

# 非线性转子系统碰摩故障的突变性能分析\*

刘华峰, 李建兰, 余辰, 高伟, 黄树红

(华中科技大学能源与动力工程学院 武汉, 430074)

**摘要** 采用突变理论对非线性转子系统碰摩故障的突变性能进行了定量研究,用平均法推导了非线性转子系统碰摩故障的频率响应方程,建立了碰摩故障的尖点突变流形和分叉集,确定了激励频率、偏心距、轴刚度非线性系数等导致系统突变的重要影响因素,分析了影响因子变化与突变发展的规律,提出了避免突变发生的预防措施,并通过数值计算方法验证了以上分析结论。

**关键词** 非线性转子; 碰摩故障; 尖点突变; 性能分析; 突变影响因素

**中图分类号** TH113.1; TH117.1

## 引言

旋转机械是电力、航空、冶金等行业广泛使用的关键核心设备<sup>[1-2]</sup>。随着现代工业的发展,旋转设备朝着大型化、高速化、精密化、系统化和高度自动化方向发展,一旦出现故障将造成严重后果。突变故障由于其外在形式的突发特性,往往比渐变故障具有更大的破坏性和危险性。一些学者采用分析、数值等方法对非线性振动的突变行为开展了研究。文献[3-4]采用数值方法研究了具有非线性刚度转子系统周期振动的分岔、拐弯、突变和滞后现象,结果显示控制参数在分岔值邻域的微小变化以及一定强度的外界扰动都可能导致转子系统同频周期振动幅值发生非连续的突变。李录平等<sup>[5]</sup>发现动静碰摩产生的转子热不平衡量与转子原始不平衡量合成后将可能导致转子振动发生突变。

突变理论是利用拓扑学、奇点理论、分叉理论等数学工具分析突变现象的理论,该理论通过描述系统在临界点的状态来研究外部连续的微小改变引起系统突然变化的规律<sup>[6]</sup>,已经在地质、建筑、生物、医学、军工、社会科学等领域得到了大量的应用<sup>[7-8]</sup>。在机械振动领域,突变理论也被初步用于振动突变的理论分析以及定性分析。Marco等<sup>[9]</sup>采用突变理论分析柔性转轴平面运动系统的稳定性,研究表明系统在操作过程中有可能会遇到折叠型、尖点型、蝴蝶

型的突变。刘树英等<sup>[10]</sup>采用突变理论对系统振动状态突变进行了数学描述。裴海林等<sup>[11]</sup>针对水力发电机组承重机架的振动失稳突变现象,建立了其突变模型,推导出了相应的非线性方程。

笔者采用突变理论对非线性转子系统碰摩故障的突变性能进行定量分析,通过建立碰摩故障的尖点突变流形和分叉集,确定系统状态发生突变的影响因子,讨论了振幅突变与影响因子的相关性,划分了系统工作的突变区域,并利用数值分析结果对基于突变理论的突变性能分析进行了验证。

## 1 碰摩故障突变影响因素

对于具有弹性支承及非线性刚度转轴的转子系统,其发生动静件碰摩的振动动力学模型<sup>[12]</sup>为

$$\begin{cases} \ddot{x} + \eta\dot{x} + \omega_0^2 x + k_s(x^2 + y^2)x = f\cos\omega t \\ \ddot{y} + \eta\dot{y} + \omega_0^2 y + k_s(x^2 + y^2)y = f\sin\omega t - f_g \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\eta$ 为阻尼系数; $\omega_0$ 为转子固有频率; $k_s$ 为轴刚度非线性项系数; $f$ 为单位质量偏心激振力振幅, $f = e\omega^2$ ; $e$ 为偏心距; $\omega$ 为转子转动角频率; $f_g$ 为非线性转子单位质量的重力(重力加速度); $x, y$ 为转子中心的位移。

