

# 传感器优化布置的改进有效独立算法\*

程建旗, 闫维明, 陈彦江, 何浩祥, 张宇博

(北京工业大学工程抗震与结构诊治北京市重点实验室 北京, 100124)

**摘要** 基于传统有效独立法(effective independence algorithm, 简称 EI 法), 以测点的频响函数为驱动点留数加权有效独立分布向量, 提出改进的有效独立法用于传感器优化布置。该方法弥补了传统有效独立法会得到振动能量较低测点的缺点, 可针对位移、速度和加速度不同类型的传感器采用相应的频响函数分别进行优化布置。应用该方法对一座矮塔斜拉桥三向加速度传感器进行优化布置, 并采用模态保证准则和抗噪声能力准则对布置方案进行评价, 结果表明, 改进有效独立法能得到精确、经济的传感器布置。

**关键词** 斜拉桥; 健康监测; 频响函数; 传感器优化; 有效独立法

**中图分类号** U466.3

## 引言

传感器布置是桥梁结构健康监测系统中的一项关键技术, 传感器布置的两个最基本的问题是确定传感器的数量和布置位置。文献[1-2]介绍了几种常见的优化布置方法。以优化目标函数分类, 主要的传感器优化准则有: a. 参数识别误差最小准则, 如有效独立法<sup>[3-6]</sup>; b. 能量最大准则, 如模态动能法; c. 系统可观测度与可观度准则, 如特征系统实现法<sup>[7]</sup>; d. 模型缩减准则, 如 Guyan 缩减法; e. 基于参数损伤敏感性准则<sup>[8]</sup>; f. 其他方法, 如模态保证准则等。上述方法中应用较广泛的是由 Kammer 提出的 EI 法, 其基本思想是基于每个传感器测点对确定模态向量线性无关贡献大小, 用有限的传感器采集尽可能多的线性无关信息, 从而获得模态的最佳估计。EI 法的一个不足之处在于得到的布置方案中可能含有振动能量很低的测点, 测点的信噪比下降, 增大健康监测系统参数估计误差。另外, 大跨桥梁结构的低阶振型不仅仅以主梁竖弯振型为主, 还包括主梁横弯、扭转振型和主塔的弯曲振型等; 因此, 监测主梁和主塔的多维振型将为健康监测系统提供更加丰富的数据。

笔者提出改进的有效独立法, 并将其用于位移、速度和加速度传感器优化布置。该方法以测点的频响函数为驱动点留数加权有效独立分布向量, 针对位移、速度和加速度不同类型的传感器采用相应的

频响函数。由于考虑了测点能量的大小, 可以提高测点的信噪比, 得到抗噪声能力强的传感器布置方案。

## 1 有效独立法传感器优化布置原理

对于线性时不变结构, 任一点响应均可表示成模态向量的线性组合<sup>[9]</sup>, 且高阶振型的贡献很小, 故结构测点响应输出  $z_s$  可以写成前  $n$  阶振型组合

$$z_s(t) = \Phi_s q(t) + \epsilon(t) \approx \sum_{r=1}^n q_r(t) \phi_r + \epsilon(t) \quad (1)$$

其中:  $z_s(t)$  为传感器在  $t$  时刻的输出向量, 可以是结构的位移、速度或加速度;  $\Phi_s$  为对应测点缩减后的模态矩阵;  $q(t)$  为广义模态坐标向量, 表示各阶模态对结构响应的贡献大小;  $\phi_r$  为第  $r$  阶模态向量,  $r = 1, 2, \dots, n$ ;  $\epsilon(t)$  为考虑噪声的影响。

环境激励下的结构模态参数识别是以环境激励作为荷载输入, 而不将其作为噪声考虑。噪声来源主要包括传感器和信号传输系统产生的噪声<sup>[10]</sup>。假设各仪器产生的噪声相互独立且具有相同的测量方差, 则

$$R = \sigma^2 I \quad (2)$$

其中:  $R$  为噪声的自相关函数, 是单位矩阵的  $\sigma^2$  倍;  $\sigma^2$  为噪声的方差值。

$q$  的有效无偏估计为

$$\hat{q} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T z \quad (3)$$

\* 国家自然科学基金资助项目(编号:90715032,50878010);北京市重点实验室开放资助项目(编号:EESR2009-01)  
收稿日期:2010-10-28;修改稿收到日期:2011-03-15

