

微弱信号的差分振子检测方法^{*}

胥永刚, 冯明时, 马海龙, 谢志聪

(北京工业大学机电学院 北京, 100124)

摘要 在分析了差分振子基本原理的基础上,重点在理论上分析了噪声对差分振子输出相图的影响,推导了相图大小与有效信号幅值之间的线性比例关系,弥补了差分振子不能检测信号幅值的缺点,阐明了系统参数对差分振子检测性能的影响。理论分析、仿真实验及工程实践表明,该方法简单稳健,实时性好,具有良好的抗噪性能,能有效检测强噪声背景下的微弱故障信号,可实现机电设备早期故障的可视化检测。

关键词 差分振子; 微弱信号检测; 早期故障诊断; 可视化检测

中图分类号 TH17

引言

微弱信号检测在故障诊断、生物医学、卫星通信、地震波测量等领域有着广泛的应用。目前,微弱信号检测主要集中在两个方面:a.传统的对噪声进行抑制或消除的方法,但当噪声频率与信号频率相等或相接近时,在抑制噪声的同时有用信号不可避免地受到损害,极大地影响微弱信号特征的提取效果;b.利用非线性系统自身的特性对微弱信号进行检测,常用的非线性方法有随机共振法^[1-3]、混沌振子法^[4-7]和差分振子法^[8]。文献[9]综述3种非线性方法,并且将3种方法应用于机电设备故障诊断。文献[10]提出了快速判断差分振子收敛状态的快速识别方法。文献[11]研究了差分振子的参数设置,并且将差分振子应用于电机转子匝间短路及转子碰磨故障的识别。现有文献对差分振子的研究主要集中在利用差分振子相图的差异实现特有频率成分的有无检测。差分振子参数的选择是差分检测的关键,现有文献中给出的差分振子参数选择依据^[8]是使差分振子相图简单清晰,然而这一依据缺乏科学的理论支撑,不能准确表征出参数设置对差分振子检测系统特性的影响,也不能为差分振子参数的优化选择提供指导。

笔者从差分振子检测器本身的特性出发,在理论上系统地研究了参数设置对差分振子检测性能的影响,通过理论分析和仿真实验证明了差分振子具有良好的抗噪性能。对信号幅值与差分振子相图之间的关系进行了深入的研究,从理论推导和仿真实验两个方面证明了两者的单调递增的线性比例关系,为利用差分振子实现信号的幅值检测提供了有力工具。将该方法用于高速线材轧机轴承的早期故障诊断,实现了设备早期故障的可视化检测。

1 差分振子检测器的数学模型

差分振子检测器是以二元差分方程为基础构造的检测器^[8],具体数学模型为

$$x_{k+1} = ax_k + by_k \tag{1}$$

$$y_{k+1} = cx_k + dy_k + p \cos \left(2\pi f_e k + \frac{2\pi f_d k}{f_s} \right) T(k) \tag{2}$$

其中: p 为放大倍数; f_e 为系统激励频率; f_d 为待检测频率; f_s 为输入信号的采样频率; $T(k)$ 为输入信号序列; a, b, c, d 为差分振子的系统参数。

为方便进一步研究差分振子特性,将二元方程转化为一元方程。对上述差分方程组作如下变换,由式(1)可以得到

$$x_{k+2} = ax_{k+1} + by_{k+1} \tag{3}$$

将式(2)代入式(3)中,有

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51075009);国家高技术研究发展计划(“八六三”计划)资助项目(2009AA04Z417);北京市优秀人才培养计划资助项目(2011D005015000006)

收稿日期:2011-11-13;修改稿收到日期:2012-04-06

$$x_{k+2} = ax_{k+1} +$$

$$b \left[cx_k + dy_k + p \cos \left(2\pi f_c k + \frac{2\pi f_d k}{f_s} \right) T(k) \right] \quad (4)$$

