直齿轮耦合转子系统的振动可靠性研究*

朱丽莎， 张义民， 马　辉， 王奇斌， 刘作书， 王全彬
（东北大学机械工程与自动化学院　沈阳，110819）

摘要　为了探索随机变量对直齿轮耦合转子系统的振动可靠性的影响排序，为产品在设计阶段提供理论参考，首先，基于有限元法，建立了参数化的直齿轮耦合转子动力学模型；其次，结合随机摄动技术、可靠性设计相关理论，建立了随机响应模型和可靠性求解模型；然后，基于修正后的可靠性灵敏度计算方法，提出了针对齿轮耦合转子系统的可靠性灵敏度设计模型，研究了齿轮参数的改变对转子系统可靠性的影响；最后，在基本随机变量是混合变量的情况下，对其灵敏度进行了无量纲化，得到可靠性对各个基本随机变量的影响程度的排序。研究结果表明，对可靠性影响最大的因素为啮合角，需要严格控制。

关键词　有限元法；齿轮；动力学；可靠度；灵敏度
中图分类号　TB122；TH132.4

引　言

组装式离心压缩机又称为组装型整体齿轮增速式离心压缩机。组装式离心压缩机在设计时，一般要求连续运转 2～3 年，每个工作轴的转速一般都在 20～50 kr/min之间，齿轮转速比在 10～20 之间，齿轮周速达到120～150 m/s，轴承周速超过80 m/s。在这种情况下，旋转部件和机组的振动可靠性分析对于整个系统的安全稳定运行显得格外重要。

对于单齿轮系统的振动分析，大量文献都致力于弯-扭-轴耦合振动的研究，文献[1-2]建立了直齿轮转子系统的弯扭耦合有限元模型，该模型包括 2 个弯曲和1 个扭转共3 个方向的自由度。Rao 等[3]基于有限单元法对齿轮-轴-轴承转子系统进行了动力学分析，包括2 个弯曲和3 个扭转共5 个方向的自由度。笔者基于以上研究，建立了含啮合角、变位系数、重合度、齿宽、模数的弯扭耦合随机振动模型。为可靠性分析提供随机样本。

采用可靠性灵敏度的目的是希望在设计阶段就能对影响系统可靠性的因素进行考虑和排序。目前，计算可靠性灵敏度的方法很多，如基于 1 阶矩和高阶矩的可靠性计算的矩方法[4-5]、基于重要度抽样的 Monte-Carlo 法[6-7]、基于响应面的可靠性灵敏度计算方法[8-9]等。笔者在结构系统有限元模型的基础上，采用了修正后的可靠性灵敏度计算方法[10]。此方法是在 Edgeworth 级数的基础上推导得出的，在求解过程中不需要进行迭代搜索，而且不需要知道基本随机变量的分布概型，因此被广泛地应用于工程实际中。笔者以文献[11]中单直齿轮耦合转子系统为研究对象，建立齿轮转子系统的运动微分方程，分析系统受到不平衡激励下的稳态响应，得到对转子系统振动可靠性影响较大的参数，分析出可靠性随随机变量的变化趋势，为工程实际提供理论依据。

1　齿轮副力学模型

笔者在文献[11-12]的基础上，建立了包含啮合角 Φ_p 的齿轮系统啮合耦合型的振动分析模型，齿轮 p 和齿轮 g 啮合的运动微分方程为

$$m_p\ddot{x}_p+c_{px}\dot{x}_p+k_{px}x_p+w_{px}=U_pw_p\cos w_pt \tag{1a}$$

$$m_p\ddot{y}_p+c_{py}\dot{y}_p+k_{py}y_p+w_{py}=U_pw_p\sin w_pt \tag{1b}$$

$$I_p\ddot{\theta}_p+w_pr_p=-T_1 \tag{1c}$$

$$m_g\ddot{x}_g+c_{gx}\dot{x}_g+k_{gx}x_g+w_{gx}=U_gw_g\cos w_gt \tag{1d}$$

$$m_g\ddot{y}_g+c_{gy}\dot{y}_g+k_{gy}y_g+w_{gy}=U_gw_g\sin w_gt \tag{1e}$$

$$I_g\ddot{\theta}_g-w_gr_g=-T_2 \tag{1f}$$

* 长江学者和创新团队发展计划资助项目(IRT0816)；“十一五”国家科技支撑计划资助项目(2009BAG12A02-A07-2)；国家自然科学基金青年资助项目(50805019)
收稿日期：2011-07-11；修改稿收到日期：2011-11-01

