } T_{i+2} = \frac{H_t}{\cos\beta_{i+2}}, T_i = \frac{H_t}{\cos\beta_i},$$

代入式(22)得到质点 $i+1$ 的传递矩阵为

$$\mathbf{U}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{m_{i+1}\omega^2}{H_t}\cos\beta_{i+2} & \frac{\cos\beta_{i+2}}{\cos\beta_i} \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中: $m_{i+1} = m(\Delta L_i + \Delta L_{i+2})/2$, 为质点 $i+1$ 的质量。

2.4 特征方程

元件的传递方程为

$$\begin{cases} Z_{2,1} = U_1 Z_{0,1} \\ Z_{4,3} = U_3 Z_{2,3} \\ \vdots \\ Z_{2n+2,2n+1} = U_{2n+1} Z_{2n,2n+1} \end{cases} \quad (25a)$$

$$\begin{cases} Z_{2,3} = H_{\phi_3} U_2 Z_{2,1} \\ Z_{4,5} = H_{\phi_5} U_4 Z_{4,3} \\ \vdots \\ Z_{2n,2n+1} = H_{\phi_{2n+1}} U_{2n} Z_{2n,2n-1} \end{cases} \quad (25b)$$

系统总传递方程为

$$Z_{2n+2,2n+1} = U_{2n+1} H_{\phi_{2n+1}} U_{2n} \cdots H_{\phi_3} U_2 U_1 Z_{0,1} = \mathbf{U}\mathbf{Z}_{0,1} \quad (26)$$

将边界条件

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{0,1} = [0, \Theta]_{0,1}^T \\ \mathbf{Z}_{2n+2,2n+1} = [0, \Theta]_{2n+2,2n+1}^T \end{cases} \quad (27)$$

代入式(26)得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Theta \end{bmatrix}_{2n+2,2n+1} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta \end{bmatrix}_{0,1} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta \end{bmatrix}_{0,1} \quad (28)$$

得到特征方程为

$$u_{12} = 0 \quad (29)$$

求解式(29)可得到系统 n 个固有频率 ω_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$)。对每一个 ω_k , 取 $\Theta_{0,1} = 1$, 求解各个元件传递方程可得系统的全部状态矢量, 进而可得到系统振型为

$$[X_{2,1}^k, X_{4,3}^k, X_{6,5}^k, X_{8,7}^k, \dots, X_{2n,2n-1}^k, X_{2n+2,2n+1}^k] \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad (30)$$

3 斜拉索张力振动测量

拉索张力振动测量一般是将加速度传感器固定在拉索上并拾取拉索在环境随机激励或人工激励下的振动信号, 经过滤波、放大、模数转换和谱分析, 根据频谱图来确定拉索的自振频率, 然后由拉索自振频率与索力的关系来确定其张力, 它属于间接测量拉索张力的方法。

由式(29)可知, 特征方程求解得到的拉索自振频率与张力是对应的, 即已知拉索张力大小, 可以计算出对应的拉索各阶自振频率, 反过来, 若已知拉索若干阶自振频率, 也可以确定拉索张力大小。首先计算出实测结果频谱图中相邻两谱振峰之间频率差 $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$, 采用高阶频率多阶差平均的办法^[5-6]估计基频 \hat{f}_1 , 然后应用传递矩阵法对拉索进行振动分析, 求解特征方程(29)得到拉索在桥面端初始计算张力估计值 \hat{T}_0 下的固有频率及其变化规律, 依此确定拉索振动信号频谱图中各峰值对应的自振频率阶数。将计算得到的模态频率与测试得到的模态频率比较, 当两者相差较大时, 按一定比例(1%~10%)增大或减小拉索计算张力值, 重新应用传递矩阵法进行拉索振动分析, 求解特征方程(29)得到拉索的自振频率, 直到计算得到的频率与测试得到的频率值相差最小时为止, 此时即可确定斜拉索桥面端实际切向张力值 T_0 。