由式(1)得

$$by_k = x_{k+1} - ax_k \quad (5)$$

令 $f(k) = bp \cos \left(2\pi f_c k + \frac{2\pi f_d k}{f_s} \right)$, 代入式(4), 得

$$x_{k+2} - (a+d)x_{k+1} + (ad-bc)x_k = f(k)T(k) \quad (6)$$

令 $\alpha = -(a+d)$, $\beta = ad-bc$, 代入式(6)得

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = f(k)T(k) \quad (7)$$

可以看出, 差分振子检测器是一个二阶系统, 该系统的固有频率^[8]可以通过下式进行估算

$$\omega_0 = \arccos \left(-\frac{\alpha(1+\beta)}{4\beta} \right) \quad (8)$$

$$(\beta > 0; \quad \left| \frac{\alpha(1+\beta)}{4\beta} \right| < 1)$$

2 参数设置和噪声对差分振子输出的影响

作为信号微弱特征提取的方法, 对噪声的抑制能力是一个非常重要的指标。本节通过差分振子方程来讨论差分振子的抗噪特性, 并揭示了差分振子参数设置对差分振子输出的影响。

为研究噪声对差分振子的影响, 先将差分方程式(7)转化为微分方程的形式, 结果如下

$$\ddot{x}(t) + A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)T(t) \quad (9)$$

其中: $A = \alpha + 2$; $B = 1 + \alpha + \beta$ 。

考虑零均值噪声对差分方程输出的影响。设零均值噪声为 $n(t)$, 则有 $E[n(t)] = 0$ 。由噪声 $n(t)$ 引起

的扰动输出为 Δx , 有

$$\Delta \ddot{x} + A\Delta \dot{x} + B\Delta x = f(t)n(t) \quad (10)$$

令 $Z = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \dot{x} \end{bmatrix}$, 则有 $\dot{Z} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \ddot{x} \end{bmatrix}$, 将微分方程改写成

空间状态方程组的形式为

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B & -A \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t)n(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

在实际信号处理中, 所得到的信号都是一个离散化数值序列, 所以求出式(10)的离散化形式的通解为

$$Z(k) = \Phi(k)Z(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k)^{k-1-i} f(i)n(i) \quad (12)$$

其中: $\Phi(k)$ 为状态转移矩阵; $Z(0)$ 为方程的初始值。

状态转移矩阵可以表示为

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B & -A \end{bmatrix}^k \quad (13)$$

方程的解由两部分构成。第一部分为 $\Phi(k)Z(0)$, 是方程的零输入解, 与输入信号无关, 反映了系统本身的特性, 将迅速衰减为零。这里给出一个简要的说明。

若 $n(t) = 0$, 原差分方程(7)可以写成

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = 0 \quad (14)$$

式(14)的解为式(13)。将式(14)改写成二元方程组的形式如下

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k + by_k \\ y_{k+1} = cx_k + dy_k \end{cases} \quad (15)$$

可见, 式(14)和式(15)为同解方程。图1给出了 β 固定不变, α 取不同值时差分振子方程(15)解的变化情况, 即差分振子相图的变化, 通过差分振子相图的变化来反映差分振子方程解的敛散性。

