# 分布动载荷识别的二维小波-伽辽金方法*

秦远田
（南京航空航天大学微小卫星研究中心　南京，210016）

**摘要**　根据张量积二维小波理论，利用Daubechies 小波的正交性，建立了基于梁结构动力学方程和有限元方程的一维分布动载荷的识别方法，即二维小波-伽辽金方法。该方法将动力学方程和有限元方程由时域转化到小波域中，从而将时域中复杂的卷积关系变成小波域中简单方程组的求解。仿真算例表明，该方法能有效识别一维梁结构上的分布动载荷且计算效率较高。

**关键词**　载荷识别；分布动载荷；动力学；小波方法
**中图分类号**　O313

## 引　言

动载荷根据其在结构上的作用形式可分为集中动载荷和分布动载荷，集中动载荷函数只有一个时间变量，而分布动载荷是作用在空间连续结构上的连续动载荷，分布动载荷函数具有时间和空间变量，是二维函数。目前，集中动载荷识别方法有频域识别方法、时域识别方法等。许训等[1]研究了识别方法对测点和噪声的鲁棒性问题。Pezerat 等[2]研究了基于板结构响应及力分析技术的结构载荷幅值和位置的识别问题。

分布动载荷的识别难度较大，笔者运用矩量方法研究了二维分布动载荷的识别问题，将分布动载荷由拟合系数和正交函数来表达，把二维分布动载荷识别问题转化成拟合系数的识别[3]。

小波是近年来的研究热点之一，小波分析方法已经广泛运用于各领域。杨萍等[4]将小波正交算子与动力学建模理论相结合，构建了动载荷识别模型。吴邵庆等[5]提出用一维 Wavelet-Galerkin 方法识别桥面移动载荷，构建了移动载荷的小波识别模型，该方法能消除测量信号在获取过程中由于函数拟合带来的误差。Mira Mitra 等[6]运用小波元法识别结构的冲击载荷。A. Khorram 等[7]运用小波方法对移动载荷作用下梁结构的损伤进行探测，对基于小波变换的两种探测方法进行了对比研究。

笔者在已有的研究基础上，根据张量积理论，讨论了二维小波正交基的性质。首先，运用二维 Daubechies 小波-伽辽金方法及其正交性，结合一维梁结构动力学方程，建立了梁模型空间一维分布动载荷识别模型，将动力学方程直接转化到小波域，通过求解简单解方程组来实现分布动载荷的识别；然后，建立了基于复杂结构有限元方程的一维空间分布动载荷识别模型，把识别方法更加工程化；最后，通过梁模型算例验证了识别模型。

## 1　识别模型

### 1.1　小波理论

小波函数 $\varphi(x)$ 是一个在 $(-\infty,+\infty)$ 区间积分为零的函数（容许条件）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$

称之为母小波（mother wavelet）或基小波（basic wavelet）。经过伸缩 $2^j$ 和平移 $k$ 产生一族张成平方可积实数空间 $L^2(R)$ 的一个函数基底

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) \qquad (j,k \in Z) \tag{2}$$

任何函数 $f(x)\in L^2(R)$ 均可表示为

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\varphi_{j,k}(x) \tag{3}$$

其中

$$d_{j,k} = \langle f(x),\varphi_{j,k}(x)\rangle \tag{4}$$

* 收稿日期：2012-07-12；修改稿收到日期：2012-09-13

其中:〈〉表示内积。

设小波空间$V_j$为$\{\varphi_{j,k}:k\in Z\}$的线性张成的闭包,即

$$V_j := \mathrm{clos}_{L^2(R)}\{\varphi_{j,k} : k \in Z\} \qquad (j \in Z) \tag{5}$$

则$L^2(R)$能够分解为小波空间$V_j$的直和为

$$L^2(R) = \sum_{j\in Z} V_j = \cdots \dotplus V_{-1} \dotplus V_0 \dotplus V_1 \dotplus \cdots \tag{6}$$

## 1.2 二维小波的性质

定义$\overline{V}_j\in L^2(R^2)$为代数张量积$V_j\times V_j\in L^2(R^2)$模下的闭包,具有下列性质:

1) $\overline{V}_0=V_0\times V_0=\mathrm{span}\{F(x,y)=f(x)g(y),f,g\in V\}$;

2) $F(x,y)\in\overline{V}_0\Rightarrow F(2^jx,2^jy)\in\overline{V}_j$,因此$\overline{V}_j\in\overline{V}_{j+1},j\in Z$;

