

# 橡胶钢丝绳复合隔振器动力学建模与参数识别\*

唐 斌<sup>1</sup>, 安西方<sup>1</sup>, 何 鑫<sup>2</sup>, 金玉奇<sup>2</sup>, 王 正<sup>1</sup>, 宋希庚<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学内燃机研究所 大连, 116024)

(2. 中国科学院大连化学物理研究所, 中国科学院化学激光重点实验室 大连, 116023)

**摘要** 在电动试验台隔振试验研究的基础上,对橡胶钢丝绳复合隔振器进行了参数识别和动态建模。通过试验测得频响曲线的Hilbert变换,检测了复合隔振器的非线性度。建立复合隔振器的非线性动力学模型,应用分离识别法将非线性动力学方程组转化为关于未知参数的线性方程组,应用最小二乘法对隔振器的刚度和阻尼参数进行了识别。通过数值方法和谐波平衡法分析了识别系统的动态特性,计算与试验结果有较好的一致性。

**关键词** 橡胶钢丝绳复合隔振器; Hilbert变换; 动力学模型; 非线性; 参数识别

**中图分类号** TB535+.1; O328

## 1 问题的提出

隔振是一种通过振源与隔振体之间的隔振器进行振动控制的技术,可以利用隔振器削弱各种有害振动的传播<sup>[1-2]</sup>。笔者研究的橡胶钢丝绳复合隔振器是一种既能抑制高、低频振动,具有较宽隔振频域和较大承载能力,并能有效改善共振区隔振效果的隔振器<sup>[3]</sup>。该橡胶钢丝绳复合隔振器由鼓型钢丝绳隔振器和硫化橡胶组成。选取邵氏硬度为60(A)的天然橡胶,加工成尺寸为 $\phi 25\text{ mm} \times 25\text{ mm}$ 的试件,直接硫化在鼓型钢丝绳隔振器的上、下夹板上,其结构如图1所示。

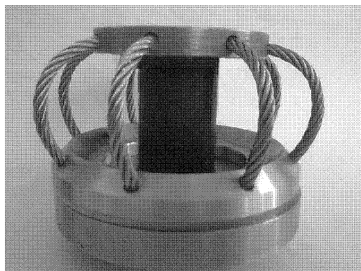


图1 橡胶钢丝绳复合隔振器

笔者在橡胶钢丝绳复合隔振器动态特性试验的基础上,采用Hilbert变换对复合隔振器的非线性进行检验,使用最小二乘法对系统的刚度和阻尼参数

进行识别,建立复合隔振器的动力学模型,通过数值和理论方法研究其隔振特性,并与试验结果进行比较。

## 2 试验台架及测试系统

测试系统如图2所示,主要包括B&K TV50101型号电动振动台、B&K 4368加速度传感器、LANCER LC0501压电石英力传感器和B&K 2635型电荷放大器等。试验时将隔振器利用夹具固定在激振仪上,通过滑动导向装置保证质量块只在垂直方向上产生位移<sup>[3-5]</sup>。

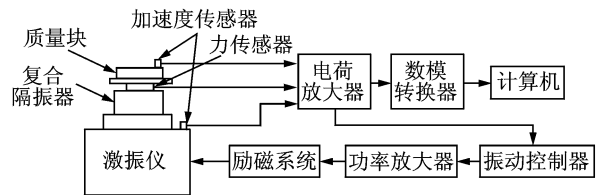


图2 振动测试系统

隔振器的动态特性试验在室温下进行,配重质量块为4.0 kg,采用正弦波位移激励法,激振频率为30 Hz。在不同激励振幅的条件下测得的迟滞回线如图3所示,图中各迟滞回线对应的激励振幅从内到外依次为0.25 mm,0.5 mm,0.75 mm,1.0 mm和1.25 mm。

\* 中国科学院化学激光重点实验室开放课题资助项目(编号:KLCL-2012-101);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(编号:DUT12JN12)