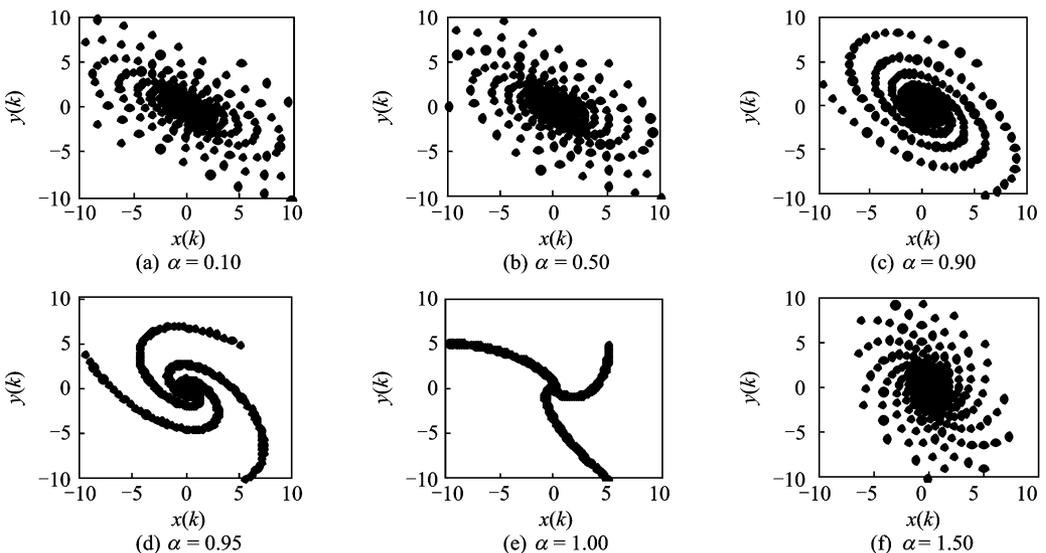


图1 不同 α 值时差分方程的解

由图1可以看出,虽然 α 取不同的值时,方程的解都收敛于零点,但是当 $\alpha \in [0.95, 1]$ 时,方程解的收敛速度最快。当 $\alpha \geq 2.00$ 时,差分振子方程的解是发散的,如图2所示。此时差分振子系统成为一个不稳定的系统,因此不能对信号进行检测。

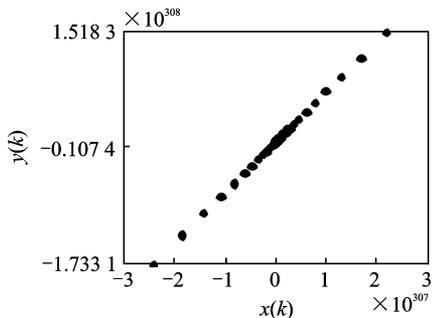


图2 $\alpha \geq 2.00$ 时差分振子方程的发散解

同理,固定 α 、改变 β 的值,仍然可以得到相同的结论,所以 α, β 的值反映了系统的固有特性。当 $\alpha, \beta \in (0, 2)$ 时,差分振子方程的解均收敛零点;若 $\alpha, \beta \in [0.95, 1]$,则差分方程(14)和(15)的解收敛速度最快;因此, α 和 β 的最佳取值范围为 $[0.95, 1]$ 。

由上述分析可知,系统参数 α, β 影响了差分振子检测的过渡时间(从初始状态到稳定状态的时间),差分振子参数处于最佳取值范围内时差分振子检测系统过渡时间最短,系统响应速度最快。

式(11)的零输入解 $\Phi(k)Z(0)$ 收敛于0,可见 $Z(0)$ (即方程的初始值)不影响差分振子解的敛散性,只是对收敛过程起到加速或延缓的作用。

式(11)的第二部分分解为方程的零状态解,它与方程的初始状态无关,只与输入信号有关,忽略零输入解的影响,只考虑方程的零状态解,则式(11)的解可以写成如下形式

$$Z(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k)^{k-1-i} f(i) n(i) \quad (16)$$

对式(16)求数学期望为

$$E[Z(k)] = E\left[\sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k)^{k-1-i} f(i) n(i)\right] \quad (17)$$

$f(k)$ 为差分振子检测系统的一部分,它的取值只与差分振子系统自身的参数设置有关,而不受外界输入的影响,这也是差分振子作为一个检测系统所具备的特性之一。 $n(k)$ 为随机噪声,它不受差分振子检测系统的影响。根据事件相互独立的定义^[12-13]可知, $f(k)$ 与 $n(k)$ 相互独立。因此,对式(17)作进一步化简得