3) $\bigcup_{j\in Z}\overline{V}_j=L^2(R^2)$,$\bigcap_{j\in Z}\overline{V}_j=\{0\}$,$\{\Phi_k(x-n_1)\times\Phi_l(x-n_2),n_1,n_2\in Z,k,l=1,2,\cdots,r\}$构成$\overline{V}_0$的正交基,$\{2^{-j}\Phi_k(2^{-j}x-n_1)\Phi_l(2^{-j}x-n_2),n_1,n_2\in Z,k,l=1,2,\cdots,r\}$构成$\overline{V}_j$的正交基;

4) $\overline{W}_j$为$\overline{V}_{j-1}$在$\overline{V}_j$中的正交补

$$\begin{aligned}\overline{V}_{j+1}&=V_{j+1}\otimes V_{j+1}=(V_j\oplus W_j)\otimes(V_j\oplus W_j)=\\&V_{j+1}\otimes V_{j+1}\oplus[V_{j+1}\otimes W_{j+1}\oplus W_{j+1}\otimes\\&V_{j+1}\oplus W_{j+1}\otimes W_{j+1}]=\overline{V}_j\oplus\overline{W}_j\end{aligned}$$

由上述性质构成二维多分辨率分析。

## 1.3 梁结构分布动载荷识别模型

伯努里-欧拉梁的动力学方程为

$$\rho A\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}+C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+EI\frac{\partial^4u(x,t)}{\partial u^4}=f(x,t) \tag{7}$$

其中:$\rho A$为结构的单位长度质量;$C$为黏性阻尼系数;$EI$为结构的抗弯刚度,$u(x,t)$为结构的横向振动响应;$f(x,t)$为作用在梁上的分布动载荷。

运用Daubechies小波在$j$尺度下对$u(x,t)$,$f(x,t)$进行分解

$$u(x,t)=\sum_{k=I_t}^{J_t}\sum_{l=I_x}^{J_x}\widetilde{d}_{k,l}2^j\varphi(2^jt-k)2^j\varphi(2^jx-l) \tag{8}$$

$$f(x,t)=\sum_{k=I_t}^{J_t}\sum_{l=I_x}^{J_x}\widetilde{g}_{k,l}2^j\varphi(2^jt-k)2^j\varphi(2^jx-l) \tag{9}$$

则

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=2^j\sum_{k=I_t}^{J_t}\sum_{l=I_x}^{J_x}\widetilde{d}_{k,l}2^j\dot{\varphi}(2^jt-k)2^j\varphi(2^jx-l) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=2^{2j}\sum_{k=I_t}^{J_t}\sum_{l=I_x}^{J_x}\widetilde{d}_{k,l}2^j\ddot{\varphi}(2^jt-k)2^j\varphi(2^jx-l) \tag{11}$$

$$\frac{\partial^4u(x,t)}{\partial x^4}=2^{4j}\sum_{k=I_t}^{J_t}\sum_{l=I_x}^{J_x}\widetilde{d}_{k,l}2^j\varphi(2^jt-k)2^j\varphi^{(4)}(2^jx-l) \tag{12}$$

令$d_k=2^{\frac{j}{2}}\widetilde{d}_k$,根据相关文献,式(8)的离散形式可以写成

$$u_{i,j}=\sum_k\sum_l d_{i-k,j-l}\varphi_k\varphi_l \tag{13}$$

载荷函数$f(x,t)$的分解形式为

$$f_{i,j}=\sum_k\sum_l g_{i-k,j-l}\varphi_k\varphi_l \tag{14}$$

将式(13)、式(14)代入式(7)有

$$\begin{aligned}&\rho A2^{2j}\sum_{k=2^jt_0+2-2N}^{2^jt_{N_t}-1}\sum_{l=2^jx_0+2-2N}^{2^jx_{N_x}-1}d_{k,l}\ddot{\varphi}(\hat{t}-k)\varphi(\hat{x}-l)+\\&C2^j\sum_{k=2^jt_0+2-2N}^{2^jt_{N_t}-1}\sum_{l=2^jx_0+2-2N}^{2^jx_{N_x}-1}d_{k,l}\dot{\varphi}(\hat{t}-k)\varphi(\hat{x}-l)+\\&EI2^{4j}\sum_{k=2^jt_0+2-2N}^{2^jt_{N_t}-1}\sum_{l=2^jx_0+2-2N}^{2^jx_{N_x}-1}d_{k,l}\varphi(\hat{t}-k)\varphi^{(4)}(\hat{x}-l)=\\&\sum_{k=2^jt_0+2-2N}^{2^jt_{N_t}-1}\sum_{l=2^jx_0+2-2N}^{2^jx_{N_x}-1}g_{k,l}\varphi(\hat{t}-k)\varphi(\hat{x}-l)\end{aligned} \tag{15}$$