采用平均法求解式(1)稳态解的频率响应方程。考虑主共振时转子弱非线性振动情况,设 $\omega_0^2 = (1 - \epsilon\sigma)\omega^2$ ,式(1)转化为

\* 国家自然科学基金资助项目(编号:50975105);国家重点基础研究发展计划(“九七三”计划)资助项目(编号:2009CB219803)

收稿日期:2011-09-02;修改稿收到日期:2011-10-27

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \\ \varepsilon[-\eta\dot{x} + \sigma\omega^2 x - k_s(x^2 + y^2)x + f\cos\omega t] \\ \ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon F_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) - f_g = \varepsilon[-\eta\dot{y} + \\ \sigma\omega^2 y - k_s(x^2 + y^2)y + f\cos\omega t] - f_g \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\varepsilon$  为小参数;  $\sigma$  为协调参数, 表示转子转动角频率  $\omega$  与固有频率  $\omega_0$  的接近程度。

$$\text{设 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_g}{\omega^2} \end{bmatrix}, \varphi = \omega t + \theta, a \text{ 为转子}$$

激振响应的振幅, 且  $a, \theta$  为时间的慢变函数, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{a}\omega\sin(\omega t + \theta) - a\omega^2\cos(\omega t + \theta) - a\omega\theta\cos(\omega t + \theta) \\ \dot{a}\omega\cos(\omega t + \theta) - a\omega^2\sin(\omega t + \theta) - a\omega\theta\sin(\omega t + \theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

联立式(2)和式(3), 得到

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ a\dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega} \begin{bmatrix} -F_1\sin\varphi + F_2\cos\varphi \\ -F_1\cos\varphi - F_2\sin\varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

令  $\dot{a} = \varepsilon Y, \varphi = \theta, \dot{\varphi} = \varepsilon Z$ , 则

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ a\dot{Z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -F_1\sin\varphi + F_2\cos\varphi \\ -F_1\cos\varphi - F_2\sin\varphi \end{bmatrix} d\varphi \quad (5)$$

求得

$$\begin{cases} \dot{Y} = -\frac{1}{\omega}(\eta a \omega + f \sin\theta) \\ a\dot{Z} = \frac{1}{a\omega} \left[ k_s a^3 + \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right) a - f \cos\theta \right] \end{cases} \quad (6)$$

令  $\dot{Y} = 0, \dot{Z} = 0$ , 系统稳态解频率响应方程为

$$a^6 + \frac{2}{k_s} \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right) a^4 + \frac{1}{k_s^2} \left[ \omega^2 \eta^2 + \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right)^2 \right] a^2 - \frac{(e\omega^2)^2}{k_s^2} = 0 \quad (7)$$

式(7)是以  $a^2$  为变量的最高幂次为3的三项式,

令  $y = a^2 + \frac{2}{3k_s} \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right)$ , 则式(7)可以转化为

$$\begin{cases} 4y^3 + 2uy + v = 0 \\ u = \frac{2}{k_s^2} \left[ \omega^2 \eta^2 - \frac{1}{3} \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right)^2 \right] \\ v = -\frac{4}{k_s^3} \left[ k_s (e\omega^2)^2 + \frac{2}{3} \omega^2 \eta^2 \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right) + \frac{2}{27} \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right)^3 \right] \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $y$  为状态变量;  $u$  为分裂因子;  $v$  为正则因子。

式(8)即为尖点突变流形。因此, 对式(8)求一阶导并联立突变流形, 得到分叉集为

$$8u^3 + 27v^2 = 0 \quad (9)$$

振幅尖点突变流形和分叉集的几何形状如图1所示, 图中曲面的上叶为稳定的大幅振动, 下叶

为稳定的小幅振动, 中叶对应于不稳定的周期振动。由图1可以看出, 系统突变的发生取决于分裂因子  $u$  和正则因子  $v$  的取值。当  $u \geq 0$  时,  $v$  的变化只引起振幅的光滑变化, 系统不会发生突变; 当  $u < 0$  且  $8u^3 + 27v^2 \leq 0$  时,  $u$  的连续变化可能导致振幅的不连续变化, 振幅可能在上、下叶之间出现不连续的跳动, 即存在突变。因此, 振幅存在突变的条件为

