第32卷第5期
2012年10月
振动、测试与诊断
Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis
Vol. 32 No. 5
Oct. 2012

简支梁有效导纳仿真*

张安付， 盛美萍， 张益萍
（西北工业大学航海学院 西安，710072）

摘要 为了探究简支梁在均匀分布激励作用下的振动响应，采用简支梁有效导纳以及等效集中质量系统有效导纳作为评价准则。根据功率流理论，推导了在均布力和多点离散力作用下简支梁的有效导纳表达式，运用集中质量法离散简支梁为多自由度刚度-质量系统，建立了多自由度集中质量系统有效导纳模型。对在均布力和离散力作用下简支梁的有效导纳以及集中质量系统的有效导纳分别进行仿真分析。计算结果对比表明：当高阶模态可以忽略时，最简单的集中质量模型即单振子模型的谐响应导纳可以用来表征简支梁在均布力作用下的有效导纳模型。

关键词 简支梁；功率流；集中质量法；有效导纳
中图分类号 O326；TH113.1

引 言

在结构振动特性研究中，用导纳描述系统的振动特性是一种便捷有效的方法。F. A. Firestone 最早利用机电类比提出了机械导纳的概念[1]。L. Cremer 等[2]分析了典型结构在点激励下的点导纳。兰凤崇等[3]提出了一种用加速度点导纳评价发动机悬置处的动态刚度方法。在实际机械结构中普遍存在着多点连接、线连接以及面连接等连接方式，采用点导纳理论作近似分析会带来很大误差。P. Hammer 等[4]以功率流为依据，提出了有效导纳的概念。钱斌[5-6]研究了无限板和无限梁在均匀分布线激励下的有效输入导纳，借助无限梁板有效导纳研究了圆柱壳组合结构的振动传递特性。文献[7-8]将有效导纳理论与时均功率流相结合，建立了无限板受到均匀面激励的有效面导纳模型。可见，有限结构在各种连接方式下的振动传递与分布规律仅采用无限结构近似模型是不够的，有必要开展有限结构的有效导纳研究。笔者将分别建立简支梁在多点离散力和均匀分布力作用下的有效导纳模型，运用集中质量法对均布力作用下简支梁模型进行简化，为实际工程近似计算提供理论依据。

1 简支梁的均布力模型

均布力作用下简支梁模型如图1 所示，其中：F_0 为均布力的幅值；l 为梁长；b_h 为梁的截面高度；b_t为梁的截面宽度。

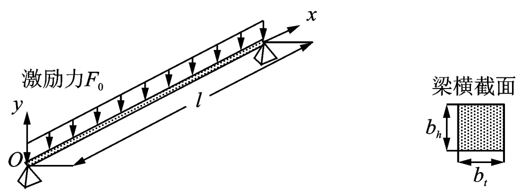


图1 均布力作用下的简支梁模型

梁在x_0 点与x 点之间速度传递导纳的表达式为

$$Y(x|x_0) = \frac{j\omega}{\Lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(x)\varphi(x_0)}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta_n\omega_n\omega} \tag{1}$$

其中：$\Lambda, \varphi(x), \omega_n, \eta_n = c/\omega_n\rho A$ 分别为简支梁的模态质量、振型函数、固有频率和模态损耗因子；ω 为外激励频率；c 为阻尼系数[9]；ρ 为梁的体密度；A 为梁横截面积。

为便于分析，笔者选择阻尼系数c 作为阻尼的表征参数。在均布力激励下，梁上任意点x 的实际振动响应为梁上整条线力激起响应的叠加。梁上任意点x_0 处微元段$\mathrm{d}x_0$ 上的力可以表示为

$$\sigma(x_0) = \frac{F_0}{l}\mathrm{d}x_0 \tag{2}$$

由于微元段$\mathrm{d}x_0$ 很短，可近似看作点，施加在微元段上的力激起x 点的速度为

$$v(x|x_0) = \sigma(x_0)Y(x|x_0) \tag{3}$$

将式(3)沿梁长积分，得到x 点的速度为

$$v(x) = \int_0^l v(x|x_0) = \int_0^l \frac{F_0}{l}Y(x|x_0)\mathrm{d}x_0 \tag{4}$$