在式(15)两边同时用$\varphi(\hat{t}-\hat{k})\varphi(\hat{x}-\hat{l})$做内积,并根据尺度函数的正交性质,则式(15)为

$$\begin{aligned}&\rho^A2^{2j}\sum_{k=\hat{k}+2-2N}^{\hat{k}-2+2N}d_{k,l}\Omega^2_{k-\hat{k}}+C^{2j}\sum_{k=\hat{k}+2-2N}^{\hat{k}-2+2N}d_{k,l}\Omega^1_{k-\hat{k}}+\\&EI2^{4j}\sum_{l=\hat{l}+2-2N}^{\hat{l}-2+2N}d_{k,l}\Omega^4_{l-\hat{l}}=g_{k,l}\end{aligned} \tag{16}$$

其中:$k,\hat{k}=0,1,\cdots,N_t-1$;$l,\hat{l}=0,1,\cdots,N_x-1$;$\Omega^1_{k-\hat{k}}=\int\dot{\varphi}(\hat{t}-k)\varphi(\hat{t}-\hat{k})\mathrm{d}\hat{t}$;$\Omega^2_{k-\hat{k}}=\int\ddot{\varphi}(\hat{t}-k)\varphi(\hat{t}-\hat{k})\mathrm{d}\hat{t}$;$\Omega^4_{l-\hat{l}}=\int\varphi^{(4)}(\hat{x}-l)\varphi(\hat{x}-\hat{l})\mathrm{d}\hat{x}$。

它们分别为1阶、2阶和4阶的连接系数,各阶连接系数的值见表1。

式(16)的矩阵形式为

$$\rho A2^{2j}\widetilde{\Omega}^2\boldsymbol{D}+C2^j\widetilde{\Omega}^1\boldsymbol{D}+EI2^{4j}\boldsymbol{D}\hat{\Omega}^{4\mathrm{T}}=\boldsymbol{G} \tag{17}$$

其中:$\boldsymbol{D}$为式(13)的系数矩阵;$\boldsymbol{G}$为式(14)的系数矩阵;$\hat{\Omega}^i$为式(16)的系数矩阵。

由式(17)可以求出分布动载荷$\boldsymbol{F}$的小波变换系数$\boldsymbol{G}$,再运用小波逆变换,求解分布动载荷$\boldsymbol{F}$为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\Phi}^1\boldsymbol{G}\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

其中:$\Phi$,$\overline{\Phi}$分别为基于时间维和空间维的小波变换系

表1　D6小波连接系数

| 1阶连接系数 | 2阶连接系数 | 3阶连接系数 | 4阶连接系数 |
|---|---|---|---|
| $3.424\,657\,534\,2\times10^{-4}$ | $-5.357\,142\,857\,1\times10^{-3}$ | $-7.5\times10^{-3}$ | $-5.625\times10^{-2}$ |
| $1.461\,187\,214\,6\times10^{-2}$ | $-1.142\,857\,142\,8\times10^{-1}$ | $-8.0\times10^{-2}$ | $-3.0\times10^{-1}$ |
| $-1.452\,054\,794\,5\times10^{-1}$ | $8.761\,904\,761\,9\times10^{-1}$ | $8.95\times10^{-1}$ | 1.925 |
| $7.452\,054\,794\,5\times10^{-1}$ | $-3.390\,476\,190\,4$ | $-1.52$ | $-4.1$ |
| 0 | 5.267 857 142 8 | 0 | 5.062 5 |
| $-7.452\,054\,794\,5\times10^{-1}$ | $-3.390\,476\,190\,4$ | 1.52 | $-4.1$ |
| $1.452\,054\,794\,5\times10^{-1}$ | $8.761\,904\,761\,9\times10^{-1}$ | $-8.95\times10^{-1}$ | 1.925 |
| $-1.461\,187\,214\,6\times10^{-2}$ | $-1.142\,857\,142\,8\times10^{-1}$ | $8.0\times10^{-2}$ | $-3.0\times10^{-1}$ |
| $-3.424\,657\,534\,2\times10^{-4}$ | $-5.357\,142\,857\,1\times10^{-3}$ | $7.5\times10^{-3}$ | $-5.625\times10^{-2}$ |