$$\begin{cases} u < 0 \\ 8u^3 + 27v^2 \leq 0 \\ u = \frac{2}{k_s^2} \left[ \omega^2 \eta^2 - \frac{1}{3} \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right)^2 \right] \\ v = -\frac{4}{k_s^3} \left[ k_s (e\omega^2)^2 + \frac{2}{3} \omega^2 \eta^2 \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right) + \frac{2}{27} \left( 2 \frac{k_s f_g^2}{\omega^4} - \sigma \omega^2 \right)^3 \right] \end{cases} \quad (10)$$

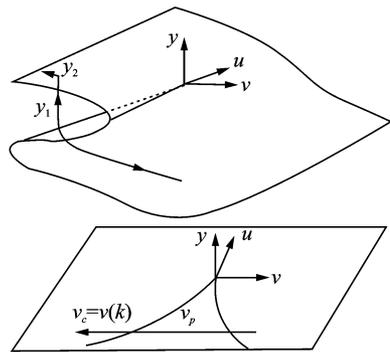


图1 振幅突变流形与分叉集

根据突变理论, 系统振幅可能发生的所有突变都在式(10)得到满足时出现。因此, 从式(10)得到引起系统突变的影响因子为激励频率  $\omega$ 、偏心距  $e$ 、轴刚度非线性项系数  $k_s$ 、阻尼系数  $\eta$ 、非线性转子的重力  $f_g$ 。在机械工作过程中,  $\eta, f_g$  一般可以近似为常数。因此, 在系统结构不变的情况下, 引起转子系统振动突变的主要因素是  $\omega, e, k_s$  等参数的变化。当转子系统的结构发生变化时, 例如叶片断裂、轴裂纹等故障发生时, 将会导致转子固有频率发生变化, 根据式(2)和式(10)可知, 此时也有可能引起振动突变。

对于一个参数确定的转子振动系统, 通过求解式(10)即可得到引起系统突变的影响因子的取值范围。因此, 在工程应用中为了保证系统的运行安全, 应避免使各影响因子的状态值落入突变范围。

## 2 碰摩故障的突变性能分析

设置非线性转子系统特性参数<sup>[4]</sup>如下:  $m = 20 \text{ kg}, k = 6 \times 10^6 \text{ N/m}, \eta = 60 \text{ s}^{-1}, f_g = 9.8 \text{ m/s}^2$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 。笔者将分别采用突变理论和数值方法对转子系统碰摩故障的突变性能进行分析研究。

## 2.1 基于突变理论的突变性能分析

将系统参数带入式(10),计算得到突变影响因子 $\omega, e, k_s$ 与系统突变的关系如图2所示。被曲面所包围的区域即突变区域,当 $\omega, e, k_s$ 满足突变区域时,则转子振幅会发生突变。

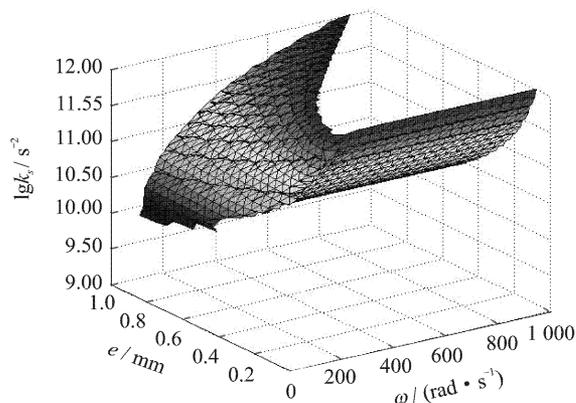


图2 系统突变与 $\omega, e, k_s$ 三维关系图

为了便于更加清晰、简单地分析突变影响因子变化对转子系统运行状态的影响,分别对3个突变影响因子进行二维分析,即对其中一个影响因子取定值,再分析其他两个因子的变化与突变的关系。在实际过程中,轴刚度非线性项系数 $k_s$ 与激励频率 $\omega$ 存在耦合关系,但是为了简化分析,不考虑其中的耦合性,忽略了简化导致的误差。