收稿日期:2011-12-10;修改稿收到日期:2012-03-02

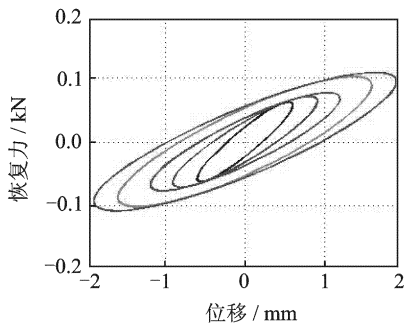


图3 激励频率为30 Hz时,不同激励振幅下的迟滞回线

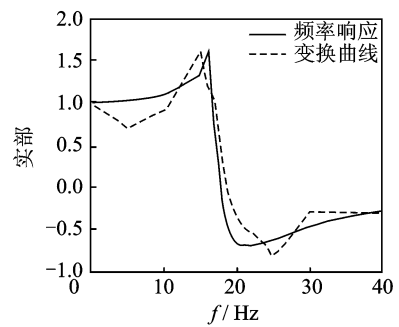


图4 实部变换曲线

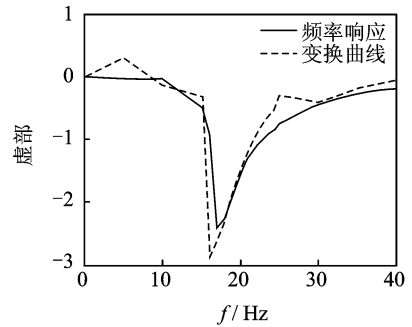


图5 虚部变换曲线

### 3 非线性检测与动力学建模

#### 3.1 复合隔振器的非线性检测

Hilbert 变换是一种在频域或时域中实部和虚部两者之间的变换关系,可以通过 Hilbert 变换来检测复合隔振器的非线性动力学特性<sup>[6]</sup>。令待测结构的频响函数为  $G(\omega)$ ,对  $G(\omega)$  做 Hilbert 变换

$$H(\omega) = H[G(\omega)] \quad (1)$$

比较  $H(\omega)$  与  $G(\omega)$ ,若系统为线性系统,则  $H(\omega) = G(\omega)$ ,当系统中含有非线性因素时  $H(\omega) \neq G(\omega)$ 。

由于实测的  $G(\omega)$  中  $\omega$  均为正值且为离散的点,即只在  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n (\omega_n > 0)$  频率点上有意义,需要使用单边离散的 Hilbert 变换<sup>[6]</sup>

$$H_R(\omega_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\omega_k G_I(\omega_k) \Delta\omega}{\omega_j^2 - \omega_k^2} \quad (2)$$

$$H_I(\omega_j) = -\frac{2\omega_j}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{G_R(\omega_k) \Delta\omega}{\omega_j^2 - \omega_k^2} \quad (3)$$

其中:  $H_R$  与  $H_I$  分别为  $H(\omega)$  的实部与虚部;  $G_R$  与  $G_I$  分别为  $G(\omega)$  的实部与虚部;  $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1}$  为频域取值间隔。

在室温下激励振幅为 1.25 mm,配重质量块为 4.0 kg,采用正弦波位移激励法,频率从 5 Hz 到 10 Hz 变化时,间隔为 1 Hz,共振频率附近的频率间隔取 1 Hz,其他频率范围内间隔取 5 Hz,测得橡胶钢丝绳复合隔振器在某一激励振幅下的频响曲线。使用该方法对其进行 Hilbert 变换,如图 4 和图 5 所示。可以看出,频响曲线  $G(\omega)$  与其 Hilbert 变换曲线  $H(\omega)$  的差异非常明显,该橡胶钢丝绳复合隔振器具有明显的非线性特性。

#### 3.2 复合隔振器的动力学模型

将橡胶钢丝绳复合隔振器的试验系统近似简化

为单自由度隔振系统,令激励为  $y(t) = y_0 \sin \omega t$ ,  $x(t)$  为经过隔振器后系统输出的位移,系统的运动方程可以表示为

$$m\ddot{x} + k_1(x - y) + k_3(x - y)^3 + c(\dot{x} - \dot{y}) = 0 \quad (4)$$

其中:  $k_1$  为线性刚度系数;  $k_3$  为非线性立方刚度系数;  $c$  为阻尼系数。

令  $u = x - y$ ,则式(4)变为

$$m\ddot{u} + k_1u + k_3u^3 + c\dot{u} = m y_0 \omega^2 \sin \omega t \quad (5)$$

### 4 参数识别

由式(5)可知系统的总恢复力为

$$f = k_1u + k_3u^3 + c\dot{u} \quad (6)$$

其中:  $k_1, k_3, c$  为未知待识别的刚度和阻尼参数。

笔者采用多项式拟合法及最小二乘法识别刚度系数  $k_1, k_3$ ; 根据阻尼力与总恢复力的关系式对阻尼系数  $c$  进行单独识别<sup>[7]</sup>。

#### 4.1 刚度参数 $k_1, k_3$ 的识别

利用试验得到的位移、恢复力信号  $u_k, f_k (k=1, 2, \dots, n)$ ,对迟滞回线进行最小二乘三阶多项式拟合,得到幂函数多项式为

$$f(u) = \alpha_0 + \alpha_1u + \alpha_2u^2 + \alpha_3u^3 \quad (7)$$

其中: 奇数项系数即为待识别的非线性弹性恢复力

刚度系数  $k_1, k_3$ , 即  $k_1 = \alpha_1, k_3 = \alpha_3$ 。

取大于一个周期的  $u_k, f_k$  的值代入式(7), 得到

$$UT = F \quad (8)$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_n & u_n^2 & u_n^3 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