数矩阵。

如果将梁结构的动力学方程写成有限元方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f} \tag{19}$$

其中：$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{K}$为系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵；$\boldsymbol{f}$为作用于系统的外载荷矢量；$\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{u}}$，$\ddot{\boldsymbol{u}}$为结构的位移、速度、加速度响应矢量。

小波域中表达式为

$$2^{2j}\boldsymbol{M}\,\tilde{\Omega}^{2}\boldsymbol{D}+2^{j}\boldsymbol{C}\,\tilde{\Omega}^{1}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{G} \tag{20}$$

由式(17)同样可以求出分布动载荷$\boldsymbol{F}$。

上面分别从梁的动力学方程及其有限元方程推导了其分布动载荷的识别模型。该模型将动力学方程转化到小波域中，避免识别过程中求解动力学方程并对矩阵求逆，简化了计算过程。该模型不仅对梁模型适用，对于复杂结构的有限元方程，同样可以识别空间一维连续的分布动载荷。

## 2　仿真算例

系统为一维梁结构，设梁的长度为1 m，材料为钢，两端固支。在有限元软件中，将结构划分为65个梁单元，有66个节点，除去两端的节点外，64个节点响应数据可用。在有限元软件中提取结构的刚度矩阵和质量矩阵，结构上作用一维分布动载荷$f(x,t)=\cos(2\pi t)\sin(\pi x)-2\pi\sin(2\pi t)\sin(\pi x)$，如图1所示。

下面算例取32个节点响应作为输入(即在64个响应数据中每隔一个取数)，识别分布载荷的情况。每个节点响应时间长度为1 s，采样点数为512。根据式(17)，识别分布载荷如图2所示，识别误差如图3所示。在响应中加入1%随机噪声时的识别结果如图4所示，识别误差见图5。在响应中加入5%随机噪声时的识别结果见图6，识别误差如图7所示。

从上面的识别结果可看出，当响应数据无噪声污染时，识别精度较好。当噪声污染达到5%时，识别

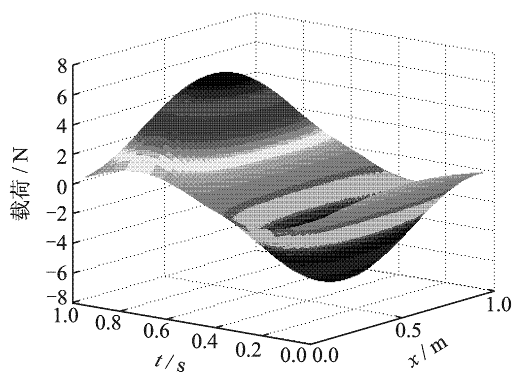



图1　理论载荷

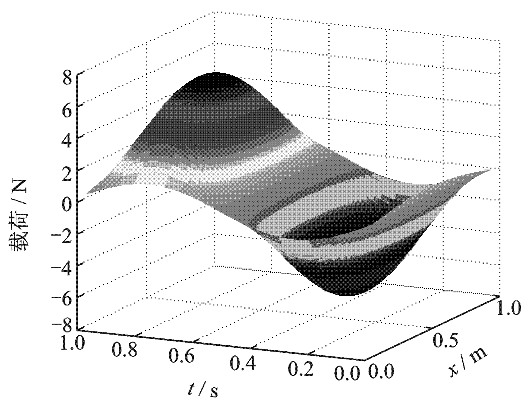



图2　识别载荷(无噪声)

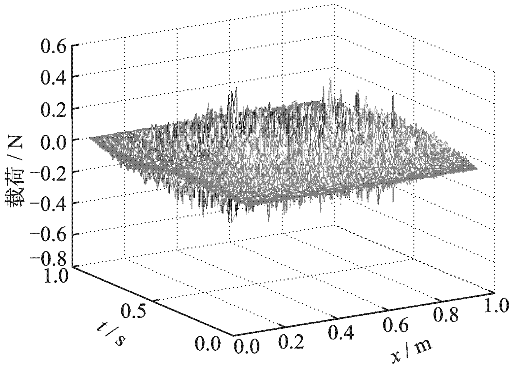



图3　识别载荷误差(无噪声)