1) 取 $e=0.4\text{ mm}$ ,将参数带入式(10),得到 $k_s, \omega$ 与振幅突变的关系如图3所示。阴影区域表示突变区域,突变区域由上、下两条边界曲线所包围的区域构成。由于 $k_s$ 变化范围比较大,因此取 $k_s$ 的常用对数 $\lg k_s$ 作为纵坐标。

由图3可以看出,在给定的前提下,当 $k_s$ 与 $\omega$ 满足一定条件时,将导致系统振幅突变。突变区域上边界中 $k_s$ 与 $\omega$ 的突变阈值具有正比关系,即随着 $\omega$ 的增大,相应的 $k_s$ 突变阈值也增大。因此,对于一定的 $k_s$ ,可以通过减小 $\omega$ 来避开突变区域;或者对于一定的 $\omega$ ,通过提高 $k_s$ 来避开突变区域。下边界中 $k_s$ 随 $\omega$ 的增大基本保持不变,表明当 $k_s$ 小于某一固定阈值时,无论 $\omega$ 如何变化,系统都不会发生突变。

取角频率 $\omega=800\text{ rad/s}$ ,由图3可以得到发生振幅突变的 $k_s$ 区间为: $10.653\text{ s}^{-2} < \lg k_s < 12.675\text{ s}^{-2}$ ,即 $4.50 \times 10^{10}\text{ s}^{-2} < k_s < 4.73 \times 10^{12}\text{ s}^{-2}$ 。

2) 取 $\omega=700\text{ rad/s}$ ,将参数带入式(10),得到

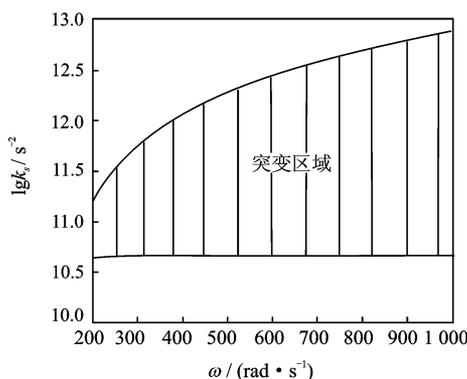


图3 角频率与轴刚度非线性系数关系曲线

$k_s, e$ 与振幅突变的关系如图4所示。阴影区域表示突变区域,突变区域由上、下两条边界曲线所包围的区域构成。

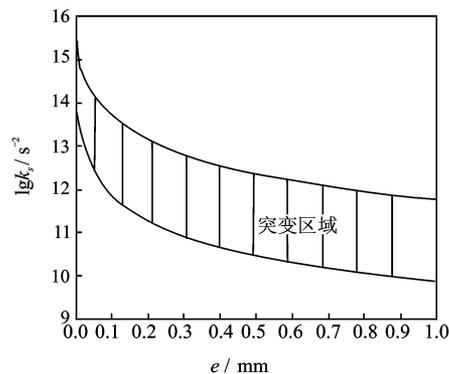


图4 偏心距与轴刚度非线性系数关系曲线

由图4可以看出,在给定的前提下,当 $k_s$ 与 $e$ 满足一定条件时,将导致系统振幅突变。但是和 $k_s$ 与 $\omega$ 突变关系不同的是,突变区域上、下边界中 $k_s$ 与 $e$ 的突变阈值都具有反比关系,即随着 $e$ 的增大,相应的 $k_s$ 突变阈值减小。因此,根据图4可以求出导致突变的 $k_s$ 和 $e$ 区域。例如当 $k_s=3 \times 10^{10}\text{ s}^{-2}$ 时,发生振幅突变的区间为 $0.49\text{ mm} < e < 4.4\text{ mm}$ 。而在实际中系统振幅会随着 $e$ 的增大而显著增大,因此,一般不会采用增加偏心距的方式来避开突变,而是采取措施使 $e$ 小于 $0.49\text{ mm}$ 以避开突变区间。

