复合边界条件下基于能量法吊索张力实用公式*

何　容[1]，何　伟[1]，陈　淮[2]，赵　倩[1]
(1. 华北水利水电学院土木与交通学院　郑州，450011)　(2. 郑州大学土木工程学院　郑州，450001)

摘要　为提高工程中吊杆张力计算精度，考虑了中、下承式拱桥吊索两端拱肋和系杆梁附加质量、减振垫减振作用及弹性支承等复合边界条件，基于Rayleigh 能量法建立了吊索横向振动频率和吊索张力的显式关系式。采用京港澳高速公路郑州黄河二桥主桥施工现场测试数据，对所推导的计算公式进行了验证。结果表明，该计算公式比较全面地考虑了吊索两端实际复合边界条件，与传统计算公式相比，其计算结果精度更高，且为显式表达式，更适用于中、下承式拱桥吊索的张力计算及工程现场测试使用。对于郑州黄河二桥主桥等采用刚性系杆梁的中、下承式拱桥，吊索两端约束条件更接近于固接。

关键词　吊索；张力；复合边界条件；能量法
中图分类号　U446.3；U448.22+5；TH113

引　言

吊索是中、下承式拱桥重要的传力构件，通过吊索张力的变化来评估中、下承式拱桥健康状态是目前研究的热点问题之一。在进行中、下承式拱桥健康状态评估时，常采用振动法测试吊索横向振动频率来计算吊索张力。国内外许多学者在致力于提高吊索张力计算精度[1]时，考虑了吊索抗弯刚度[2]、吊索两端边界条件[3-8]、减振器[9]以及吊索参数[10]对吊索张力的影响。在这些计算吊索张力的公式中，一些公式为隐式关系式，虽然精度稍高，但不便于桥梁现场测试应用；另一些公式虽为显示关系式，但不能全面考虑吊索两端实际边界条件而使计算结果误差较大；因此，需要寻找一种既便于现场工程应用又有较高精度的计算公式。

笔者基于Rayleigh 能量法，考虑了吊索两端拱肋和系杆梁附加质量及弹性支承等复合边界条件，建立了吊索张力与其横向振动频率的显式关系式，通过郑州黄河二桥施工现场测试数据验证了计算公式的精度。

1　吊索张力计算模型

振动法测试吊索张力的理论基础是弦振动理论。当吊索的抗弯刚度 EI 很小以致可以忽略不计时，张紧的吊索在不考虑斜度和垂度等其他因素影响时，可简化为理想的弦。当“弦”两端固定，不考虑抗弯刚度的影响时张力与频率之间的关系[11]为

$$T = 4ml^2\left(\frac{f_n}{n}\right)^2 \tag{1}$$

其中：T 为吊索张力；m 为吊索单位长度质量；l 为吊索长度；f_n 为吊索第 n 阶横向振动频率。

式(1)虽然为显式表达式，易于工程实际应用，在吊索长度较长、刚度较小的柔性吊索张力测试时能满足工程精度要求，但是对于中、下承式拱桥吊索的张力测试，特别是短吊索的张力测试时其误差较大。

考虑吊索抗弯刚度 EI 的影响时，两端简支模型吊索张力与频率之间的关系式为

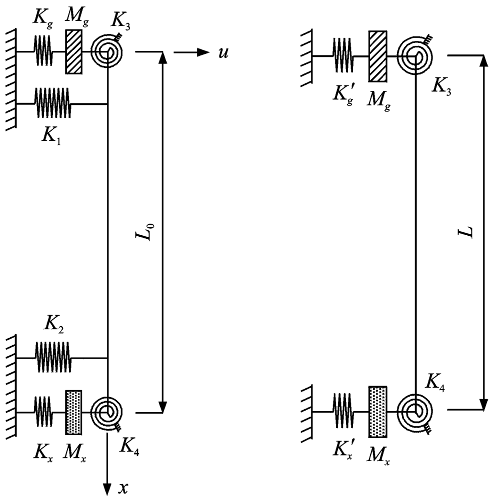
$$T = 4ml^2\left(\frac{f_n}{n}\right)^2 - EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tag{2}$$