* 收稿日期：2011-03-30；修改稿收到日期：2011-06-20

任意微元段 $\mathrm{d}x$ 上的激励力为

$$\sigma(x) = \frac{F_0}{l}\mathrm{d}x \tag{5}$$

微元段 $\mathrm{d}x$ 的平均速度由式(4)所示的 x 点实际速度代替。激励力输入到微元段 $\mathrm{d}x$ 的复功率流为

$$Q(x) = \frac{1}{2}\sigma(x)v(x) \tag{6}$$

将式(4)～式(5)代入式(6)，沿梁长积分可得到均布力输入到梁结构总的复功率流为

$$Q = \frac{1}{2}F_0^2\frac{1}{l^2}\int_0^l\int_0^l Y(x|x_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x \tag{7}$$

将均布力看作整体激励单元，根据输入结构总功率与导纳的关系定义有效导纳[4]为

$$Y_e = \frac{1}{l^2}\int_0^l\int_0^l Y(x|x_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x \tag{8}$$

将式(1)代入式(8)，得到均布力作用下简支梁有效导纳表达式为

$$Y_e = \frac{j4\omega}{\Lambda\pi^2}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^2(\omega_n^2-\omega^2+j\eta_n\omega_n\omega)} \tag{9}$$

2　多点离散力作用下的简支梁

如图2所示，简支梁长为 l，等分为 N 段，根据平衡条件将每段上的力集中到段的两端，离散出 x_1，x_2，…，x_{N-1} 共 $N-1$ 个端点上的力，大小均为 F_0/N，相邻端点的间距为 l/N。可以看出，当 N 足够大时，施加在整个梁上的合力为

$$F_0(N-1)/N \approx F_0 \tag{10}$$

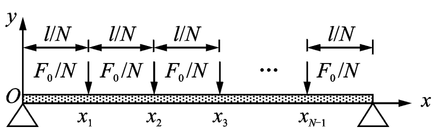


图2　多点离散力作用下简支梁模型

式(10)说明，若 N 足够大，利用本研究方法得到的离散力在梁上的总力与连续力相当。根据叠加原理和有效导纳的定义，得到多点力作用下简支梁的有效导纳为

$$Y_d = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{p=1}^{N-1}\sum_{q=1}^{N-1}Y(x_p|x_q) \tag{11}$$

将式(1)代入式(11)得到

$$Y_d = \frac{j\omega}{\Lambda N(N-1)}\sum_{p=1}^{N-1}\sum_{q=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\sin(\frac{m\pi x_p}{l})\sin(\frac{m\pi x_q}{l})}{\omega_n^2-\omega^2+j\eta_n\omega_n\omega} \tag{12}$$

3　集中质量法

类似于离散力模型，将简支梁平均分为 N 个单元段，每段的分布质量集中在单元的两个端点，梁各段弯曲刚度 k_1，k_2，…，k_{N-1} 保持不变，得到简支梁的集中质量模型如图3所示。图中，每个质量块的质量 m 为 $\rho Al/N$，每个质量块上受到的点力与多点离散力的情形相同，即每个点力为 F_0/N。多自由度质量-刚度模型的刚度矩阵可用图乘法求得[10]。

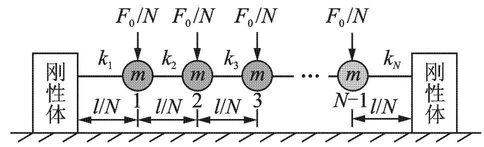


图3　简支梁的集中质量模型

模型的柔度矩阵结构为

$$\boldsymbol{\Delta} = (\delta_{pq})_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$(p=1,2,\cdots,N-1;\ q=1,2,\cdots,N-1) \tag{13}$$

柔度矩阵中各元素的表达式为

$$\delta_{pq} = \frac{1}{EI}(A_{pq1}y_{pq1}+A_{pq2}y_{pq2}+A_{pq3}y_{pq3}) \tag{14}$$