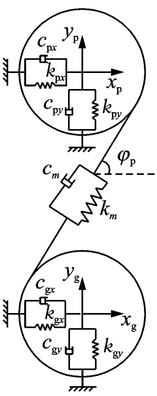


图1　齿轮啮合的力学模型图

其中：m 为齿轮质量；k 为刚度；c 为阻尼；k_m，c_m，φ_p 分别为啮合刚度、啮合阻尼和啮合角。

$$w_p = k_m[(y_p - y_g)\sin\varphi_p + (x_p - x_g)\cos\varphi_p - r_p\theta_p + r_g\theta_g] + c_m[(\dot{y}_p - \dot{y}_g)\sin\varphi_p + (\dot{x}_p - \dot{x}_g)\cos\varphi_p - r_p\dot{\theta}_p + r_g\dot{\theta}_g] \tag{2}$$

$$w_{px} = w_p\cos\varphi_p, w_{py} = w_p\sin\varphi_p \tag{3}$$

$$w_p = -w_g, w_{gx} = -w_{px}, w_{gy} = -w_{py} \tag{4}$$

其中：r_p，r_g 为齿轮 p，g 的基圆半径。

经整理，齿轮副模型的啮合质量矩阵 $\boldsymbol{M}$、刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}(m_p, m_p, I_p, m_g, m_g, I_g) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K} = k_m\begin{bmatrix} \cos^2\varphi_p + k_{px} & \sin\varphi_p\cos\varphi_p & r_p\cos\varphi_p & -\cos^2\varphi_p & -\sin\varphi_p\cos\varphi_p & r_g\cos\varphi_p \\ \sin\varphi_p\cos\varphi_p & \sin^2\varphi_p + k_{py} & r_p\sin\varphi_p & -\sin\varphi_p\cos\varphi_p & -\sin^2\varphi_p & r_g\sin\varphi_p \\ r_p\cos\varphi_p & r_p\sin\varphi_p & r_p^{\,2} & -r_p\cos\varphi_p & -r_p\sin\varphi_p & r_pr_g \\ -\cos^2\varphi_p & -\sin\varphi_p\cos\varphi_p & -r_p\cos\varphi_p & \cos^2\varphi_p + k_{gx} & \sin\varphi_p\cos\varphi_p & -r_g\cos\varphi_p \\ -\sin\varphi_p\cos\varphi_p & -\sin^2\varphi_p & -r_p\sin\varphi_p & \sin\varphi_p\cos\varphi_p & \sin^2\varphi_p + k_{gy} & -r_g\sin\varphi_p \\ r_g\cos\varphi_p & r_g\sin\varphi_p & r_pr_g & -r_g\cos\varphi_p & -r_g\sin\varphi_p & r_g^{\,2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C} = c_m\begin{bmatrix} \cos^2\varphi_p + c_{px} & \sin\varphi_p\cos\varphi_p & r_p\cos\varphi_p & -\cos^2\varphi_p & -\sin\varphi_p\cos\varphi_p & r_g\cos\varphi_p \\ \sin\varphi_p\cos\varphi_p & \sin^2\varphi_p + c_{py} & r_p\sin\varphi_p & -\sin\varphi_p\cos\varphi_p & -\sin^2\varphi_p & r_g\sin\varphi_p \\ r_p\cos\varphi_p & r_p\sin\varphi_p & r_p^{\,2} & -r_p\cos\varphi_p & -r_p\sin\varphi_p & r_pr_g \\ -\cos^2\varphi_p & -\sin\varphi_p\cos\varphi_p & -r_p\cos\varphi_p & \cos^2\varphi_p + c_{gx} & \sin\varphi_p\cos\varphi_p & -r_g\cos\varphi_p \\ -\sin\varphi_p\cos\varphi_p & -\sin^2\varphi_p & -r_p\sin\varphi_p & \sin\varphi_p\cos\varphi_p & \sin^2\varphi_p + c_{gy} & -r_g\sin\varphi_p \\ r_g\cos\varphi_p & r_g\sin\varphi_p & r_pr_g & -r_g\cos\varphi_p & -r_g\sin\varphi_p & r_g^{\,2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$k_m = (0.75\varepsilon_\alpha + 0.25)\frac{0.8}{q'}[1 + 0.5(1.2 - h_{fp}/m)][1 - 0.02(20° - \alpha)]b \tag{8}$$