估计值的协方差矩阵为

$$\mathbf{J} = E[(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})^T] = [\Phi^T(\sigma^2)^{-1}\Phi]^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{A}^{-1} \quad (4)$$

估计误差的协方差最小作为模态坐标的最佳估计。估计误差的协方差矩阵  $\mathbf{J}$  最小等价于 Fisher 信息阵  $\mathbf{Q}$  或  $\mathbf{A}$  的最大化,将会得到  $\mathbf{q}$  的最佳估计。

很多文献给出了求最大化 Fisher 信息矩阵  $\mathbf{Q}$  的方法。基于测点对确定模态向量线性无关贡献的大小,Kammer 提出了有效独立法。其构造有效独立向量依次删除对信息阵  $\mathbf{Q}$  贡献小的测点,所保留的测点测得的试验模态即是模态空间的最佳估计。

构造幂等矩阵  $\mathbf{E}^{[3]}$  为

$$\mathbf{E} = \Phi[\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T = \Phi\mathbf{A}^{-1}\Phi^T \quad (5)$$

矩阵  $\mathbf{E}$  的秩等于其迹,对角线上第  $i$  个元素表示第  $i$  个测试点对矩阵  $\mathbf{A}$  的贡献。将矩阵  $\mathbf{E}$  的对角线元素写成如下列向量

$$\mathbf{EI} = [E_{11}, E_{22}, \dots, E_{NN}]^T \quad (6)$$

$0 \leq E_{ii} \leq 1$ ,若  $E_{ii} = 0$ ,表示第  $i$  个测点对识别目标模态无效;若  $E_{ii} = 1$ ,表示  $i$  测点是识别目标模态的关键点。

有效独立法通过  $\mathbf{E}$  矩阵对角元素的大小来对各个候选测点的优先顺序进行排序,每次迭代删除最小值对应的测点,保留  $E_{ii}$  值较大的对应  $m$  个测点,就是模态空间的最佳估计。

## 2 改进有效独立法

有效独立法的一个不足之处在于得到的布置方案中可能含有振动能量较低的测点<sup>[1]</sup>,测点的信噪比下降,增大了结构参数的识别误差。笔者以测点的频响函数作为加权系数,改进有效独立法,使得各测点保持较高的信噪比。

传感器信号的信噪比<sup>[11]</sup>为

$$\text{SNR}_i = 10 \lg \left( \frac{\sum_{j=1}^t a_{ij}^2}{\sum_{j=1}^t \sigma_{ij}^2} \right) \quad (7)$$

其中: $a_{ij}$ , $\sigma_{ij}$ 分别为第  $i$  测点在第  $j$  时间点的信号值和噪声值; $t$  为采样时间点总数。

传感器布置在信号值较大的测点能提高采样信号的信噪比,可以利用频响函数选择信号值较大的测点。单点激励时,测试点  $l$  和激励点  $p$  之间的加速度频响函数<sup>[12-13]</sup>为

$$H_{lp}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r \varphi_{pr} \omega^2}{M_r(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (8)$$

将振型按质量矩阵归一化,即  $M_r = 1$ 。假设第  $r$

阶模态对应激励力频率为  $\omega_r$ ,其他频带激励力在该阶模态响应可忽略,且各阶模态阻尼比近似相等,则

$$H_{lp}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r \varphi_{pr}}{j2\zeta} \quad (9)$$

其中: $H_{lp}(\omega)$ 为在  $p$  点作用单位力时  $l$  点的加速度响应,即测点加速度响应与  $\varphi_r \varphi_{pr}$  成正比。