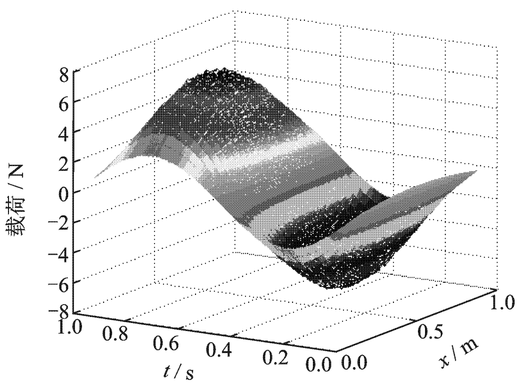



图4 识别载荷(1%噪声)

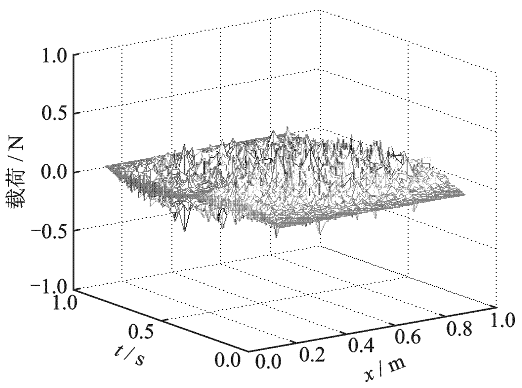



图5 识别载荷误差(1%噪声)

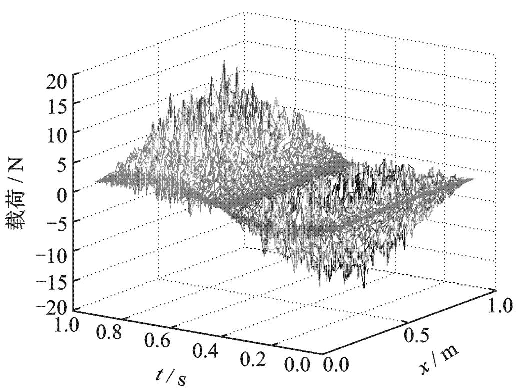



图6 识别载荷(5%噪声)

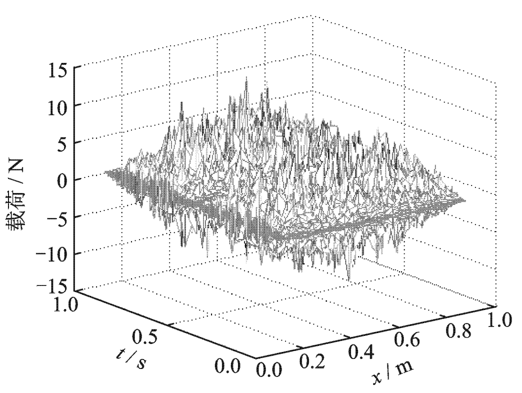



图7 识别载荷误差(5%噪声)

误差有放大的趋势。在识别过程中,可以对污染的响应数据进行去噪处理,滤除响应中的高频噪声。图8和图9是对响应数据进行去噪处理后的识别结果,识别误差得到控制。

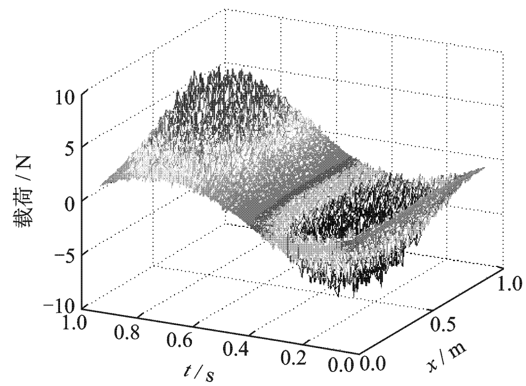



图8 识别载荷(5%噪声,去噪处理)

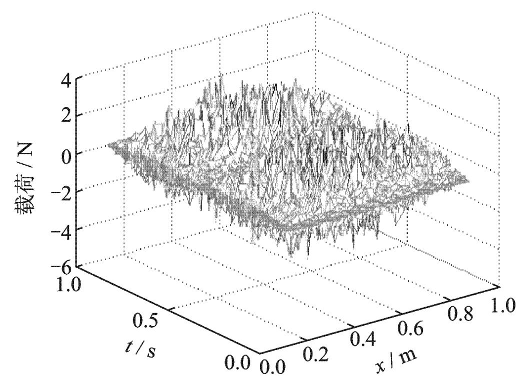



图9 识别载荷误差(5%噪声,去噪处理)