$$q' = 0.047\,23 + \frac{0.155\,1}{z_1} + \frac{0.257\,91}{z_2} - 0.006\,35x_1 - 0.116\,54\frac{x_1}{z_1} - 0.001\,93x_2 -+ 0.241\,88\frac{x_2}{z_2}0.005\,29x_1^2 + 0.001\,82x_2^2 \tag{9}$$

其中：q' 为轮齿柔度的最小值；ε_α 为重合度；b 为齿宽；x_1，x_2 为小、大轮的变位系数；z_1，z_2 为小、大齿轮当量齿数；h_{fp} 为齿根高；m 为模数；α 为压力角。

$$c_m = 2\zeta\sqrt{\frac{k_m}{(1/m_p + 1/m_g)}} \tag{10}$$

其中：ζ 为阻尼比，一般取 0.03～0.1。

2　可靠性设计

2.1　随机响应模型的建立

结合齿轮系统的受力情况，考虑弯扭耦合对系统动力学的影响，在建立有限元模型时，节点 i 的广义坐标定义为

$$\boldsymbol{u}^e = [x_i, y_i, z_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}]^T \tag{11}$$

根据有限元理论和转子动力学的相关知识，对于各项异性的轴承且考虑阻尼的情况下，转子系统的随机结构运动微分方程可以表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}(t) \tag{12}$$

其中：$\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{u}}$，$\ddot{\boldsymbol{u}}$ 分别为节点位移、速度、加速度向量，上标“·”代表对时间 t 的导数；$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别为结构的整体质量矩阵、整体阻尼矩阵、陀螺力矩矩阵、整体刚度矩阵和结构的整体外力向量。

随机参数向量表示为 $\boldsymbol{B} = \{b_i\}^T = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}^T$。对于随机结构系统，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别为随机参数 b_i 的函数矩阵，根据可靠性设计的随机摄动法，将随机参数向量 $\boldsymbol{B}$ 展开成为确定部分和随机部分，分别表示为

$$b_i = b_{id} + \varepsilon b_{ir} \tag{13}$$

其中：ε 为一微小参数，$0<|\varepsilon|\ll 1$；下标 d 为确定部分；下标 r 为随机部分，其均值为 0。

$\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\ddot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{G},\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 也可以表示为确定和随机两部分

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_d + \varepsilon \boldsymbol{u}_r \\ \dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{u}}_d + \varepsilon \dot{\boldsymbol{u}}_r \\ \ddot{\boldsymbol{u}} = \ddot{\boldsymbol{u}}_d + \varepsilon \ddot{\boldsymbol{u}}_r \\ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_d + \varepsilon \boldsymbol{M}_r \\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_d + \varepsilon \boldsymbol{C}_r \\ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_d + \varepsilon \boldsymbol{G}_r \\ \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_d + \varepsilon \boldsymbol{K}_r \\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_d + \varepsilon \boldsymbol{F}_r \end{cases} \tag{14}$$

根据 Taylor 展开式，当随机参数的随机部分比确定部分小得多时，将$\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\ddot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{G},\boldsymbol{K}$ 和$\boldsymbol{F}$ 在均值处展开至 1 阶处为止，整理得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_r = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_d}{\partial b_i} b_{ir} \\ \dot{\boldsymbol{u}}_r = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}_d}{\partial b_i} b_{ir} \\ \ddot{\boldsymbol{u}}_r = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \ddot{\boldsymbol{u}}_d}{\partial b_i} b_{ir} \\ \boldsymbol{G}_r = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial G_d}{\partial b_i} b_{ir} \\ \boldsymbol{K}_r = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial K_d}{\partial b_i} b_{ir} \\ \boldsymbol{F}_r = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \boldsymbol{F}_d}{\partial b_i} b_{ir} \\ \boldsymbol{M}_r = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial M_d}{\partial b_i} b_{ir} \\ \boldsymbol{C}_r = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \boldsymbol{C}_d}{\partial b_i} b_{ir} \end{cases} \tag{15}$$