4 实例分析

武汉白沙洲长江大桥正桥全长为 1.078 km, 主跨为 618 m, 为双塔双索面钢箱梁斜拉桥; 主塔两侧各有 24 对斜拉索, 全桥共有 192 根斜拉索, 其中边跨上游 C₂₀ 号索的主要参数为: 索长 $l = 284.7886$ m, 弹性模量 $E = 1.95 \times 10^5$ MPa, 横截面积 $A = 6.273 \times 10^{-3}$ m², 单位长度拉索质量 $m = 51.8$ kg/m, 索的倾斜角度 $\alpha = 27.0639^\circ$ 。该索在大桥边跨合拢后实测所得的振动信号频谱分析结果如表 1 所示^[6]。由于 C₂₀ 斜拉索较长且传感器安装在其桥面端附近, 因此只得到了斜拉索较高的 10 阶自振频率。由表 1 采用高阶频率多阶差平均的办法计算得基频 $\hat{f}_1 = 0.32778$ Hz。本研究方法的索力计算结果和文献^[6]比较如表 2 所示, 索力沿索长变化如图 6 所示, 可以看出使用本研究方法能够计算切向张力沿拉索的变化, 确定的拉索张力值接近真实情况。

表1 斜拉索实测频率

f_n/Hz	$\Delta f_n/\text{Hz}$	频率阶数 n	f_n/n
3.900		12	0.325 0
4.200	0.300	13	0.323 1
4.550	0.350	14	0.325 0
4.850	0.300	15	0.323 3
5.200	0.350	16	0.325 0
5.550	0.350	17	0.326 5
5.850	0.300	18	0.325 0
6.200	0.350	19	0.326 3
6.500	0.300	20	0.325 0
6.850	0.350	21	0.326 2

表2 索力计算值的比较 kN

本研究方法	本研究方法	文献[6]弦	实际弦向
桥塔端切向索力	桥面端切向索力	向结果	索力
1 840.0	1 774.2	1 745.15	1 755

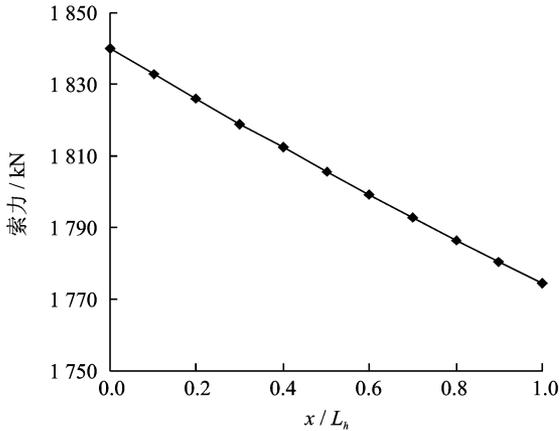


图6 索力沿索长变化

5 结论

1) 由于超长斜拉索垂度的影响,拉索切向张力沿索发生变化,桥塔端索力大于桥面端索力,本研究能够计算超长斜拉索各处切向张力值,计算结果更符合工程实际情况。

2) 应用传递矩阵法对拉索进行振动分析涉及的系统矩阵阶次不取决于系统的自由度数,仅取决于元件的最高矩阵阶次,矩阵阶次比有限元等方法矩阵阶次低得多,所以计算量小,计算速度快。

3) 传递矩阵法具有结构矩阵分析的优点,易于被工程技术人员接受,可直接调用已推导元件的传递矩阵,建模灵活,程式化程度高,便于实际应用。

4) 由于悬链线方程较抛物线方程更精确地反映了斜拉索真实构形,因此本研究能够提高超长斜拉索张力的振动测量精度,满足超大跨斜拉桥

对测试精度高的要求。

5) 通过对实际工程的测试结果分析表明,超长斜拉索张力振动测量的传递矩阵法计算过程考虑了超长斜拉索垂度的影响,具有准确、实用和易编程的特点,完全能满足工程应用要求。

参 考 文 献

- [1] 宋杰,陈鲁,张其林,等. 磁通量法在预应力悬挂结构拉索施工中的应用[J]. 振动、测试与诊断, 2009, 29(1): 86-91.
Song Jie, Chen Lu, Zhang Qilin, et al. Application of magneto-elastic method to tension measurement of prestressed cables in suspended structure[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2009, 29(1): 86-91. (in Chinese)
- [2] Russell J C, Lardner T J. Experimental determination of frequencies and tension for elastic cables [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1998, 124:1067-1072.
- [3] Cunha A, Caetano E, Delgado R. Dynamic test on large cable-stayed bridge [J]. Journal of Bridge Engineering, ASCE, 2001, 6(1):54-62.
- [4] 张开银, 向木生. 钢丝绳拉力测量过程中应注意的问题[J]. 振动、测试与诊断, 1999, 19(1): 20-25.
Zhang Kaiyin, Xiang Musheng. Dynamic measurement of the tension in a cable[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1999, 19(1): 20-25. (in Chinese)
- [5] 刘志军, 陈国平, 党志杰. 检测斜拉索张力的振动法及其应用[J]. 南京航空航天大学学报, 2006, 38(5): 609-612.
Liu Zhijun, Chen Guoping, Dang Zhijie. Vibration method for measurement of cable tension[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2006, 38(5):609-612. (in Chinese)
- [6] 刘志军, 陈国平, 钟继卫. 有限差分法在斜拉索张力振动测试识别中的应用[J]. 应用基础与工程科学学报, 2007, 15(1): 104-110.
Liu Zhijun, Chen Guoping, Zhong Jiwei. Application of finite difference method in measurement of cable tension by vibration method [J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2007, 15(1): 104-110. (in Chinese)
- [7] 李文勃, 林志兴, 杨立波. 超长斜拉索风阻系数及风雨激振的试验研究[J]. 振动、测试与诊断, 2005, 25(2): 85-90.