显然上述两式均不能考虑吊索实际边界条件，因此其计算结果有较大误差。

当吊索两端有弹性支承，并考虑到拱肋及系杆梁里的减振垫减振作用效应、拱肋及系杆梁附加质量的影响时，吊索张力计算模型如图1(a)所示。其中：M_g，M_x 分别为拱肋与系杆梁的等效质量；K_g，K_x 分别为拱肋与系杆梁对吊索横向等效刚度；K_1，K_2 分别为拱肋与系杆梁中减振垫对吊索横向等效刚度；K_3，K_4 为拱肋与系杆梁对吊索等效转动刚

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(200804590006)；河南省高等学校青年骨干教师资助项目(2010GGJS-127)
收稿日期：2012-03-31；修改稿收到日期：2012-09-10

度；L_0 为吊索长度。由于减振垫位于拱肋或系杆梁内，与拱肋或系杆梁端部距离较近，相对于吊索长度，可以认为减振垫位于拱肋或系杆梁的端部，此时吊索计算长度为L。拱肋、系杆梁与减振垫对吊索横向等效刚度分别为 K'_g,K'_x，其中：$K'_g=K_g+K_1$；$K'_x=K_x+K_2$。此时吊索计算模型可简化为图1(b)。



(a) 计算模型 (b) 简化模型

图1 吊索张力计算模型图

2 基于Rayleigh 法的吊索第1阶振动频率与张力关系显式解析式

考虑到中、下承式拱桥吊索约束的特点，下面分别研究吊索铰接和固接条件下的吊索张力计算公式。

2.1 吊索两端铰接

吊索两端铰接时，$K_3=0,K_4=0$。假定吊索的振型函数为

$$U(x,t)=y(x)\cos(\omega t+\theta) \tag{3}$$

不考虑吊索弹性支承时，在均布荷载q作用下，两端铰支梁的挠度方程为

$$y_1(x)=\frac{ql^4}{24EI}\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^4+2\left(\frac{x}{L}\right)^3-\frac{x}{L}\right]$$

考虑吊索弹性支承时，在均布荷载q作用下，弹性支承所引起的吊索位移为

$$y_2(x)=y_g+\frac{y_g-y_x}{L}x$$

其中：$y_g=-qL/2K'_g$；$y_x=-qL/2K'_x$。它们分别为拱肋端和系杆梁端弹性支承产生的位移。

在考虑吊索弹性支承时，式(3)两端铰支梁的振型函数中$y(x)$为

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)=\frac{ql^4}{24EI}\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^4+2\left(\frac{x}{L}\right)^3-\frac{x}{L}\right]+\left(y_g+\frac{y_g-y_x}{L}x\right) \tag{4}$$

假定吊索及弹性支承等为弹性材料，如考虑吊索振动时剪切变形和转动惯量的影响，在任一时刻t时，吊索的动能E_1为平动动能与转动动能之和

$$E_1=\frac{1}{2}\int_0^L m(\dot{U}(x,t))^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^L\frac{m}{A}I(\dot{\alpha}(x,t))^2\mathrm{d}x \tag{5}$$

其中：$\dot{U}(x,t)=\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}$；$A$为吊索横截面积；$I$为吊索横截面惯性矩；$\alpha$为截面转角；$\dot{\alpha}(x,t)=\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial t}$。

拱肋和系杆梁等效质量对应的动能为

$$E_2=\frac{1}{2}M_g[\dot{U}_g(t)]^2+\frac{1}{2}M_x[\dot{U}_x(t)]^2 \tag{6}$$

其中：$U_g(t),U_x(t)$分别为拱肋端部和系杆梁端部弹性支承引起的位移；$U_g(t)=y_g\cos(\omega t+\theta)$；$U_x(t)=y_x\cos(\omega t+\theta)$；$\dot{U}_g(t)=\frac{\partial U_g(t)}{\partial t}$；$\dot{U}_x(t)=\frac{\partial U_x(t)}{\partial t}$。

吊索的势能V_1为弯曲应变能、外荷位能及剪切应变能之和

$$V_1=\frac{1}{2}\int_0^L EI(U''(x,t))^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^L T(U'(x,t))^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^L kGA\gamma^2\mathrm{d}x \tag{7}$$

其中：$U''(x,t)=\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$；$U'(x,t)=\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$；$k$为剪切系数；$G$为剪切弹性模量；$\gamma$为由于剪切变形引起的截面转角。

r的表达式为

$$\gamma=\varphi-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{kGA}\int(q-m\ddot{U}(x,t))\mathrm{d}x$$