利用参数识别的最小二乘法<sup>[8-9]</sup>可以求出待识别参数向量  $T$  的最小二乘估计值为

$$\tilde{T} = (U^T U)^{-1} (U^T F) \quad (9)$$

根据式(9)即可识别出  $k_1$  和  $k_3$  的值。

## 4.2 阻尼参数 $c$ 的识别

由识别得到的刚度系数  $k_1, k_3$  可知阻尼力为

$$f_c = f - k_1 u - k_3 u^3 \quad (10)$$

阻尼力-位移方程为

$$\frac{f_c^2}{b^2} + \frac{u^2}{A^2} = 1 \quad (11)$$

其中:  $A$  为相对位移幅值;  $b = cA\omega$ 。

由式(11)可得

$$(A^2 - u^2)b^2 = A^2 f_c^2 \quad (12)$$

取多于一个周期的恢复力  $f_c$  和位移  $u_c$ , 找出最大位移值  $A$ , 并且利用式(10)求出各采样步长的阻尼恢复力  $f_{ck}$ 。根据式(12)得到如下方程组

$$Xb^2 = F_c \quad (13)$$

其中

$$X = \begin{Bmatrix} A^2 - u_1^2 \\ A^2 - u_2^2 \\ \vdots \\ A^2 - u_n^2 \end{Bmatrix}, F_c = \begin{Bmatrix} A^2 f_{c1}^2 \\ A^2 f_{c2}^2 \\ \vdots \\ A^2 f_{cn}^2 \end{Bmatrix}$$

利用参数识别的最小二乘法求出未知参数  $b$  的最小二乘估计值为

$$\tilde{b} = \sqrt{(X^T X)^{-1} (X^T F_c)} \quad (14)$$

根据  $b$  的估计值及  $b = cA\omega$  可以对阻尼参数  $c$  进行识别。

## 5 识别结果分析

选取图3所示的激励振幅为 1.0 mm 和

1.25 mm 时的两条迟滞回线对系统的刚度和阻尼系数进行识别, 识别结果如表1和表2所示。将识别出的参数代入式(5), 利用四阶变步长 Runge-Kutta 法进行数值分析, 求得识别系统的迟滞回线。将计算与试验结果进行比较, 如图6和图7所示。可以看出, 通过识别参数计算的迟滞回线与试验结果基本吻合说明该识别方法是有效的。

表1 激励振幅为 1.0 mm 时识别结果

$k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$k_3/(\text{N} \cdot \text{m}^{-3})$	$c/(\text{Nm} \cdot \text{s}^{-1})$
5.759 3 × 10 <sup>4</sup>	-9.836 9 × 10 <sup>8</sup>	175.143

表2 激励振幅为 1.25 mm 时的识别结果

$k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$k_3/(\text{N} \cdot \text{m}^{-3})$	$c/(\text{Nm} \cdot \text{s}^{-1})$
5.105 3 × 10 <sup>4</sup>	-4.217 5 × 10 <sup>8</sup>	155.469 4

根据此识别及验证方法, 使用激励振幅为 1.25 mm、激励频率为 17 Hz 的测试结果进行参数识别, 如表3所示。利用谐波平衡法<sup>[10-11]</sup>计算出该识别系统的传递率曲线, 并与试验曲线进行比较, 如图8所示。可以看出, 在高频区理论与试验结果吻合较好。由于复合隔振器在试验中呈现了非线性软弹簧的特性, 不稳定区的测试结果并不稳定<sup>[3]</sup>, 因此在低频区两者有所差别。

表3 激励振幅为 1.25 mm、频率为 17 Hz 时的识别结果

$k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$k_3/(\text{N} \cdot \text{m}^{-3})$	$c/(\text{Nm} \cdot \text{s}^{-1})$
4.688 5 × 10 <sup>4</sup>	-5.470 9 × 10 <sup>8</sup>	170.952

由图6~图8可知, 橡胶钢丝绳复合隔振器迟滞回线的拟合结果与试验结果存在微小误差, 但在整体上有较好的一致性, 说明非线性立方刚度模型是适合橡胶钢丝绳复合隔振器的。