将式(13)代入式(11)，展开后，比较 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的同次幂，略去高阶项，得

$$\boldsymbol{M}_d \ddot{\boldsymbol{u}}_d + (\boldsymbol{C}_d + \boldsymbol{G}_d)\dot{\boldsymbol{u}}_d + \boldsymbol{K}_d \boldsymbol{u}_d = \boldsymbol{F}_d \tag{16}$$

$$\boldsymbol{M}_d \ddot{\boldsymbol{u}}_r + (\boldsymbol{C}_d + \boldsymbol{G}_d)\dot{u}_r + \boldsymbol{K}_d \boldsymbol{u}_r = \\ \boldsymbol{F}_r - \boldsymbol{M}_r \ddot{\boldsymbol{u}}_d - (\boldsymbol{C}_r + \boldsymbol{G}_r)\dot{\boldsymbol{u}}_d - \boldsymbol{K}_r \boldsymbol{u}_d \tag{17}$$

将式(14)代入式(15)，整理得

$$\boldsymbol{M}_d \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{u}}_d}{\partial b_i} + (\boldsymbol{C}_d + \boldsymbol{G}_d)\frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}_d}{\partial b_i} + \boldsymbol{K}_d \frac{\partial u_d}{\partial b_i} = \\ \frac{\partial \boldsymbol{F}_d}{\partial b_i} - \frac{\partial \boldsymbol{M}_d}{\partial b_i}\ddot{\boldsymbol{u}}_d - (\frac{\partial \boldsymbol{C}_d}{\partial b_i} + \frac{\partial \boldsymbol{G}_d}{\partial b_i})\dot{\boldsymbol{u}}_d - \frac{\partial K_d}{\partial b_i}\boldsymbol{u}_d \tag{18}$$

联合式(15)和式(17)，可以得到随机响应 $\boldsymbol{u}$ 的灵敏度$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_d}{\partial b_i}$，$\dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}_d}{\partial b_i}$和$\dfrac{\partial \ddot{\boldsymbol{u}}_d}{\partial b_i}$。

随机响应 $\boldsymbol{u}$ 的前 4 阶矩[2-4]表示为

$$\mu_u = \mathrm{E}[\boldsymbol{u}_d + \varepsilon \boldsymbol{u}_r] = \boldsymbol{u}_d \tag{19}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{u}}^2 = \mathrm{Var}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{B})] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_d}{\partial b_i}\right)\mathrm{Var}(b_i) \tag{20}$$

$$\theta_{\boldsymbol{u}} = \mathrm{E}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{u}_d(\boldsymbol{B})]^3 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_d}{\partial b_i}\right)C_3(b_i) \tag{21}$$

$$\eta_{\boldsymbol{u}} = \mathrm{E}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{u}_d(\boldsymbol{B})]^4 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_d}{\partial b_i}\right)C_4(b_i) \tag{22}$$

其中：$\mathrm{Var}(b_i)$，$C_3(b_i)$，$C_4(b_i)$为随机变量的方差、3 阶矩、4 阶矩；$\sigma_{\boldsymbol{u}}^2$，$\theta_{\boldsymbol{u}}$，$\eta_{\boldsymbol{u}}$ 为响应的方差、3 阶矩和 4 阶矩。

若已知随机变量的前 4 阶，矩并将得到的$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_d}{\partial b_i}$代入式(19～22)，可得到随机响应的前 4 阶矩 $\mu_{\boldsymbol{u}}$，$\sigma_{\boldsymbol{u}}^2$，$\theta_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\eta_{\boldsymbol{u}}$。