其中：φ为截面转角；$\ddot{U}(x,t)=\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$。

弹性支承对应的应变能为

$$V_2=\frac{1}{2}K'_g y_g{}^2+\frac{1}{2}K'_x y_x{}^2 \tag{8}$$

根据Rayleigh 能量法可知，系统最大动能等于最大位能[11]，即

$$(E_1+E_2)_{\max}=(V_1+V_2)_{\max} \tag{9}$$

联合以上各式，即可求得基于Timoshenko梁理论并考虑了复合边界条件的由吊索横向振动圆频率ω计算吊索张力T的关系式。

实际工程中常不考虑吊索剪切变形和转动惯量的影响，此时系统振动圆频率表示为

$$\omega_1^2=\{90\ 720E^2I^2[T(K'_g-K'_x)^2+LK'_gK'_x(K'_g+K'_x)]+$$

$$3\ 024EIL^4K'_g{}^2K'^2_x + 306TL^6K'^2_gK'^2_x\}/\{31mL^8K'^2_gK'^2_x + E^2I^2[30\ 240mL^2 \times (K'^2_g + K'_gK'_x + K'^2_x) + 90\ 720L(M_xK'^2_g + M_gK'^2_x)] + 1\ 512EImL^5(K'_xK'^2_g + K'_gK'^2_x)\} \tag{10}$$

式(10)即为考虑吊索两端弹性支承和附加质量影响时,两端简支边界条件对应的吊索系统横向第1阶振动圆频率 ω_1 与吊索张力显式关系式。通过式(10)可得到吊索张力与横向振动第1阶频率 f_1 关系式为

$$T = \{4\pi^2f_1^2\{E^2I^2[30\ 240mL^2(K'^2_g + K'_gK'_x + K'^2_x) + 90\ 720L(M_xK'^2_g + M_gK'^2_x)] + 1\ 512EImL^5(K'_xK'^2_g + K'_gK'^2_x) + 31mL^8K'^2_gK'^2_x\} - 90\ 720E^2I^2LK'_gK'_x(K'_g + K'_x) + 3\ 024EIL^4K'^2_gK'^2_x\}/[90\ 720E^2I^2(K'_g - K'_x)^2 + 306L^6K'^2_gK'^2_x] \tag{11}$$

不计附加质量和弹性支承时,$M_g = M_x = 0$,$K'_g \to \infty$,$K'_x \to \infty$,式(11)可简化为

$$T = \frac{62\pi^2mL^2f_1^2}{153} - \frac{1\ 512EI}{153L^2} \tag{12}$$

可以看出,式(12)与 $n=1$ 时的式(2)相比,其所得结果更小。具有相同物理参数和边界条件的拉索振动,当同阶振动频率较小时,拉索张力更小。根据 Rayleigh 法特点,用真实振型所得的频率是 Rayleigh 法所求的频率中最低的一个。对于两端铰接吊索,式(4)所给出的振型函数是逼近于挠曲线真实形状的合适的函数,因此式(12)的计算结果更加准确。

2.2 吊索两端固接

吊索两端固接时,$K_3 \to \infty$,$K_4 \to \infty$。不考虑弹性支承时,在均布荷载 q 作用下两端固支梁的挠度方程为

$$y_1(x) = \frac{ql^4}{24EI}\left(-\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

考虑吊索两端弹性支承时,两端固支梁的挠度方程为

$$y(x) = \frac{ql^4}{24EI}\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] + \left(y_g + \frac{y_g - y_x}{L}x\right) \tag{13}$$

与吊索两端铰接推导方法类似,可得吊索张力与横向振动第1阶频率 f_1 的显式关系式为

$$T = \{4\pi^2f_1{}^2\{E^2I^2[30\ 240mL^2(K'^2_g + K'_gK'_x + K'^2_x) + 90\ 720L(M_xK'^2_g + M_gK'^2_x)] + 252EImL^5(K'_xK'^2_g + K'_gK'^2_x) + mL^8K'^2_gK'^2_x\} - 90\ 720E^2I^2LK'_gK'_x(K'_g + K'_x) + 504EIL^4K'^2_gK'^2_x\}/[90\ 720E^2I^2(K'_g - K'_x)^2 + 12L^6K'^2_gK'^2_x] \tag{14}$$