- Li Wenbo, Lin Zhixing, Yang Libo. Investigation on drag coefficients and rain-wind induced vibration of extremely long stay cables in wind tunnel[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2005, 25(2): 85-90. (in Chinese)
- [8] Zui H, Shinke T, Namita Y. Practical formulas for estimation of cable tension by vibration method[J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(6):651-656.
- [9] 刘志军, 陈国平, 张方, 等. 超长斜拉索张力振动法测量研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(1): 111-114.
Liu Zhijun, Chen Guoping, Zhang Fang, et al. Study on measurement of super long stayed cable tension using vibration method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(1): 111-114. (in Chinese)
- [10] 刘勇, 刘剑锋. 基于振动特性的超长拉索索力测定研究[J]. 结构工程师, 2009, 25(6):117-122.
Liu Yong, Liu Jianfeng. Vibration-based tension identification of ultra long stay cables[J]. Structural Engineers, 2009, 25(6):117-122. (in Chinese)
- [11] 孟庆成, 齐欣, 李乔, 等. 千米级斜拉桥斜拉索相关参数计算方法[J]. 桥梁建设, 2009(2): 58-60.
Meng Qingcheng, Qi Xin, Li Qiao, et al. Algorithm for relevant parameters of stay cables of cable-stayed bridge with span length of 1000-m scale[J]. Bridge Construction, 2009(2): 58-60. (in Chinese)
- [12] 杨佑发, 白文轩, 郜建人. 悬链线解答在斜拉索数值分析中的应用[J]. 重庆建筑大学学报, 2007, 29(6): 31-34.
Yang Youfa, Bai Wenxuan, Gao Jianren. Application of catenary solution in numerical analysis of stayed cable[J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2007, 29(6): 31-34. (in Chinese)
- [13] 梁鹏, 徐岳, 刘永健. 斜拉索分析统一理论及其应用[J]. 建筑科学与工程学报, 2006, 23(1): 68-77.
Liang Peng, Xu Yue, Liu Yongjian. Unified analysis theory of cable stay and its applications[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006, 23(1): 68-77. (in Chinese)
- [14] 芮筱亭, 来峰, 陆毓琪, 等. 多体系统传递矩阵法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 7-13.
- [15] 刘志军, 陈国平. 斜拉索在平面内的非线性固有振动特性分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(1): 65-70.
Liu Zhijun, Chen Guoping. Nonlinearly natural vibration characteristic analysis of inclined cable in plane [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2007, 39(1): 65-70. (in Chinese)
- [16] 刘志军, 陈国平. 考虑抗弯刚度影响的斜拉索面内非线性自由振动分析[J]. 振动工程学报, 2007, 20(1): 57-60.
Liu Zhijun, Chen Guoping. Planar non-linear free vibration analysis of stay cable considering the effects of flexural rigidity [J]. Journal of Vibration Engineering, 2007, 20(1): 57-60. (in Chinese)
- [17] 姜健, 李国强, 郝坤超. 拉索平面内自由振动影响因素分析[J]. 振动、测试与诊断, 2009, 29(3): 308-312.
Jiang Jian, Li Guoqiang, Hao Kunchao. Analysis of influencing factors on free in-plane vibration of tensile cable [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2009, 29(3): 308-312. (in Chinese)



第一作者简介:刘志军,男,1976年4月生,副教授。主要研究方向为结构动态测试与分析。曾发表《检测斜拉索张力的振动法及其应用》(《南京航空航天大学学报:自然科学版》2006年第38卷第5期)等论文。

E-mail: uliuzj@163.com