通过有限元进行确定性分析，根据可靠性相关理论，转子系统的状态函数定义为

$$g(u_z, u_s) = u_s - u_z \tag{23}$$

其中：u_z 为振动幅值，u_s 为许用的振动幅值，它们是相互独立的随机变量。

状态函数 $g(u_z,u_s)$的前 4 阶矩为

$$\mu_g = \mathrm{E}[g(u_z,u_s)] = E(u_s) - E(u_z) = \mu_{u_s} - \mu_{u_z} \tag{24}$$

$$\sigma_g^2 = \mathrm{Var}[g(u_z,u_s)] = {\sigma_{u_s}}^2 + {\sigma_{u_z}}^2 \tag{25}$$

$$\theta_g = \mathrm{E}[g(u_z,u_s) - \overline{g}(u_z,u_s)]^3 = \theta_{u_s} - \theta_{u_z} \tag{26}$$

$$\eta_g = \mathrm{E}[g(u_z,u_s) - \overline{g}(u_z,u_s)]^4 = \eta_{u_s} + \eta_{u_z} + 6{\sigma_{u_s}}^2{\sigma_{u_z}}^2 \tag{27}$$

将式(18～21)得到的结果 $\mu_{\boldsymbol{u}}$，$\sigma_{\boldsymbol{u}}^2$，$\theta_{\boldsymbol{u}}$和 $\eta_{\boldsymbol{u}}$代入式(24～27)，可得到状态函数 $g(u_z,u_s)$的前 4 阶矩 μ_g，${\sigma_g}^2$，θ_g 和 η_g。

2.2 修正后的可靠性灵敏度计算方法

基于摄动法的可靠性灵敏度计算方法，笔者对其进行了修正，修正后的可靠性灵敏度[13]定义为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}(\overline{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g}\frac{\partial \mu_g}{\partial(\overline{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}}} + \\ \left[\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} + \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g}\right]\frac{\partial \sigma_g}{\partial(\overline{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}}} \tag{28}$$

$$\frac{\mathrm{d}R(\beta)}{\mathrm{d}\mathrm{Var}(\boldsymbol{B})} = \left[\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} + \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g}\right]\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mathrm{Var}(\boldsymbol{B})} \tag{29}$$

其中

$$\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} = \phi(-\beta)\Big\{1 - \beta\Big[\frac{1}{6}\frac{\theta_g}{{\sigma_g}^3}H_2(-\beta) + \\ \frac{1}{24}\left(\frac{\eta_g}{{\sigma_g}^4} - 3\right)H_3(-\beta) + \frac{1}{72}\left(\frac{\theta_g}{{\sigma_g}^3}\right)^2 H_5(-\beta)\Big] - \\ \Big[\frac{1}{3}\frac{\theta_g}{{\sigma_g}^3}H_1(-\beta) + \frac{1}{8}\left(\frac{\eta_g}{{\sigma_g}^4} - 3\right)H_2(-\beta) + \\ \frac{5}{72}\left(\frac{\theta_g}{{\sigma_g}^3}\right)^2 H_4(-\beta)\Big]\Big\} \tag{30}$$

$$\partial\beta/\partial u_g = 1/\sigma_g \tag{31}$$

$$\partial\beta/\partial\sigma_g = -\mu_g/{\sigma_g}^2 \tag{32}$$

$$\frac{\partial R(\beta)}{\partial\sigma_g} = \phi(-\beta)\left[\frac{1}{2}\frac{\theta_g}{{\sigma_g}^4}H_2(-\beta) + \frac{1}{6}\frac{\eta_g}{{\sigma_g}^5}H_3(-\beta) + \frac{1}{12}\frac{{\theta_g}^2}{{\sigma_g}^7}H_5(-\beta)\right] \tag{33}$$

$$\frac{\partial\sigma_g}{\partial(\overline{\boldsymbol{B}})^T} = \frac{1}{2\sigma_g}\left[\frac{\partial^2\overline{g}}{\partial(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^2}\otimes\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}} + \left(\frac{\partial^2\overline{g}}{\partial(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^2}\otimes\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}\right)(\boldsymbol{I}_n\otimes U_{n\times n})\right](\boldsymbol{I}_n\otimes\mathrm{Var}(\boldsymbol{X})) \tag{34}$$

$$\frac{\partial\sigma_g}{\partial\mathrm{Var}(\boldsymbol{X})} = \frac{1}{2\sigma_g}\left[\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{X}}\otimes\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{X}}\right] \tag{35}$$