不计附加质量和弹性支承时,$M_g = M_x = 0$,$K'_g \to \infty$,$K'_x \to \infty$,式(14)可简化为

$$T = \frac{\pi^2mL^2f_1{}^2}{3} - \frac{42EI}{L^2} \tag{15}$$

计算显示,相同条件下式(15)计算结果与文献[8]中所给公式相当,可见文献[8]中所给公式是式(14)的简化式。

3 基于Rayleigh 法的吊索第 n 阶振动频率与张力关系显式解析式

式(11)或式(14)只能通过测试吊索第1阶振动频率来计算吊索张力。在中、下承式拱桥吊索张力测试中,限于现场测试条件,传感器的位置距桥面约为2~3 m。对于靠近拱脚侧的短吊索,传感器位置靠近吊索中间,对第1阶振动响应敏感,精度较高,因此短吊索可以采用第1阶振动频率计算吊索张力。对于中、长吊索,传感器的安置位置偏下,一般位于吊索下部 $L/3 \sim L/4$ 处,位于第3阶振型最大位移附近,对第3阶振动响应敏感,因此中、长吊索张力测试时常用第3阶振动频率,此时式(11)或式(14)失效。下面选用三角函数作为振型函数来推导中、长吊索第 n 阶振动频率与其张力的解析式。

对于中、长吊索,杆端的转动约束影响降低,因此可近似为铰接。不考虑弹性支承时,两端简支梁挠度方程为

$$\tilde{y}_1(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

考虑弹性支承时弹性支承所引起吊索的位移为

$$\tilde{y}_2(x) = \tilde{y}_g + \frac{\tilde{y}_g - \tilde{y}_x}{L}x$$

振型函数 $\tilde{y}(x)$ 的表达式为

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = \sin\frac{n\pi x}{L} + \left(\tilde{y}_g + \frac{\tilde{y}_g - \tilde{y}_x}{L}x\right) \tag{16}$$

其中:$\tilde{y}_g = \frac{EI}{K'_g}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3$;$\tilde{y}_x = -\frac{EI}{K'_x}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3\cos n\pi$。它们分别为拱肋端和系杆梁端弹性支承产生的位移。

根据 Rayleigh 能量法,可得到吊索张力与横向振动第 n 阶频率 f_n 关系的计算式为

$$T=4\pi^2 f_n^{\,2}\times\left[\frac{\dfrac{2mEI}{K'_g}\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2+\dfrac{mL}{2}-2\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 mEI\left(\dfrac{1}{K'_x}+\dfrac{2\cos n\pi}{K'_g}\right)+\dfrac{m(EI)^2(n\pi)^6}{3L^5}\left(\dfrac{7}{K'^2_g}+\dfrac{1}{K'^2_x}+\dfrac{5\cos n\pi}{K'_xK'_g}\right)+(EI)^2\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^6\left(\dfrac{M_g}{K'^2_g}+\dfrac{M_x}{K'^2_x}\right)}{\dfrac{(n\pi)^2}{2L}+\dfrac{(n\pi)^6(EI)^2}{L^7}\left(\dfrac{1}{K'^2_x}+\dfrac{2\cos n\pi}{K'_xK'_g}+\dfrac{1}{K'^2_g}\right)}-\frac{\dfrac{EIL}{2}\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^4-(EI)^2\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^6\left(\dfrac{1}{K'_g}+\dfrac{1}{K'_x}\right)}{\dfrac{(n\pi)^2}{2L}+\dfrac{(n\pi)^6(EI)^2}{L^7}\left(\dfrac{1}{K'^2_x}+\dfrac{2\cos n\pi}{K'_xK'_g}+\dfrac{1}{K'^2_g}\right)}\right] \tag{17}$$

不计附加质量和弹性支承时，$K_3=0$，$K_4=0$，$M_g=M_x=0$，$K'_g\rightarrow\infty$，$K'_x\rightarrow\infty$，式(17)可简化为式(2)。