3) 取 $k_s=3 \times 10^{10}\text{ s}^{-2}$ ,将参数带入式(10),得到 $\omega, e$ 与振幅突变的关系如图5所示,突变区域由左、右两条边界曲线所包围的区域构成。

由图5可以看出,在给定的前提下,当 $\omega$ 与 $e$ 满足一定条件时,将导致系统振幅突变。突变区域左边界中 $e$ 随 $\omega$ 的增大基本保持不变,表明当 $e$ 小于某一固定阈值时, $\omega$ 的变化都不会导致系统突变。右边界中 $e$ 与 $\omega$ 的突变阈值具有正比关系,即随着 $e$ 增大,

相应的 $\omega$ 突变阈值也增大。由于右边界中 $e$ 最小的突变阈值都大于1.5 mm,一般不会采用增加偏心距的方式来避开突变。例如 $\omega=800$  rad/s时,发生振幅突变的区间为 $0.49 \text{ mm} \leq e \leq 5 \text{ mm}$ ,为了避开突变,应选取 $e < 0.49 \text{ mm}$ 。

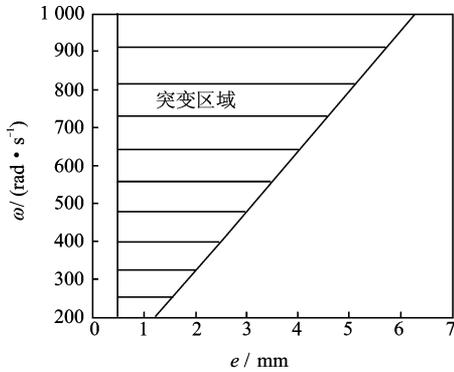


图5 偏心距与角频率关系曲线

## 2.2 基于四阶Runge-Kutta法的突变性能分析

引入参数 $\tau = \omega t$ 并写成一阶微分方程的形式,则式(1)转化为

$$\begin{cases} \dot{x} = x_v \\ \dot{x}_v = -\frac{\eta x_v}{\omega} - \frac{\omega_0^2 x}{\omega^2} - \frac{k_s(x^2 + y^2)x}{\omega^2} + e \cos \tau \\ \dot{y} = y_v \\ \dot{y}_v = -\frac{\eta y_v}{\omega} - \frac{\omega_0^2 y}{\omega^2} - \frac{k_s(x^2 + y^2)y}{\omega^2} + e \sin \tau - \frac{f_g}{\omega^2} \end{cases} \quad (11)$$

笔者采用标准四阶Runge-Kutta方法对式(11)进行数值积分,将转子系统的参数带入后即可求得稳态响应的数值解。为获得稳态响应,所有结果均为舍去前1 000个以上周期后获得。部分计算结果如图6和图7所示。

图6所示为 $k_s = 3 \times 10^{10} \text{ s}^{-2}$ 以及角频率 $\omega = 800$  rad/s时,计算得到的偏心距 $e$ 与振幅 $A$ 的关系。由图6可以看出,在 $e < 0.5 \text{ mm}$ 的区间,振幅随偏心距的增大连续增大,而当 $e = 0.5 \text{ mm}$ 时,振幅突然发生明显的阶跃,幅值增大了3倍,显然此处产生了振幅突变。 $e > 0.5 \text{ mm}$ 以后,振幅随偏心距增大又连续缓慢增大,故 $e = 0.5 \text{ mm}$ 是振幅突变的阈值,该结论与图5采用突变理论分析得到的结果是相符的。