其中：$\mathrm{d}(\cdot)/\mathrm{d}\,\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}$ 为 $(\cdot)$ 对基本随机变量向量 $\boldsymbol{B}$ 均值的灵敏度；$\mathrm{d}(\cdot)/\mathrm{dVar}(\boldsymbol{B})$ 为 $(\cdot)$ 对基本随机变量向量 $\boldsymbol{B}$ 方差的灵敏度。

将可靠性灵敏度无量纲化后[12]表示为

$$\alpha_i = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\overline{B}_i}\frac{{\sigma_i}^*}{R^*} \tag{36}$$

$$\eta_i = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dVar}(B_i)}\frac{\mathrm{Var}(B_i)^*}{R^*} \tag{37}$$

其中：α_i，η_i 分别为可靠度对随机变量均值和方差的无量纲化后的灵敏度；R^* 为系统可靠度；${\sigma_i}^*$，$\mathrm{Var}(B_i)^*$ 为对应于基本随机变量 B_i 的标准差和方差。

3　具体算例

3.1　齿轮啮合系统模型

齿轮啮合系统模型如图 2 所示，其基本参数见表 1。

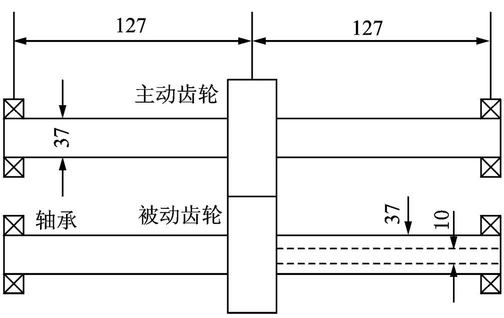


图 2　两平行轴直齿啮合转子系统（单位：mm）

表 1　齿轮的基本参数

参数	主动齿轮	被动齿轮
极惯性矩/(kg·m^2)	0.000 9	0.000 9
质量/kg	0.829	0.829
基圆半径/m	0.046 04	0.046 04
不平衡量/(kg·m)	2.8×10^{-4}	—
齿数	28	28

3.2　基本随机参数的概率特性

影响齿轮啮合刚度的参数有：模数 m；齿宽 b；变位系数 x_1，x_2；重合度 ε_α；啮合角 φ_{p}。假设它们服从正态分布，其均值和方差如表 2 所示。

表 2　基本随机变量的均值和标准差

随机变量	均值	标准差
m/mm	3.5	0.017 5
b/mm	14	0.07
x_1/mm	0	0.1
x_2/mm	0	0.05
ε_α	1.638	0.008 19
φ_{P}/(°)	20	0.1

3.3　可靠性灵敏度计算

经过无量纲化后，可靠度对基本随机变量均值的灵敏度为

$$\alpha = [\alpha_m, \alpha_b, \alpha_{x_1}, \alpha_{x_2}, \alpha_{\varepsilon_\alpha}, \alpha_{\varphi_{\mathrm{P}}}] = [-4.178\,8\times10^{-5}, 8.1\times10^{-5}, 1.316\,5\times10^{-5}, -0.226\,1\times10^{-3}, -0.249\,6\times10^{-3}, 0.149\,98] \tag{38}$$

可靠度对基本随机变量方差的灵敏度为

$$\eta = [\eta_m, \eta_b, \eta_{x_1}, \eta_{x_2}, \eta_{\varepsilon_\alpha}, \eta_{\varphi_{\mathrm{P}}}] = [-3.990\,042\times10^{-9}, -1.499\,123\times10^{-8}, -3.959\,96\times10^{-10}, -1.168\,339\times10^{-7}, -1.423\,126\times10^{-7}, -0.051\,398] \tag{39}$$

由式(38)可知，随机变量的均值对系统可靠性的影响排序为啮合角 φ_{P}、变位系数 x_2 和 x_1、重合度 ε_α、齿宽 b、模数 m。其中：正号表示随着变量的增加，系统趋于可靠；负号表示随着变量的增加，系统趋于失效。由式(39)可知，当随机变量的方差增加时，系统趋于失效，影响排序为啮合角 φ_{P}、变位系数 x_2 和 x_1、重合度 ε_α、齿宽 b、模数 m。