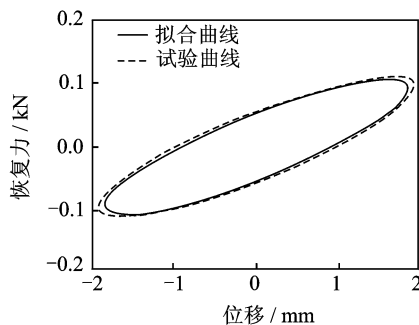


图6 激励振幅为 1.25 mm 时的迟滞回线

## 6 结束语

对橡胶钢丝绳复合隔振器进行了动力学建模与

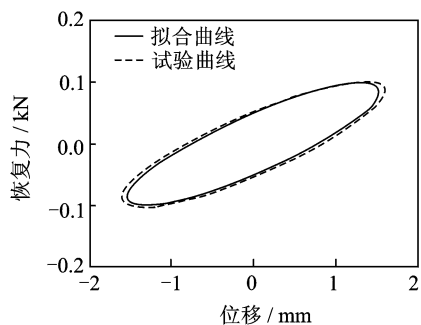


图7 激励振幅为1.0 mm时的迟滞回线

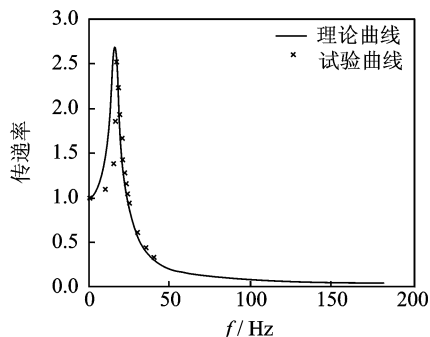


图8 激励振幅为1.25 mm、频率为17 Hz时传递率曲线

参数识别。使用Hilbert变换法对隔振器进行非线性特性检测。在非线性立方刚度模型的基础上进行了参数识别。利用分离识别法将隔振系统非线性方程转化为关于未知参数的线性方程组,应用最小二乘法对未知刚度和阻尼参数进行了识别。根据识别参数分别对不同工况下的迟滞回线和频响曲线进行拟合,拟合结果与试验结果整体上具有较好的一致性,说明了模型的可靠性与参数识别的准确性。

## 参 考 文 献

- [1] Rivin E I. Passive vibration isolation [M]. New York: ASME Press, 2003: 1-210.
- [2] Ibrahim R A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 314(3-5): 371-452.
- [3] 王江涛,唐斌,薛冬新,等. 橡胶钢丝绳复合隔振器的试验[J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(4): 488-491. Wang Jiangtao, Tang Bin, Xue Dongxin, et al. Experiment of a rubber and wire-cable composite vibration isolator [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011, 31(4): 488-491. (in Chinese)
- [4] 韩德宝,宋希庚. 橡胶隔振器刚度和阻尼本构关系的试验研究[J]. 振动与冲击, 2009, 28(1): 156-160. Han Debao, Song Xigeng. Experimental study on constitutive model for damping and stiffness of a rubber isolator [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(1): 156-160. (in Chinese)

- [5] 康从会,韩德宝,薛冬新,等. 基于LabVIEW的橡胶动态特性的测试系统研究[J]. 振动、测试与诊断, 2008, 28(1): 69-73. Kang Conghui, Han Debao, Xue Dongxin, et al. Study on measuring system for dynamic characteristic of rubber based on LabVIEW [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2008, 28(1): 69-73. (in Chinese)
- [6] 马孝江,袁景侠. 非线性系统的非参数识别[J]. 大连理工大学学报, 1988, 28(1): 71-77. Ma Xiaojiang, Yuan Jingxia. Non-parameter identification of non-linear Systems [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1988, 28(1): 71-77. (in Chinese)
- [7] 路纯红,白鸿柏. 金属橡胶/橡胶复合叠层耗能器试验建模与参数辨识[J]. 振动与冲击, 2007, 26(11): 5-8. Lu Chunhong, Bai Hongbai. Experiment modeling and parameter identification of metal rubber/rubber composite laminated energy dissipater [J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(11): 5-8. (in Chinese)
- [8] 胡海岩,李岳峰. 具有记忆特性的非线性减振器参数识别[J]. 振动工程学报, 1989, 2(2): 17-27. Hu Haiyan, Li Yuefeng. Parametric identification of nonlinear vibration isolators with memory [J]. Journal of Vibration Engineering, 1989, 2(2): 17-27. (in Chinese)
- [9] 闫辉,姜洪源,刘文剑,等. 具有迟滞非线性的金属橡胶隔振器参数识别研究[J]. 物理学报, 2009, 58(8): 5238-5243. Yan Hui, Jiang Hongyuan, Liu Wenjian, et al. Identification of parameters for metal rubber isolator with hysteretic nonlinearity characteristics [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(8): 5238-5243. (in Chinese)
- [10] 陈予恕. 非线性振动 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 53-57.
- [11] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations [M]. New York: John Wiley & Sons, 1995: 59-61.



**第一作者简介:**唐斌,男,1978年7月生,博士、讲师。主要研究方向为内燃机振动、噪声及控制、内燃机性能。曾发表《A comparison of the effects of nonlinear damping on the free vibration of a single-degree-of-freedom system》(《Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics》2012, Vol. 134, No. 2)等论文。

E-mail: btang@dlut.edu.cn