$$E[Z(k)] = \sum_{i=0}^{k-1} E[\Phi(k)^{k-1-i} f(i)] E[n(i)] \quad (18)$$

$\Phi(k)$ 收敛于零,为系数矩阵。 $f(k) < |b\rho|$,噪声 $n(k)$ 为零均值噪声,即 $E[n(k)] = 0$,则有

$$E[Z(k)] = 0 \quad (19)$$

噪声输入到差分振子中后迅速衰减,最终趋向于零,即差分振子具有较强的抗噪能力。

下面通过仿真实验来验证这一结论,构造一个仿真函数

$$T(t) = 0.5\sin(2\pi 30t) + kn_{noise} \quad (20)$$

其中: n_{noise} 为随机噪声; k 为噪声强度调节系数,改变 k 的值就相当于改变噪声强度。

将上述信号输入到差分振子系统中,设定待检测频率为30 Hz,调节 k 得到不同噪声强度下的差分振子输出,结果如图3所示。

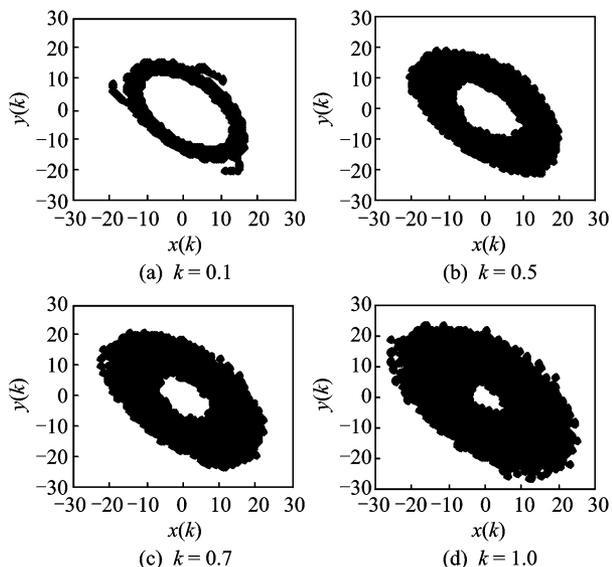


图3 不同噪声强度下的差分振子相图

由图3可以看出,噪声并不能改变振子相图的收敛特性。随着噪声强度的不断增加,差分振子相图出现了大量的毛刺,但这并不影响对差分振子相图状态的判别,可见差分振子检测器具有较好的抗噪性能。

3 差分振子幅值信息的表征

在对微弱信号进行检测时,不仅要获得信号的频率信息,有时还需要获得信号的幅值信息,尤其是信号幅值的变化信息。

3.1 差分振子对信号幅值信息的表征

设输入信号是由单频信号 $s(k)$ 和噪声 $n(k)$ 组成的数值序列,即

$$T(k) = s(k) + n(k) \quad (21)$$

设由信号 $s(k)$ 引起的输出为 x_k (其中 $k=1, 2, \dots, N, N$ 为输入信号序列的长度), 由噪声 $n(k)$ 引起的扰动输出为 Δx_k , 由输入信号引起的输出为 $(x_k + \Delta x_k)$, 代入到差分方程中则有

$$(x_{k+2} + \Delta x_{k+2}) + \alpha(x_{k+1} + \Delta x_{k+1}) + \beta(x_k + \Delta x_k) = f(k)[s(k) + n(k)] \quad (22)$$

将式(22)展开有

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = f(k)s(k) \quad (23)$$

$$\Delta x_{k+2} + \alpha \Delta x_{k+1} + \beta \Delta x_k = f(k)n(k) \quad (24)$$

根据方程解的性质, 若信号中有效频率成分的幅值增加, 只是影响式(23), 而不影响式(24)。在噪声相同的条件下, 方程解的变化只与信号中有效频率的变化有关, 即差分振子输出相图的变化只与检测频率的变化有关; 因此, 在讨论差分振子对信号的幅值表征时, 只考虑检测信号频率的变化即可。

设输入信号为单一频率的信号序列

$$T(k) = s(k) \quad (25)$$

相应的差分振子方程(7)的解为 x_k , 将其代入差分振子方程(7)中, 有

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = f(k)s(k) \quad (26)$$

如果输入信号的幅值增大到原来的 K 倍, 即

$$T(k) = Ks(k) \quad (27)$$

其对应的差分振子方程的解为 y_k , 则

$$y_{k+2} + \alpha y_{k+1} + \beta y_k = f(k)Ks(k) \quad (28)$$

将式(26)两端同时乘以 K , 可以写成如下形式

$$(Kx_{k+2}) + \alpha(Kx_{k+1}) + \beta(Kx_k) = f(k)Ks(k) \quad (29)$$

比较式(28)与式(29)可得

$$y_k = Kx_k \quad (30)$$

由此可见, 输入信号的幅值增大了 K 倍, 则差分振子方程的解也增大了 K 倍, 相应的差分振子相图也扩大了 K 倍。

由上述分析可以看出, 差分振子相图的大小与信号幅值之间存在一个线性比例关系, 可以通过相同参数下的差分振子相图的大小来判断信号幅值的大小。差分振子相图大者, 相应的信号幅值也大, 反之亦然。