为了表示某个测点在一般激励输入下的加速度响应大小,定义第  $i$  测点驱动点加速度留数 DAR 为

$$\text{DAR}(i) = \sum_{r=1}^n \varphi_{ir}^2 \quad (10)$$

DAR 值较大的测点相应的加速度响应也较大,因此,可以通过有效独立分布向量乘以驱动点加速度留数来弥补 EI 法的不足,使得加速度传感器采集的信号具有较高的信噪比

$$\overline{E}_{ii} = E_{ii} \text{DAR}(i) \quad (11)$$

式(11)不仅反映了测点  $i$  对确定模态向量线性无关的贡献量,而且还反映了该测点在环境激励下加速度响应的相对值。在每次迭代计算时,通过  $\overline{E}_{ii}$  值的大小来对各个候选测点的优先顺序进行排序,删除  $\overline{E}_{ii}$  最小的对应测点,再进行下一次迭代,最后保留的  $m$  个测点是综合反映模态向量线性无关和测点响应大小的优化传感器的布置位置。

由于位移、速度、加速度频响函数存在如下关系

$$H_a(\omega) = j\omega H_v(\omega) = -\omega^2 H_d(\omega) \quad (12)$$

可以定义第  $i$  测点驱动点位移留数 DDR 和驱动点速度留数 DVR 分别为

$$\text{DDR}(i) = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_{ir}^2}{\omega_r^2} \quad (13)$$

$$\text{DVR}(i) = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_{ir}^2}{\omega_r} \quad (14)$$

式(13)、式(14)分别乘以  $E_{ii}$  即可用于位移和速度传感器的优化布置。

## 3 工程应用

笔者对一座预应力混凝土矮塔斜拉桥进行动力分析,应用改进有效独立法对该桥三向加速度传感器优化布置进行了研究。

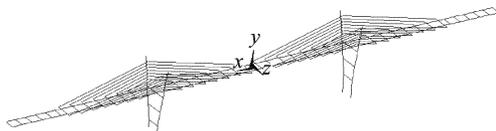
### 3.1 桥梁概况

峪道河大桥上部结构为 30+60+120+60+30 预应力混凝土矮塔斜拉桥(单位为 m),桥宽为 12.5 m,见图 1(a)。主跨采用墩、塔、梁固结体系,辅助墩采用抗震滑动支座,连接墩采用四氟乙烯滑板支座。主梁为全预应力混凝土 II 型梁,梁高 1.8 m。主

塔高度为 15.3 m(桥面以上),侧面为扇形外张,立面为直线放射型。斜拉索平行布置,全桥共 14 对拉索,塔上索距为 1.6 m,主梁上索距为 7.2 m。左墩高 22.1 m,右墩高 28.3 m,不是完全对称结构。



(a) 峪道河大桥实景



(b) 三维有限元模型

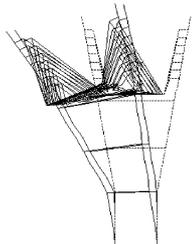
图 1 峪道河大桥

### 3.2 有限元模型及动力分析

依据设计资料及现场施工控制数据建立桥梁三维有限元模型,如图 1(b)所示。考虑主梁扭转振型,采用双主梁模型。图 2 给出了前 4 阶振型。



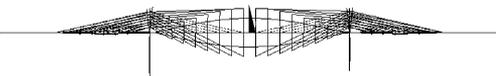
(a) 主梁1阶对称竖弯



(b) 主梁主塔1阶对称横弯



(c) 主梁1阶反对称竖弯



(d) 主梁1阶扭转

图 2 桥梁前 4 阶振型图

表 1 给出了有限元计算的 1~15 阶模态参数,以及各个方向的振型参与质量系数(振型贡献率), $r_y, r_z, r_\theta$  分别为竖弯、横弯和扭转振型的参与质量系数。振型参与质量系数用于反映各阶振型对桥梁振动的贡献程度。振型按质量矩阵归一化后,第  $i$  阶振型的振型参与质量系数  $r_i$  为

$$r_i = M_{Ei} / \sum_{i=1}^n m_i = \gamma_i^2 / \sum_{i=1}^n m_i \quad (15)$$

其中: $\gamma_i = \phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{E}$ ,为第  $i$  阶振型的振型参与系数。