式(17)与式(11)相比，它可以通过测试中、长吊索任意一阶横向振动频率来计算张力，因此适用性更广。当运用吊索第1阶横向振动频率来计算张力时，两式均可运用。

4 实例验证

实测数据为郑州黄河二桥主桥现场施工测试数据，该桥吊索相关参数[5,8,12]如下：吊索型号为PESC7-091；钢丝束公称面积为35.02 cm^2；单位长度质量为27.5 kg/m；吊索单位长度质量为30.4 kg/m；护套总厚度为8 mm；吊索外径为93 mm。郑州黄河二桥主桥共采用了6种不同长度吊索，各吊索长度与1阶横向振动频率及张力实测值列于表1。张力的实测值来源于现场吊索第1次张拉施工记录，1阶横向振动频率为完成吊索第1次张拉施工后吊索振动测试值。拱肋与系杆梁等效质量M_g，M_x及拱肋与系杆梁对吊索横向等效刚度K'_g，K'_x等根据文献[13]所述方法确定。通过吊索横向振动频率，根据本研究各公式所得吊索张力计算值及其与现场实测值相对误差列于表1。

由表1可以看出，对于郑州黄河二桥主桥吊索采用弦振动理论公式(1)和公式(2)时，计算结果均有较大误差，且短吊索计算误差大于长吊索计算误差。考虑吊索抗弯刚度时计算精度略高于不考虑吊索抗弯刚度时计算精度。当将吊索两端约束条件看成铰接，采用式(11)计算吊索张力时，计算精度较差。当选用式(17)计算时，其计算精度与式(11)计算精度相当。这主要是由于两式的差别仅为采用了不同的振型函数，因而计算结果相近。两式的计算结果出现较大误差，主要是因为式(11)与式(17)适用于两端约束条件为铰接的吊索。为提高计算精度，不宜把郑州黄河二桥主桥吊索两端约束简化为铰接。

当将吊索两端约束条件看成固接，采用式(14)计算时，计算精度最高，对于长吊索其结果误差最大为3.0%，对于短吊索其结果误差不超过9.3%。可以看出，对于郑州黄河二桥主桥等采用刚性系杆梁的中、下承式拱桥来说，其吊索边界约束条件更接近于固接，采用式(14)计算结果更加准确。

本研究公式较全面地考虑了吊索两端复合边界条件，因而该公式适用于中、下承式拱桥长吊索和短吊索的张力计算。由于公式均为显示形式，更适合在测试现场方便使用。在实际工程中，考虑附加质量和弹性支承影响时，可根据吊索两端边界约束条件是铰接或固接来分别选取式(11)或式(14)计算吊杆张力；不计附加质量和弹性支承影响时，可分别选取式(12)或式(15)计算吊杆张力。

5 结 论

1) 由于比较全面地考虑了吊索两端拱肋和系杆梁附加质量及弹性支承等复合边界条件的影响，笔者所推导的各计算公式与传统计算公式相比，计算

表1 郑州黄河二桥主桥吊索实测数据与张力计算值

吊索编号	吊索长度/m	实测频率/Hz	实测张力/kN	计算值与相对误差/kN									
				式(1)计算值	相对误差	式(2)计算值	相对误差	式(11)计算值	相对误差	式(17)计算值	相对误差	式(14)计算值	相对误差
1	23.458	2.929 7	500	574.33	14.9	570.44	14.1	567.1	13.4	556.4	11.3	489.0	−2.2
2	22.585	3.025 6	500	567.80	13.6	563.60	12.7	571.9	14.4	561.6	12.3	484.9	−3.0
3	20.827	3.320 3	500	581.49	16.3	576.55	15.3	586.4	17.3	580.3	16.1	499.3	−0.1
4	18.157	4.031 6	550	651.59	18.5	645.09	17.3	658.0	19.6	652.4	18.6	563.6	2.5
5	14.537	5.078 1	550	662.65	20.5	652.51	18.6	672.7	22.3	674.6	22.7	588.2	6.9
6	9.914	7.945 2	550	754.47	37.2	732.67	33.2	776.2	41.1	713.8	29.8	601.2	9.3