3.2 仿真实验

构造如下的仿真函数

$$y = A\sin(2\pi 30t) + n_{\text{noise}} \quad (31)$$

其中: A 为信号的幅值; n_{noise} 为随机噪声; 待检测频率 $f_d = 30$ Hz; 放大倍数 $p = 1$; $\alpha = 0.95$; $\beta = 0.98$; $f_e = 0.33$ 。

改变仿真信号的幅值 A , 可以得到不同的差分振子输出相图, 如图4所示。由图4可以看出, 随着信

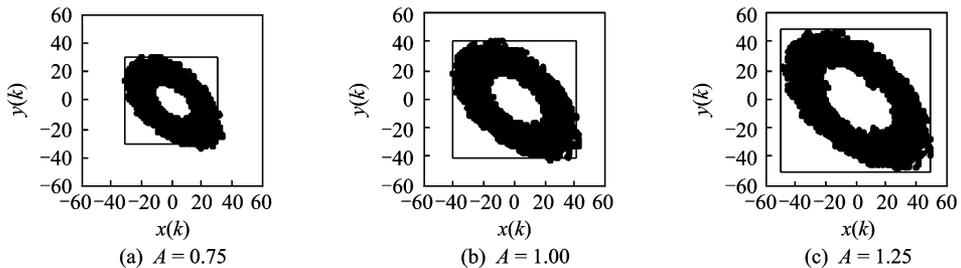


图4 不同幅值下的差分振子相图

号幅值的增大, 差分振子相图也随之不断地增大。若以差分振子相图最小正切正方形的边长作为指标来定量表征振子相图的大小(如图4(b)中的实线正方形), 则差分振子幅值的增加与正方形边长的增加具有单调递增的线性比例关系, 幅值每增加0.25对应正方形的边长增加20。正方形边长与信号幅值的关系如图5所示。

在差分振子各参数设置相同的条件下, 差分振子相图的大小反映了信号幅值的大小。在求得信号幅值与差分振子相图大小的比例关系的条件下, 可以获得待检测信号的幅值; 在这一比例关系未知的条件下, 则可以获得待检测信号幅值的相对大小, 即