表 1 峪道河大桥模态参数

阶次	$f/\text{Hz}$	振型特征	$r_y$	$r_z$	$r_\theta$
1	0.601	1 阶对称竖弯	0.257	0.000	0.000
2	0.906	1 阶对称横弯	0.000	0.850	0.182
3	1.147	1 阶反对称竖弯	0.000	0.000	0.000
4	1.291	1 阶扭转	0.000	0.005	0.035
5	1.304	1 阶反对称横弯	0.000	0.004	0.000
6	1.436	2 阶对称竖弯	0.344	0.000	0.000
7	1.488	2 阶反对称竖弯	0.000	0.000	0.000
8	1.919	主塔对称横弯	0.014	0.000	0.000
9	1.924	主塔反对称横弯	0.000	0.000	0.000
10	2.129	2 阶反对称横弯	0.000	0.004	0.232
11	2.325	反对称扭转	0.000	0.000	0.000
12	2.354	纵漂	0.066	0.000	0.000
13	2.471	两边跨反对称扭转	0.000	0.002	0.122
14	2.526	反对称扭转	0.000	0.000	0.000
15	2.902	两主塔反对称横弯	0.000	0.001	0.005

由表 1 可发现,反对称振型对各个方向的振型贡献率都为 0。这是因为该桥关于  $x, y$  轴基本对称,质量矩阵也对称,而振型向量反对称。从式(15)可知,该阶振型对结构响应的贡献为零。然而,对于以损伤识别为目标的健康监测,低阶的反对称振型同样提供了大量有价值的信息;因此,传感器优化布置同样需要将反对称振型作为监测目标振型。

### 3.3 传感器布置方案

参考表 1 中振型特征及 3 个方向的振型参与质量系数,确定前 15 阶振型为监测的目标模态。竖弯、横弯和扭转 3 个方向的振型参与系数分别达到 71%, 86% 和 57%。竖弯振型取表 1 中第 1, 3, 6, 7 阶;横弯振型取第 2, 5, 10 阶;扭转振型取第 4, 12, 13, 14 阶;主塔振型取第 8, 9, 10, 15 阶。

由于主塔高度较小,振型都是 1/4 波曲线,因此可以直观地在塔顶布置横桥向和顺桥向双向传感器用于监测主塔振动。图 3 给出了分别以竖弯、横弯和扭转振型为监测模态时的最少传感器数量的布置方案。监测竖弯、横弯的传感器可布置在主梁上游单侧,扭转振型可以通过主梁两侧对应自由度竖向相对位移值表示,因此传感器沿两侧对称布置。

理论上,识别  $n$  阶模态仅需要  $n$  个传感器即可,考虑到有限元模型误差和噪声的影响,为保证模态

较好的正交性,实际上所需的传感器个数要大于  $n$  个。图 4 给出了综合模态保证准则和抗噪声能力准则后全桥 3 个方向传感器布置方案,上游侧的竖向加速度传感器可同时用于监测竖弯和扭转振型。图中圆点表示竖向传感器,方点表示横向传感器。全桥共有 14 个竖向传感器和 9 个横向传感器。

### 3.4 结果评价

为评价改进有效独立法的优劣,笔者用模态保证准则(modal assurance criterion,简称 MAC)和抗噪声能力准则对上述加速度传感器布置结果进行分析。

#### 3.4.1 模态保证准则

$$MAC_{ij} = (\phi_i^T \phi_j)^2 / (\phi_i^T \phi_i)(\phi_j^T \phi_j) \quad (16)$$

理论模态矩阵  $\Phi$  中各阶模态向量独立、正交。有效独立法只保证模态向量线性无关,而模态保证准则是衡量模态向量正交性的很好指标。由于模态向量是关于质量矩阵带权正交的,MAC 矩阵的非对角线元素一般不为 0。非对角线元素越大,模态向量相关程度越大,因此测点布置应使非对角线元素足够小。这里选用 MAC 矩阵非对角线元素均方根 RMS 作为评价指标,RMS 值越小,则模态向量正交性越好。

表 2 给出了对应 EI 法和改进 EI 法 3 个不同方向传感器布置时的 MAC 矩阵非对角线元素的均方根,可以发现,两种方法 RMS 值基本相等,其中竖弯和扭转对应的均方根接近于 0,表明测试模态向量保持了很好的正交性;横弯对应的均方根都较大,失去了模态向量的正交特性,为此需要增加测点使其