其中：A_{pq1}，A_{pq2}，A_{pq3} 分别为图4中三角形1，2，3的面积，可由下式求得

$$\begin{cases} A_{pq1} = \dfrac{p^2l}{2qN}h_q \\ A_{pq2} = \dfrac{p(N-p)l}{2qN}h_q \\ A_{pq3} = \dfrac{1}{2}h_ql - A_1 - A_2 \end{cases} \tag{15}$$

式(14)中的 y_{pq1}，y_{pq2}，y_{pq3} 为图4中 M_q 图各三角形形心对应 M_p 图的竖标，表达式为

$$\begin{cases} y_{pq1} = y_{pq2} = \dfrac{2}{3}h_p \\ y_{pq3} = \dfrac{2N-p-q}{3(N-p)}h_p \end{cases} \tag{16}$$

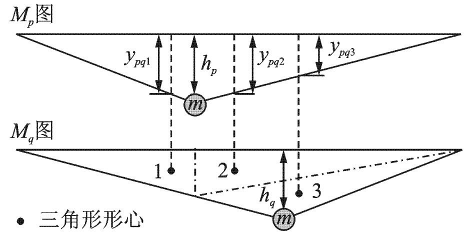


图4　集中质量模型弯矩图

其中：h_p，h_q 分别为图4中 M_p，M_q 弯矩图的最大高度，由式(17)得到

$$\begin{cases} h_p = p(N-p)l/N^2 \\ h_q = q(N-q)l/N^2 \end{cases} \tag{17}$$

集中质量模型的刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{\Delta}^{-1} \tag{18}$$

模型的激励矩阵，质量矩阵以及阻尼矩阵分别为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\frac{F_0}{N} & \frac{F_0}{N} & \cdots & \frac{F_0}{N}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{N-1} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}(\rho Al/N)_{(N-1)\times(N-1)} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(c/N)_{(N-1)\times(N-1)} \tag{21}$$

模型的速度列阵表达为

$$\boldsymbol{V}=[v_1,v_2,\cdots,v_{N-1}]^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

其中：$v_1,v_2,\cdots,v_{N-1}$为各质量块的速度。

速度列阵为

$$\boldsymbol{V}=\frac{j\omega\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}+j\omega\boldsymbol{C}} \tag{23}$$

集中质量模型的复功率流表示为

$$Q=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{F_0}{N}v_i=\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1}Y_{qi} \tag{24}$$

其中：$Y_{qi}=\dfrac{v_i}{F_0/N}$。

作用在集中质量模型的合力为$F_0(N-1)/N$，根据功率和导纳关系，集中质量模型的有效导纳为

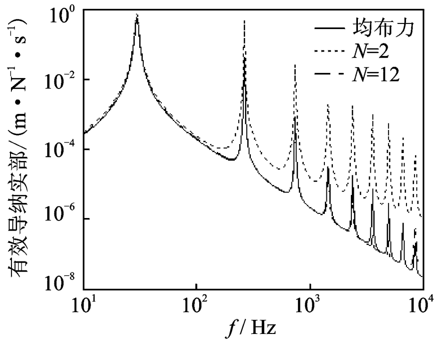
$$Y_q=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N-1}Y_{qi} \tag{25}$$

4 数值仿真

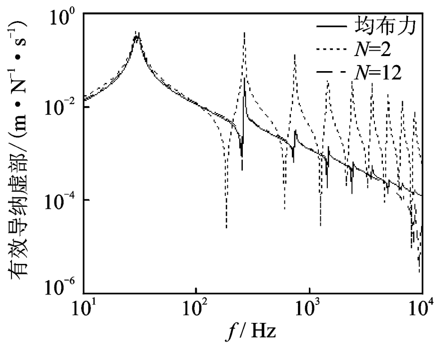
取钢质梁的长度$l=0.4$ m，截面宽$b_l=0.02$ m，截面高$b_h=0.002$ m，3个模型中的阻尼系数均取$c=1$。均布力模型中，F_0为均布力的幅值，多点离散力模型和集中质量模型中每个离散点力或每个质量块所受外力均为F_0/N。F_0在3个模型中均为单位力。N为梁的平分段数，N越大，表明离散力模型的离散力个数越多，集中质量模型的自由度数越多。