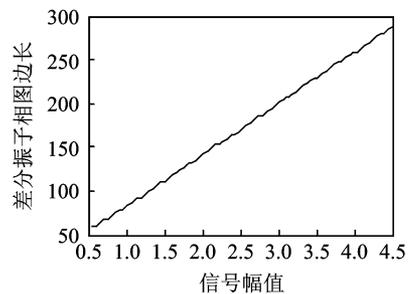


图5 信号幅值变化与差分振子相图的关系

差分振子相图大者, 其表征的幅值也较大; 因此, 通过信号幅值与差分振子相图关系, 可以得到幅值的变化量, 弥补了差分振子不能够直接检测信号幅值

大小的缺陷。

噪声虽然不改变差分振子相图的收敛性,但噪声的大小会改变差分振子相图的大小,即在不同的噪声强度下,信号幅值与差分振子相图大小的关系曲线是不同的,如图6所示。

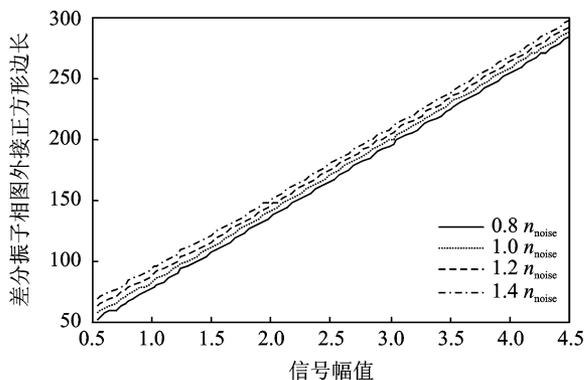


图6 不同噪声下的信号幅值与相图大小关系曲线

由于差分振子的参数对输出相图有着显著的影响,即使同一信号,输入不同参数下的差分振子系统中,得到的差分振子相图也相差甚远;因此,对不同参数下的差分振子相图所携带的幅值信息进行研究没有意义。笔者对差分振子相图所携带的幅值信息的挖掘是建立在相同参数下的差分振子检测器基础之上的。

3.3 放大倍数对差分振子相图的影响

为研究放大倍数对差分振子相图的影响,将差分方程(7)进行改写,首先令

$$g(k) = \frac{f(k)}{p} = b \cos\left(2\pi f_c k + \frac{2\pi f_a k}{f_s}\right) \quad (32)$$

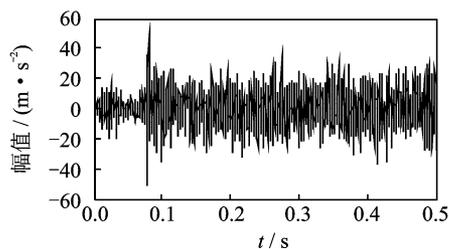
则差分方程可以转化为

$$x_{k+2} + \alpha x_{k+1} + \beta x_k = g(k) p T(k) \quad (33)$$

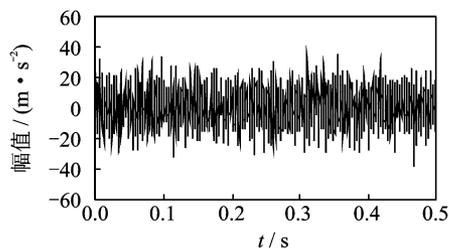
由差分方程(30)知,系统的放大倍数为 p ,在差分振子检测器系统中相当于对输入信号整体放大了 p 倍,即将有用信号和噪声全部进行放大。由上面的推导可知,有用信号被放大 p 倍后,差分振子相图也被放大了 p 倍,差分振子的输出获得了增强。同时,噪声也被放大了 p 倍,随着噪声强度的增大,差分振子相图会出现大量的毛刺。若 p 过大时,整个差分振子相图被噪声淹没,从而无法判别差分振子相图的状态;因此,适当的放大倍数 p 使输入信号获得增强,保证差分振子相图清晰且状态表征明确,但是放大倍数 p 并不影响差分振子的收敛性。

4 工程应用实例

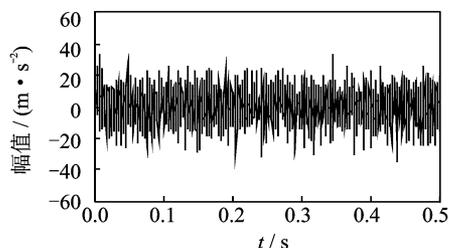
2008年12月9日,某高线厂在线监测系统发出报警,第25架精轧机的振动幅值超标。12月15日检修时发现,该精轧机齿轮箱一轴轴承内圈严重剥落。现取11月19~21日间(即设备振动超限报警前20天左右)的3组数据进行分析,期望能在故障初期的振动信号中发现故障特征,实现微弱故障的早期诊断。设备轴承型号为162250G,振动信号采样频率为4 kHz,采样点数为2 048,根据在线监测系统监测的转速计算可得轴承内圈损伤的特征频率为43.28 Hz。图7~8分别为不同时间振动信号的时域波形和幅值谱。



(a) 19日振动信号时域波形



(b) 20日振动信号时域波形



(c) 21日振动信号时域波形

图7 不同时间振动信号的时域波形

由图7可以发现,19~21日时域波形的振动幅值相差不大。图8所示的幅值谱中,这3天的频谱低频信息全部被噪声淹没,无法找到轴承内圈损伤的特征频率43.28 Hz;因此,依靠传统方法无法判别设备当前的运行状态。将这3天的数据输入同一个差分振子中,并将差分振子参数设置如下:检测频率 $f_a=43.28$ Hz; $\alpha=0.995$; $\beta=0.999$; $f_c=0.3327$ Hz。