3.4　验证

本算例基于 SORM(2 阶矩)方法得到的重要度排序如表 3 所示。

表 3　采用 SORM 方法基本参数对失效概率重要度排序表

排序	变量	重要度
1	啮合角 φ_{P}	0.999 813
2	变位系数 x_2	0.014 996
3	变位系数 x_1	0.009 400
4	重合度 ε_α	0.007 145
5	模数 m	0.002 242
6	齿宽 b	0.001 782

由表3可知，采用2阶矩方法得到的排序和通过本研究方法得到的排序基本一致。由于2阶矩只能考虑基本随机变量的前2阶矩，而本研究方法能够考虑变量的前4阶矩，因此，计算结果略有差异。本研究方法中，模数的重要度大于齿宽，但是2阶矩方法的齿宽大于重要度，其他的变量排序相同。

4 结 论

1）笔者结合有限元法，推导出包含啮合角φ_p的齿轮啮合刚度矩阵和阻尼矩阵，结合运动微分方程得到系统不平衡激励下的动力响应，程序全部使用参数化语言编写，通用性强。

2）基于修正后的可靠性灵敏度计算方法，更加适用求解工程中的非线性较强的系统，得到了对系统动力可靠性影响较大的参数，并对它们进行了排序，由大到小分别为啮合角φ_p，变位系数x_2和x_1、重合度ε_α、齿宽b和模数m，在工程实际中，若要降低振动，增加可靠性，需要对这些参数加以严格控制。

3）和2阶矩方法进行了对比，对系统可靠性影响最大的为啮合角，所以此参数在进行动力学分析中需要严格控制。

参 考 文 献

[1] Kahraman A, Ozguven H N, Houser D R, et al. Dynamic analysis of geared rotors by finite elements [J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(3): 507-514.

[2] 王炎，马吉胜，郑海起，等. 含柔性转子的齿轮-轴承系统动态特性分析[J]. 振动、测试与诊断，2012，32(1)：51-55.
Wang Yan, Ma Jisheng, Zheng Haiqi, et al. Dynamic characteristics analysis of gear-bearing system with flexible rotor[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(1): 51-55. (in Chinese)

[3] Rao J S, Shiau T N, Chang J R. Theoretical analysis of lateral response due to torsional excitation of geared rotors[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(6): 761-783.

[4] Zhao Yangang, Ono T. New approximations for SORM: part1 [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(1): 79-93.

[5] Seo H S, Kwak B M. Efficient statistical tolerance analysis for general distributions using tree-point information[J]. International Journal of Production Research, 2002, 40(4): 931-944.

[6] Bucher C G, Bourgurd U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems[J]. Structural Safety, 1990, 7(1): 57-66.

[7] Melchers R E, Ahanmmed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability[J]. Computers and Structures, 2004(82): 55-61.

[8] 闫明，孙志礼，杨强. 基于响应面方法的可靠性灵敏度分析方法[J]. 机械工程学报，2007，43(10)：67-71.
Yan Ming, Sun Zhili, Yang Qiang. Analysis method of reliability sensitivity based on response surface methods[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(10): 67-71. (in Chinese)

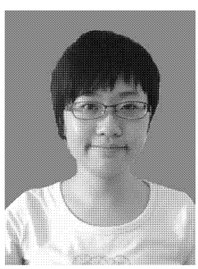
[9] Schoefs F. Sensitivity approach for modeling the environmental loading of marine structures through a matrix response surface[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(7): 1004-1017.

[10] 贺向东. 机械结构可靠性稳健设计若干关键问题的研究 [D]. 长春：吉林大学，2005.

[11] 李润方，王建军. 齿轮系统动力学——振动、冲击、噪声[M]. 北京：科学出版社，1997：162-180.

[12] Zhang Yimin, Zhu Lisha, Wang Xingang. Advanced method to estimate reliability-based sensitivity of mechanical components with strongly nonlinear performance function [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(10): 1325-1336.

[13] Wu Y T. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis[J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1994, 32(8): 1717-1723.



第一作者简介：朱丽莎，女，1986年12月生，博士研究生。主要研究方向为转子动力学、振动和可靠性工程。曾发表《Advanced method to estimate reliability-based sensitivity of mechanical components with strongly nonlinear performance function》(《Applied Mathematics and Mechanics》2010，Vol. 31，No. 10)等论文。
E-mail：neulisachu@yahoo.cn