图7所示为 $e = 0.4 \text{ mm}$ , $\omega = 800$  rad/s时,计算得到的轴刚度非线性系数 $k_s$ 与振幅 $A$ 的关系。当 $\lg k_s < 10.7 \text{ s}^{-2}$ 时,振幅随 $k_s$ 的增大变化缓慢。当 $\lg k_s = 10.7 \text{ s}^{-2}$ 时,振幅突然发生明显的阶跃,显然

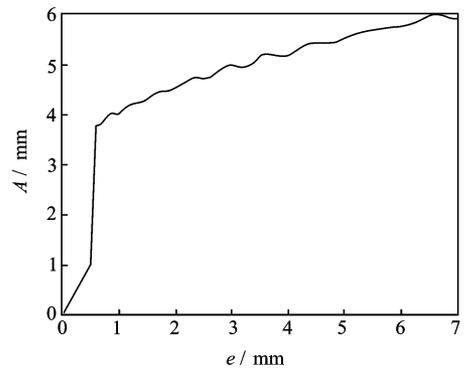


图6 振幅与偏心距的关系

此处产生了振幅突变。 $\lg k_s > 10.7 \text{ s}^{-2}$ 以后,振幅随 $k_s$ 增大连续缓慢减小,直至 $\lg k_s = 12 \text{ s}^{-2}$ 左右时,振幅才逐渐恢复至突变前的水平。因此 $\lg k_s = 12 \text{ s}^{-2}$ 是振幅突变的阈值,该结论与图3采用突变理论分析得到的结果基本相符。

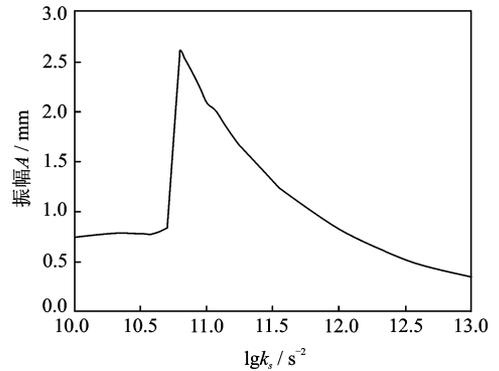


图7 振幅与轴刚度非线性系数关系

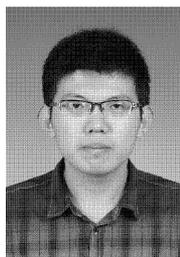
通过对碰磨故障突变性能的分析结果可以看出,分别根据突变理论和四阶Runge-Kutta法分析得到的结论是一致的,从而证明了采用突变理论对碰磨振动故障的突变性能分析是可行和正确的。在基于突变理论的突变性能分析中,还能够同时分析多个突变影响因子与突变的相关性,得到明确的突变区间,为系统的安全运行提供技术指导。

## 3 结束语

笔者采用突变理论对非线性转子系统碰磨故障的突变性能进行了定量研究,确定了激励频率、偏心距、轴刚度非线性系数等导致系统突变的重要影响因子,绘制了影响因子与突变的关系曲线,分析了影响因子变化与突变发展的规律,提出了避免突变发生的预防措施,并通过数值计算方法验证了以上分析结论。