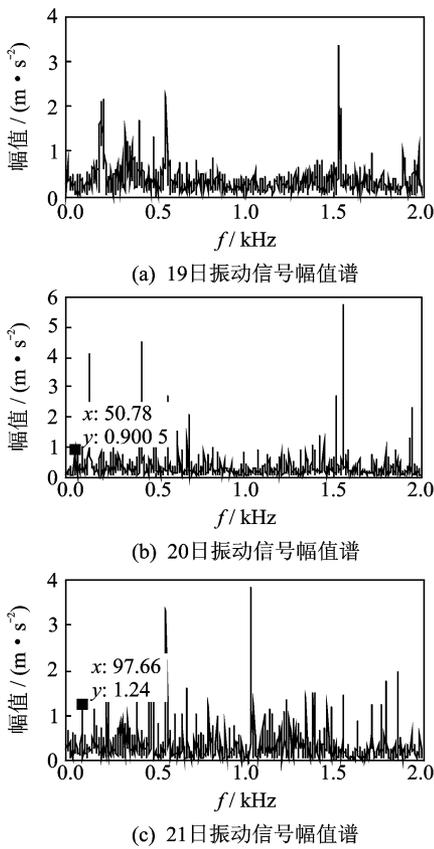


图8 不同时间振动信号的幅值谱

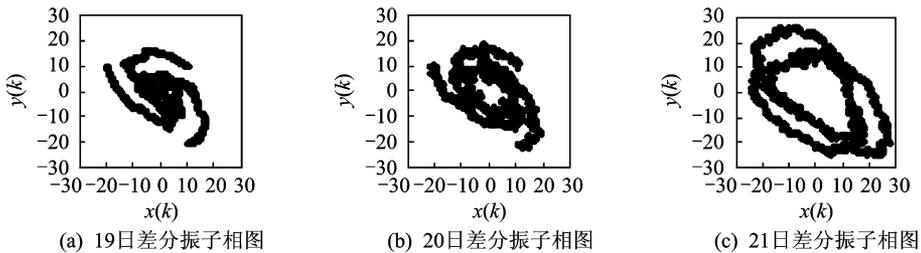


图9 不同时间振动信号的差分振子相图

$p=2.5$;初始值 $x=15,y=15$ 。差分振子输出相图如图9所示。

在图9中,19日的差分振子相图呈现出收敛于极点的状态,说明此时信号中不存在待检测频率。20日和21日的差分振子相图呈现出收敛于极环的状态,说明此时信号中含有待检测频率,相比较而言,21日收敛于极环的状态更加清晰、简明。20日的差分振子相图极环所占的正方形面积小于21日极环所占正方形的面积,即21日信号待检测频率成分的幅值比20日的有所增大。图9中的差分振子相图表明,轴承在19日没有故障特征表现出来,在20日出现了故障特征,并有恶化的趋势,在21日时故障特征表现得更为明显。可见差分振子不但可以反映信号的频域信息,还可以表征信号的幅值变化信息。

利用差分振子检测设备故障时,需要事先确定待检测设备的故障特征频率。在设备传动结构已知、轴承型号明确、设备转速可测的情形下,可以利用先验知识计算出轴承和齿轮损伤的特征频率,继而建立差分振子阵列。对上述特征频率分别检测,可以确定原始振动信号中是否包含主要零部件的故障特征频率,进而确定故障发生的具体部位。

5 结 论

1) 理论分析与仿真实验表明,差分振子具有良好的抗噪性能,可以实现强噪声背景下的微弱信号检测。

2) 差分振子相图的大小与有效信号幅值之间存在线性比例关系,可以此间接检测微弱信号的相对幅值大小。

3) 高速线材轧机轴承的早期故障检测实例表明,该方法可实现设备早期故障的可视化检测。

参 考 文 献

[1] Leng Yonggang, Wang Taiyong, Guo Yan, et al. En-

gineering signal processing based on bistable stochastic resonance [J]. Mechanical System and Signal Processing, 2007, 21: 138-150.