结果精度更高，且适用于短吊索和中、长吊索的张力计算。

2）与现有的振动法计算吊索张力公式相比，笔者给出的吊索张力与横向振动频率计算式为显式表达式，适合于工程现场测试使用，实用性较强。

3）对于郑州黄河二桥主桥等采用刚性系杆梁的中、下承式拱桥来说，吊索边界约束条件更接近于固接，简化为固接时比简化为铰接时计算结果更加准确。

参　考　文　献

[1] 张宏跃，田石柱. 提高斜拉索索力估算精度的方法[J]. 地震工程与工程振动，2004，24(4)：1-4.
Zhang Hongyue，Tian Shizhu. Improved method to enhance the estimation accuracy of stay cable tension [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration，2004，24(4)：1-4. (in Chinese)

[2] 任伟新，胡卫华，刘浩亮. 索的动刚度与模态参数识别[J]. 工程力学，2008，25(4)：93-98.
Ren Weixin，Hu Weihua，Liu Haoliang. Identification for dynamic stiffness and modal parameter of cables [J]. Engineering Mechanics，2008，25(4)：93-98. (in Chinese)

[3] 何伟，陈淮，王博，等. 复杂边界条件下基于频率法的吊杆张力测定研究[J]. 土木工程学报，2012，45(3)：93-98.
He Wei，Chen Huai，Wang Bo，et al. Study of suspender tension measurement based on frequency method with complex boundary conditions[J]. China Civil Engineering Journal，2012，45(3)：93-98. (in Chinese)

[4] 魏金波，李国强，段欣，等. 弹性支承索参数识别方法[J]. 振动、测试与诊断，2012，32(2)：312-316.
Wei Jinbo，Li Guoqiang，Duan Xin，et al. Parameter identification for flexibility support cable[J]. Journal of Vibration，Measurement & Diagnosis，2012，32(2)：312-316. (in Chinese)

[5] 董建华. 中、下承式拱桥吊索的模态分析与张力测定[D]. 郑州：郑州大学，2004.

[6] 陈刚. 振动法测索力与实用公式[D]. 福州：福州大学，2004.

[7] 任伟新，陈刚. 由基频计算拉索拉力的实用公式[J]. 土木工程学报，2005，38(11)：26-31.
Ren Weixin，Chen Gang. Practical formulas to determine cable tension by using cable fundamental frequency[J]. China Civil Engineering Journal，2005，38(11)：26-31. (in Chinese)

[8] 陈淮，董建华. 中、下承式拱桥吊索张力测定的振动法实用公式[J]. 中国公路学报，2007，20(3)：66-70.
Chen Huai，Dong Jianhua. Practical formulae of vibration method for suspender tension measure on half-through and through arch bridge[J]. China Journal of Highway and Transport，2007，20(3)：66-70. (in Chinese)

[9] 方志，张智勇. 斜拉桥的索力测试[J]. 中国公路学报，1997，10(1)：51-58.
Fang Zhi，Zhang Zhiyong. Test of cable tension in cable-stayed bridges[J]. China Journal of Highway and Transport，1997，10(1)：51-58. (in Chinese)

[10] 王朝华，李国蔚，何祖发，等. 斜拉桥索力测量的影响因素分析[J]. 世界桥梁，2004，3：64-67.
Wang Chaohua，Li Guowei，He Zufa，et al. Analysis of influential factors in cable force measurement of cable-stayed bridges[J]. World Bridges，2004，3：64-67. (in Chinese)

[11] Clough R W，Penzien J. Dynamics of structure[M]. 2nd ed. California：Computers and Structures Inc.，1995：120-129.

[12] 何伟. 中、下承式钢管混凝土拱桥损伤识别关键问题研究[D]. 郑州：郑州大学，2010.

[13] 郭向荣，陈淮. 弹性支承对斜拉桥拉索自振特性的影响[J]. 郑州工业大学学报，2000，21(1)：34-36.
Guo Xiangrong，Chen Huai. The effect of elastic support on the natural frequency of flexible cable of cable stayed bridge[J]. Journal of Zhengzhou University of Technology，2000，21(1)：34-36. (in Chinese)

第一作者简介：何容，女，1973 年 2 月生，讲师。主要研究方向为工程结构分析与优化设计。曾发表《考虑复合边界条件的中、下承式拱桥吊杆张力实用计算公式》(《中国铁道科学》2012 年第 33 卷第 5 期)等论文。
E-mail：hr@ncwu.edu.cn

通信作者简介：何伟，男，1973 年 10 月生，博士、副教授。主要研究方向为工程结构损伤识别与健康监测。
E-mail：hewei@ncwu.edu.cn