## 参 考 文 献

- [1] 肖小清,刘石,冯永新,等. 发电机转子弯曲振动问题分析与处理[J]. 振动、测试与诊断,2011,31(2):259-261.  
Xiao Xiaoqing, Liu Shi, Feng Yongxin, et al. Analysis and treatment of generator rotor bending vibration problems [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011,31(2):259-261. (in Chinese)
- [2] 刘长利,谢鹏儒,周邵萍,等. 基于有限元的呼吸裂纹转子动力学特性[J]. 振动、测试与诊断,2011,31(2):185-189.  
Liu Changli, Xie Pengru, Zhou Shaoping, et al. Dynamic characteristics of breath cracked rotor based on finite element [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011,31(2):185-189. (in Chinese)
- [3] 陈安华,刘德顺,朱萍玉. 非线性转子碰摩振动周期响应的分岔与振幅突变[J]. 中国机械工程,2001,12(2):126-128.  
Chen Anhua, Liu Deshun, Zhu Pingyu. Nonlinear response of the rub-impacting rotor vibration cycle bifurcation and amplitude catastrophe [J]. China Mechanical Engineering, 2001, 12 (2): 126-128. (in Chinese)
- [4] 吴敬东,侯秀丽,刘长春,等. 非线性刚度转子系统主共振解析分析[J]. 中国机械工程,2006,17(5):539-541.  
Wu Jingdong, Hou Xiuli, Liu Changchun, et al. Theoretical analysis of characteristics on main resonance of a rotating system with nonlinear stiffness [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(5): 539-541. (in Chinese)
- [5] 李录平,黄琪,邹新元. 大型汽轮发电机组碰摩引起的振动突变机理[J]. 电力科学与技术学报,2007,22(1):51-55.  
Li Luping, Huang Qi, Zou Xinyuan. Vibration catastrophe mechanism of large steam turbogenerator unit caused by rub [J]. Journal of Electric Power Science and Technology, 2007,22(1):51-55. (in Chinese)
- [6] 勒内·托姆. 突变论:思想和应用[M]. 周仲良,译. 上海:上海译文出版社,1989:104-106.
- [7] 闫长斌,王泉伟,李国权,等. 邻近爆破对矩形岩柱稳定性影响的突变理论分析[J]. 爆炸与冲击,2010,30(5):556-560.  
Yan Changbin, Wang Quanwei, Li Guoquan, et al. Stability analysis of rectangular rock pillars influenced by vicinal blasting with catastrophe theory [J]. Explosion and Shock Waves, 2010, 30 (5): 556-560. (in Chinese)
- [8] 刘长征,李迪,孙尧. 基于突变理论的心脏运动数学描述[J]. 国外医学生物医学工程分册,2003,26(4):162-165.  
Liu Changzheng, Li Di, Sun Yao. Mathematic description of cardiac movement based on catastrophe theory [J]. Foreign Medical Biomedical Engineering Fascicle, 2003,26(4):162-165. (in Chinese)
- [9] Marco C, Duffy J, Castelli V P. Catastrophe analysis of a planar system with flexural pivots [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002,37:693-716.
- [10] 刘树英,宋雪萍,闻邦椿. 转子系统故障发展过程的突变[J]. 东北大学学报:自然科学版,2005,26(3):285-288.  
Liu Shuying, Song Xueping, Wen Bangchun. Catastrophe in fault developing process of rotor system [J]. Journal of Northeastern University: Edition of Natural Science, 2005,26(3):285-288. (in Chinese)
- [11] 裴海林,齐学义,朱润洲. 水力发电机承重机架的振动失稳突变[J]. 振动、测试与诊断,2005,25(4):311-314.  
Pei Hailin, Qi Xueyi, Zhu Runzhou. Research on vibration buckling catastrophe of loaded hydro-electric set frame [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2005,25(4):311-314. (in Chinese)
- [12] 胡葛庆,陈敏,刘耀宗,等. 非线性转子系统碰摩现象的动力学仿真[J]. 国防科学技术大学学报,2000,22(6):101-104.  
Hu Niaoqing, Chen Min, Liu Yaozong, et al. Numerical analysis of rub-impact phenomena of nonlinear rotor systems [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2000,22(6):101-104. (in Chinese)



第一作者简介:刘华峰,男,1987年8月生,硕士研究生。主要研究方向为旋转机械突变故障诊断。

E-mail: lhf\_0513@163.com