[2] He Huilong, Wang Taiyong, Leng Yonggang, et al. Study on non-linear filter characteristic and engineering application of cascaded bistable stochastic resonance system [J]. Mechanical System and Signal Processing, 2007, 21: 2740-2749.

[3] 陈敏, 胡萼庆, 秦国军, 等. 参数调节随机共振在机械系统早期故障检测中的应用 [J]. 机械工程学报, 2009, 45(4): 131-135.

Chen Min, Hu Niaoqing, Qin Guojun, et al. Application of parameter-tuning stochastic resonance for detecting early mechanical faults [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(4): 131-135. (in Chinese)

- [4] Li Chongsheng, Qu Liangsheng. Applications of chaotic oscillator in machinery fault diagnosis [J]. Mechanical System and Signal Processing, 2007, 21: 257-269.
- [5] 李月, 徐凯, 杨宝俊, 等. 混沌振子系统周期解几何特征量分析与微弱周期信号的定量检测[J]. 物理学报, 2008, 57(6): 3353-3358.
Li Yue, Xu Kai, Yang Baojun, et al. Analysis of the geometric characteristic quantity of the periodic solutions of the chaotic oscillator system and the quantitative detection of weak periodic signal[J]. Acta Physica China, 2008, 57(6): 3353-3358. (in Chinese)
- [6] 秦卫阳, 苏浩, 杨永峰. 利用Duffing系统的同步识别信号中的微小差别[J]. 物理学报, 2008, 57(5): 2704-2707.
Qin Weiyang, Su Hao, Yang Yongfeng. Detecting faint variation in signal by synchronization of Duffing system[J]. Acta Physica China, 2008, 57(5): 2704-2707. (in Chinese)
- [7] 李允公, 刘杰, 张金萍. 基于连续频段的杜芬方程一类混沌解的分析[J]. 机械工程学报, 2008, 44(1): 81-86.
Li Yungong, Liu Jie, Zhang Jinping. Analysis of a type of chaos solution of Duffing equations based on continuous band[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(1): 81-86. (in Chinese)
- [8] Qu Liangsheng, Lin Jing. A difference resonator for detecting weak signals [J]. Measurement, 1998, 18: 69-77.
- [9] 胥永刚, 马海龙, 付胜, 等. 机电设备早期故障微弱信号的非线性检测方法及应用[J]. 振动工程学报, 2011, 24(5): 529-538.
Xu Yonggang, Ma Hailong, Fu Sheng, et al. Theory and applications of weak signal non-linear detection method for incipient fault diagnosis of mechanical equipments [J]. Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(5): 529-538. (in Chinese)
- [10] 胥永刚, 马海龙, 冯明时, 等. 差分振子相图的自动识别与应用[J]. 振动与冲击, 2011, 30(10): 169-172.
Xu Yonggang, Ma Hailong, Feng Mingshi, et al. Automatic identification of difference resonator phase diagram and its application[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(10): 169-172. (in Chinese)
- [11] 李楠, 赵东成, 李虹波, 等. 电机转子系统早期故障可视化检测的差分振子法[J]. 电力自动化设备, 2007, 27(6): 74-77.
Li Nan, Zhao Dongcheng, Li Hongbo, et al. Differential resonator method for early fault visual detection of generator rotor system[J]. Electric Power Automation Equipment, 2007, 27(6): 74-77. (in Chinese)
- [12] 谢兴武, 李宏伟. 概率统计释难解疑[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 6-11.
- [13] 张薇, 张京, 邵新慧, 等. 概率论与数理统计[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 28-35.



第一作者简介:胥永刚,男,1975年10月生,副教授。主要研究方向为机械故障诊断、现代信号处理等。曾发表《机电设备早期故障微弱信号的非线性检测方法及应用》(《振动工程学报》2011年第24卷第5期)等论文。
E-mail: xyg@bjut.edu.cn