用小波方法识别分布动载荷时,动力学方程中的卷积计算转换成方程组的求解,因此计算效率得到提高。上述模型分别在时间和空间上取不同的采样点数,如表2所示,并与直接求卷积方法比较计算时间,表中卷积积分计算过程未列出,仅利用结果作数据对比。计算方法见文献[8]。

**表2 一维分布动载荷识别计算时间** s

| 方法 | 时间采样点数为512,空间采样点数为32 | 时间采样点数为512,空间采样点数为64 | 时间采样点数为1 024,空间采样点数为64 |
|---|---|---|---|
| 小波方法 | 13.03 | 13.22 | 105.3 |
| 卷积积分 | 36.52 | 55.02 | 1 013.6 |

小波方法是通过求解简单方程组达到识别分布动载荷的目的,避免了动力学方程中的卷积计算。由表1可以看出,小波方法计算效率高,计算时间明显少于通常的先卷积计算再求逆的识别方法,适合计算量较大的识别模型。

## 3 结束语

笔者研究了一维梁结构的分布动载荷识别方法，运用张量理论，将小波扩展到二维空间，并将二维小波-伽辽金方法运用到分布动载荷识别中，推导了作用于梁结构的一维空间分布动载荷识别模型及复杂结构有限元方程的动载荷识别模型。在小波域中将结构动力学方程的求卷积解和求逆过程简化成简单的求解方程组，计算模型大大简化，运算效率较高。仿真算例验证了理论模型的正确性。

## 参　考　文　献

[1] 许训，欧进萍. 基于独立分量分析的多源动态载荷识别方法[J]. 力学学报，2012，44(1)：158-166.
Xu Xun，Ou Jinping. An ientification method of multi-source dynamic loads based on independent component analysis[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2012，44（1）：158-166.（in Chinese）

[2] Pezerat C，Leelere Q，Totaroand N，et al. Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holograph and the force analysis technique[J]. Journal of Sound and Vibration，2009，325：540-556.

[3] 秦远田，陈国平，张方. 二维分布动载荷识别的矩量方法[J]. 振动、测试与诊断，2012，32(1)：34-41.
Qin Yuantian，Chen Guoping，Zhang Fang. A moment method of two-dimension distributed load identification[J]. Journal of Vibration，Measurement & Diagnosis，2012，32(1)：34-41.（in Chinese）

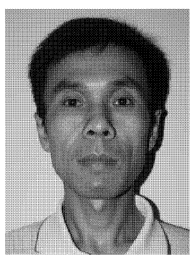
[4] 杨萍，李鹤岐，李有堂. 动态载荷识别的小波正交算子变换法[J]. 甘肃工业大学学报，2001，27(2)：102-105.
Ynag Ping，Li Heqi，Li Youtang. Transformation method with wavelet orthogonal operator for dynamic load identification[J]. Journal of Gansu University of Technology，2001，27(2)：102-105.（in Chinese）

[5] 吴邵庆，史治宇. 由有限元一 Wavelet—Galerkin 法识别桥面移动载荷[J]. 振动工程学报，2006，19(4)：494-498.
Wu Shaoqing，Shi Zhiyu. Identification of vehicle axle loads based on FEM-Wavelet-Galerkin method[J]. Journal of Vibration Engineering，2006，19(4)：494-498.（in Chinese）

[6] Mitra M，Gppalakrishnan S. Spectrally formulated wavelet finite element for wave propagation and impact force identification in connected 1-D waveguides[J]. International Journal of Solids and Structures，2005，42：4695-4721.

[7] Khorram A，Bakhtiari-Nejad F，Rezaeian M. Comparison studies between wavelet based crack detection methods of a beam subjected to a moving load[J]. International Journal of Engineering Science，2012，51：204-215.

[8] 张勇成. 二维分布动载荷时域识别技术[D]. 南京：南京航空航天大学，2007.



**第一作者简介**：秦远田，男，1971 年 12 月生，助理研究员。主要研究方向为工程力学、卫星力学与试验、动载荷识别。曾发表《二维分布动载荷识别的矩量方法》(《振动、测试与诊断》2012 年第 32 卷第 1 期)等论文。
E-mail：qinyt@nuaa.edu.cn