减小。如图 4 所示,两个新增测点布置在边跨靠近第 3 根拉索处,均方根最小,为 0.17,达到很好的效果。

表 2 MAC 矩阵非对角线元素均方根

测点布置	竖弯 RMS	横弯 RMS	扭转 RMS
改进 EI 法布置方案	$7.400 \times 10^{-4}$	0.418 4	$1.361 \times 10^{-4}$
EI 法布置方案	$3.793 \times 10^{-4}$	0.284 2	$4.255 \times 10^{-4}$
增加测点布置方案	$1.883 \times 10^{-3}$	0.172 7	$1.540 \times 10^{-3}$

#### 3.4.2 抗噪声准则

实测信号将受到不同水平噪声的干扰,一个好的传感器布置方案还要有较好的噪声鲁棒性。选用 Fisher 信息阵的条件数来衡量改进有效独立法得到的传感器布置方案的抗噪声能力,条件数越小,由初始数据扰动引起解的相对误差就越小。

应用 EI 法和改进 EI 法传感器优化布置,如表 3 所示。可以发现,完整模态对应 Fisher 信息阵的条件数最小,改进 EI 法的布置方案次之,EI 法得到的条件数最大。图 5 给出了竖弯振型对应的 Fisher 信息阵条件数随着测点删减的变化情况。当测点较多时,两者基本相等;随着测点的减少,EI 法的条件数波动较大,且明显大于改进 EI 法的条件数,说明改进 EI 法的传感器布置方案具有更好的噪声鲁棒性。综合上述两个评价标准,表明应用改进有效独立法布置传感器在保证模态正交的前提下,具有更好的噪声鲁棒性。

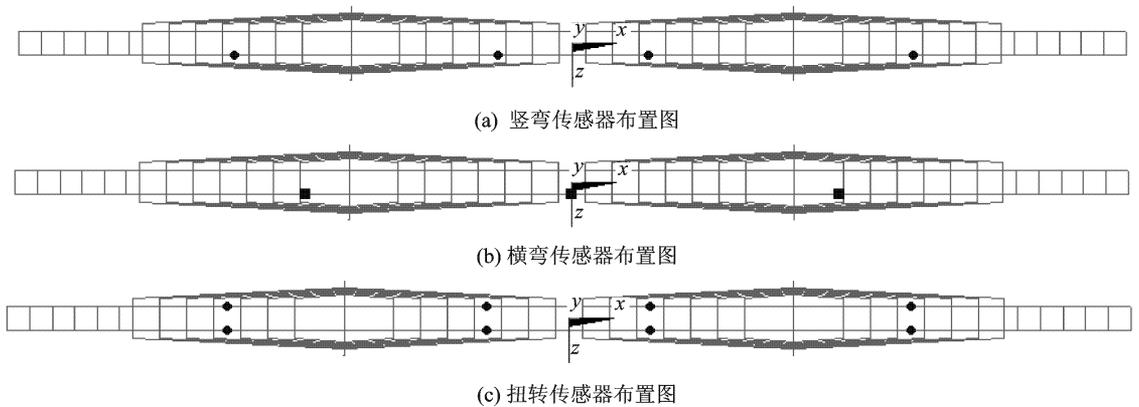


图 3 三个方向传感器布置图

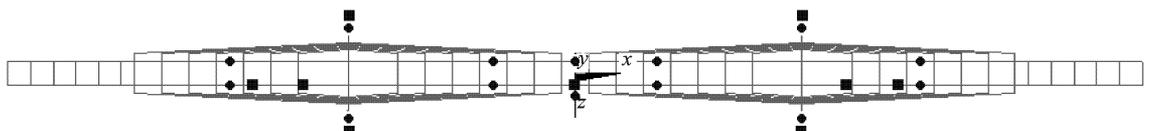


图 4 全桥传感器布置图

表3 Fisher信息阵的条件数对比

测点布置	竖弯	横弯	扭转
改进EI法布置方案	1.150 4	2.849 4	1.135 7
EI法布置方案	1.534 1	4.573 3	1.636 9
完整模态 Fisher 信息阵	1.034 1	2.431 6	1.039 2