建立两个多点离散力模型，其中一个模型将梁平均分为2段，另一个模型将梁平均分为12段，得到有效导纳与均布力模型导纳对比曲线如图5所示。可见，梁分得越细，采用离散力模型计算获得的有效导纳曲线越接近均布力模型计算结果。梁平分为2段模型是离散力模型中最简单的模型，即梁中心受点力作用模型。从图5可以看出，其一阶模态附近的响应和均布力模型的一阶模态附近的响应保持一致。

建立$N=6$和$N=12$两个集中质量模型，根据刚度矩阵和质量矩阵计算两个模型的前5阶固有频率，如表1所示。与简支梁理论固有频率相比，低阶模态频率差别较小，随着模态阶数的升高，频率差别增大。随离散质量数增多，离散模型的固有频率趋近理论值。分别绘出$N=6$和$N=12$两个集中质量模型的有效导纳实部和虚部曲线，并与均布力模型有效导纳曲线对比，如图6所示。在低频段两条曲线和均布力模型有效导纳曲线几乎重合；在高频段离散力模型和均布力模型有效导纳曲线总体趋势一致，但缺失高阶固有频率处的共振峰。



(a) 实部

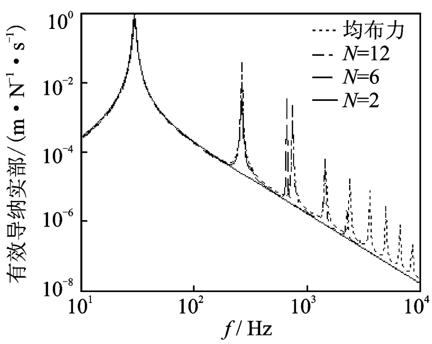


(b) 虚部

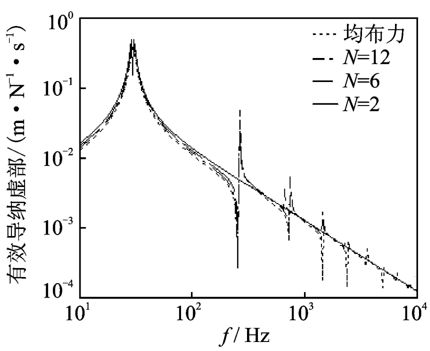
图5 离散点力的个数对离散力模型导纳曲线的影响

表1 集中质量模型固有频率与理论值对比 Hz

模态阶数	1	2	3	4	5
理论值	29.8	119.3	268.4	477.2	745.7
$N=12$	29.8	119.3	268.4	476.7	743.5
$N=6$	29.8	119.2	266.5	461.6	660.4