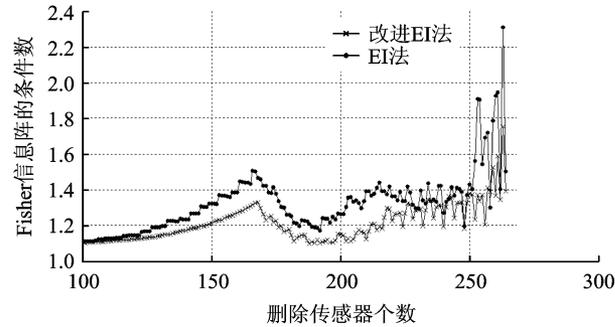


图5 Fisher信息阵的条件数对比

## 4 结论

1) 改进有效独立法适用于位移、速度和加速度不同传感器的优化布置。

2) 由于考虑了各测点响应的相对大小,能有效提高测点的信噪比,布置方案有较强的抗噪声能力。

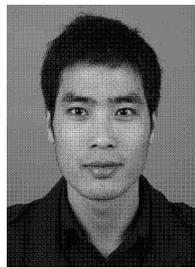
3) 对于加速度传感器布置,改进有效独立法保证了模态向量的线性独立,但是还需要根据模态保证准则增加测点以获得正交的测试模态向量。

## 参 考 文 献

- [1] Meo M, Zumpano G. On the optimal placement techniques for a bridge structure[J]. Engineering Structures, 2005,27(10):1488-1497.
- [2] 秦仙蓉,张令弥.一种基于QR分解的逐步累积法传感器配置[J].振动、测试与诊断,2001,21(3):168-173.  
Qin Xianrong, Zhang Lingmi. Successive sensor placement for modal paring based-on QR-factorization [J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2001,21(3):168-173. (in Chinese)
- [3] Kammer D C. Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamic, 1991,14(2):251-259.
- [4] 袁爱民,戴航,孙大松.基于EI及MAC混合算法的斜拉桥传感器优化布置[J].振动、测试与诊断,2009,29(1):55-59.  
Yuan Aimin, Dai Hang, Sun Dasong. Optimal sensor placement of cable-stayed bridge using mixed algorithm based on effective independence and modal assurance criterion methods [J]. Journal of Vibration,

Measurement and Diagnosis, 2009,29(1):55-59. (in Chinese)

- [5] 刘斌,姚永丁,叶贵如.斜拉桥传感器优化布点的研究[J].工程力学,2005,22(5):171-176.  
Liu Bin, Yao Yongding, Ye Guiru. Study of optimal sensor placement for cable-stayed bridge [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22 (5): 171-176. (in Chinese)
- [6] 何浩祥,闫维明,张爱林.面向结构健康监测的传感器数量及位置优化研究[J].振动与冲击,2008,27(9):131-134.  
He Haoxiang, Yan Weiming, Zhang Ailin. Optimization of number and placement of sensors for structural health monitoring [J]. Journal of Vibration and Shock, 2008,27(9):131-134. (in Chinese)
- [7] Kammer D C, Brillhart R D. Optimal sensor placement for modal identification using system-realization methods[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamic, 1996,19:729-731.
- [8] Shi Z Y, Law S S, Zhang L M. Optimum sensor placement for structural damage detection[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000,126(11):1173-1179.
- [9] Ewins D J. Modal testing: theory, practice and application[M]. 2nd Edition. [S. l.]: Research Studies Press LTD, 2000.
- [10] Kammer D C. Effect of noise error on sensor placement for on-orbit modal identification of large space structure[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamic, 1992,15(2):334-341.
- [11] 曹晖,林秀萍.结构损伤识别中噪声的模拟[J].振动与冲击,2010,29(5):106-109.  
Cao Hui, Lin Xiuping. Noise simulation in structural damage identification [J]. Journal of Vibration and Shock, 2010,29(5):106-109. (in Chinese)
- [12] 傅志方,华宏星.模态分析理论与应用[M].上海:上海交通大学出版社,2002.
- [13] 孙鑫晖,张令弥,王彤.基于奇异值分解的频响函数降噪方法[J].振动、测试与诊断,2009,29(3):325-328.  
Sun Xinhui, Zhang Lingmi, Wang Tong. Noise reduction of frequency response function using singular value decomposition [J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2009, 29 (3): 325-328. (in Chinese)



第一作者简介:程建旗,男,1985年7月生,硕士研究生。主要研究方向为大跨桥梁结构施工控制与健康监测。  
E-mail:cheng.jq@163.com