(a) 实部

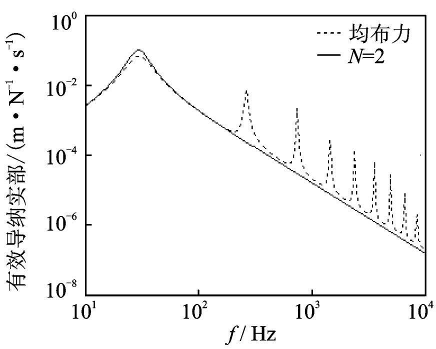


(b) 虚部

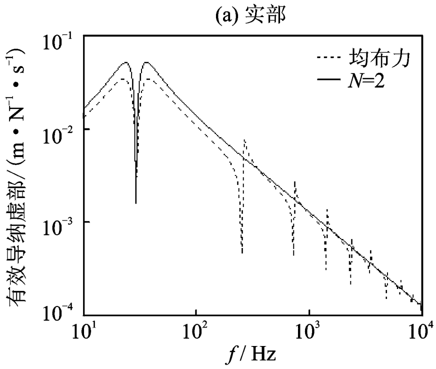
图6 集中质量模型和均布力模型有效导纳曲线

为了进一步分析集中质量模型和均布力模型的关系，建立最简单的$N=2$集中质量模型，该模型相当于单振子模型，其等效刚度[11]为$48EI/l^3$，E为梁的弹性模量，I为惯性矩，等效质量为梁总质量的一半，外激励力为F_0的一半。从图6可以看出，单振子在固有频率附近的导纳曲线和简支梁均布力模型有效导纳曲线几乎完全重合；在高频段两者走势基本一致。增大单振子模型和均布力模型的阻尼，取$c=10$，如图7所示，两者有效导纳曲线在高频段的趋势仍然保持一致，只在第1阶固有频率附近曲线出现差别。有效导纳的实部反映了外激励力输入到结构的能量，从图6和图7看出，对于小阻尼和大阻尼模型，均布力作用下的简支梁在第1阶共振峰处输入到梁上的能量达到最大，在高频段均随频率的升高而衰减。

工程中的许多模型都可以简化为简支梁受均布力作用模型。例如，加强筋与壁板线连接模型，其中加强筋高阶模态丰富，直接求解有效导纳计算量可观。如果外激励的频谱中能量在各频段分布比较均匀，或者外激励能量主要集中在低频段，从图6和图7可以发现，低阶模态对结构振动的影响比高阶模态大，特别是第1阶模态，这样就可以将简支梁简化为相应简谐力激励的单振子模型，避免了均布力导纳公式的求解和计算，快速获得筋结构振动响应的总体趋势，从而提高计算效率。另外，由于有效导纳公式并没有给出对应频率点的模态叠加数，在工程中使用不方便，采用单振子有效导纳预测低频响应具有明确的物理意义和合理性。



(a) 实部



(b) 虚部

图7　大阻尼下单振子导纳和均布力模型有效导纳曲线

5　结束语

离散力数目越多，简支梁的多点离散力模型越接近均布力模型。在第1阶固有频率附近，简支梁中点受点力作用和受均布力作用的振动响应相近。在高阶模态忽略的情况下，单振子导纳曲线能反映简支梁在均布力作用下振动响应随频率变化的趋势。

参　考　文　献

[1] Firestone F A. A new analogy between mechanical and electrical systems[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1933, 4: 249-267.

[2] Cremer L, Heckl M. Structure-borne sound[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1973:266-341.

[3] 兰凤崇，谢然，陈吉清. 车辆发动机悬置处的动态刚度仿真研究[J]. 振动、测试与诊断，2009，29(3):303-307.
Lan Fengchong, Xie Ran, Chen Jiqing. Simulation study on dynamic stiffness of engine mounting points on car body[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2009, 29(3):303-307. (in Chinese)

[4] Hammer P, Petersson B. Strip excitation, part I: strip mobility[J]. Journal of Sound and Vibration. 1989, 129(1):119-132.

[5] 钱斌，杨世兴，李志舜. 有效线导纳的仿真研究[J]. 声学学报，2004，29(2): 137-142.
Qian Bin, Yang Shixing, Li Zhishun. Simulation of effective line mobility[J]. Acta Acustica, 2004, 29(2): 137-142. (in Chinese)

[6] 钱斌. 圆柱壳组合系统振动噪声的有效导纳功率流法研究[D]. 西安：西北工业大学，2003.

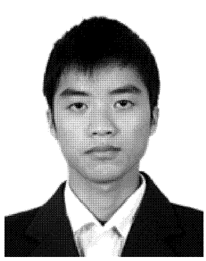
[7] Norwood C, Williamson H M, Zhao J Y. Surface mobility of a circular contact area on an infinite plate[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 202(1): 95-108.

[8] Li Y J, Joseph L. Prediction of surface mobility of a finite plate with uniform force excitation by structural intensity[J]. Applied Acoustics, 2000, 60:371-383.

[9] Soedel W. Vibrations of shells and plates[M]. New York: Marcel Dekker, 1993:182.

[10] 刘玉彬，白秉三. 结构力学[M]. 北京：科学出版社，2004: 201-213.

[11] William T, marie D. Theory of vibration with applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 258-394.



第一作者简介：张安付，男，1986年8月生，博士研究生。主要研究方向为噪声与振动控制。曾发表《双筒谐激励下双层隔振系统振动响应分析》(《第十二届船舶水下噪声学术讨论会论文集》长沙：《船舶力学》杂志社，2009年)等论文。
E-mail: anfu1769@163.com