

建筑结构含分数阶振动控制的最优阶次研究*

石星星¹, 周星德², 竺启泽³, 刘广波¹, 刘谦敏¹

(1. 河海大学力学与材料学院 南京, 210098) (2. 河海大学土木与交通学院 南京, 210098)

(3. 江苏华东工程设计有限公司 南京, 210007)

摘要 为了在实际控制中获得更好的控制效果,以整数阶模型为研究对象,在控制器设计时人为地引入分数阶,通过定义控制性能指标和寻优来确定最优控制的分数阶阶次。为了建立分数阶系统和原整数阶系统之间的联系,取含分数阶状态方程和原整数阶系统状态方程一致的输出变量,并采用输出控制策略使得所设计的分数阶控制器能够应用于原整数阶模型。仿真结果表明,分数阶阶次的选择不仅影响系统控制的效果,还影响系统的稳定性,并给出了一个实例分析来说明本研究方法的可行性。

关键词 建筑结构; 分数阶; 振动控制; 最优阶次

中图分类号 TU311.3

引言

近年来,由于许多物理对象具有分数阶特性,如黏弹性材料、阻尼、机械摩擦和冲击等^[1-3],分数阶微积分研究逐渐增加。Bagley等^[4]将含分数阶阻尼模型引入振动方程;王在华等^[5]从稳定性角度严格证明了介于0和2之间的任意分数阶导数项都可以起到阻尼作用;Tangpong等^[6]提出了分数阶最优控制方法。研究表明,分数阶控制方法具有比传统整数阶控制方法更好的控制效果。

目前,分数阶模型控制方法多基于滤波器近似为整数阶的控制策略。笔者针对整数阶模型,人为地改为分数阶模型,再采用分数阶模型设计控制器以改善控制效果。为了把基于分数阶模型设计的控制器应用于整数阶模型,笔者提出了基于系统输出的控制策略,从仿真结果来看,可以大大改善整数阶模型的控制效果。此外,还对分数阶阶次选择与控制系统稳定性进行了研究。

1 整数阶系统的最优控制

含比例阻尼的建筑结构运动方程为

$$M\ddot{X} + C_c\dot{X} + KX = B_sU + E_sF \quad (1)$$

其中: $X \in R^{n \times 1}$ 为位移向量; M, C_c 和 K 分别为质量、

阻尼和刚度矩阵,均为 $n \times n$ 维矩阵; $B_s \in R^{n \times p}$ 为作动器定位矩阵; $U \in R^{p \times 1}$ 为作动器控制力向量; p 为作动器数; $E_s \in R^{n \times q}$ 为外部激励定位矩阵; $F \in R^{q \times 1}$ 为外部激励向量; q 为外部激励数。

将式(1)写成如下状态方程

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + BU + EF \\ Y = CZ \end{cases} \quad (2)$$

其中: $A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_c \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ M^{-1}B_s \end{bmatrix}$;
 $E = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ -I_{n \times 1} \end{bmatrix}$; C 为观测输出矩阵。

定义性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (Z^T Q Z + U^T R U) dt \quad (3)$$

其中: Q, R 分别为 r 维、 p 维权矩阵。

通过极小化性能指标,可得控制力为

$$U = -GZ \quad (4)$$

其中: G 为控制增益矩阵, $G = R^{-1}B^T P$ 。

矩阵 P 为下列Riccati方程的解

$$-A^T P - PA + PBR^{-1}B^T P - C^T Q C = 0 \quad (5)$$

2 基于分数阶的控制器设计

将式(1)变为

$$M\ddot{X} + CX^{(\alpha)} + KX^{(\beta)} = B_sU + E_sF \quad (6)$$

其中: α, β 为待定的分数阶阶次。

* 国家“十一五”科技支撑计划资助项目(2008BAB29B03)

收稿日期:2011-08-02;修改稿收到日期:2011-09-27

令 $X = \Phi X_r$, 代入式(6)可得

$$M_r \ddot{X}_r + C_r X_r^{(\alpha)} + K_r X_r^{(\beta)} = B_r U + E_r F \quad (7)$$

其中: $M_r = \Phi_r^T M \Phi_r$; $C_r = \Phi_r^T C \Phi_r$; $K_r = \Phi_r^T K \Phi_r$; $B_r = \Phi_r^T B_s$; $E_r = \Phi_r^T E_s$.

式(7)中包含 n 个单自由度系统, 为

$$m_{ri} \ddot{x}_{ri} + c_{ri} x_{ri}^{(\alpha)} + k_{ri} x_{ri}^{(\beta)} = v_{ri}(t) \quad (8)$$

其中: $m_{ri} = M_r(i, i)$; $c_{ri} = C_r(i, i)$; $k_{ri} = K_r(i, i)$; $v_{ri} = B_{ri} U + E_{ri} F$; B_{ri} 为 B_r 的第 i 行元素; E_{ri} 为 E_r 的第 i 行元素, $i = 1, 2, \dots, n$.

对式(8)进行 Laplace 变换, 得

$$G_i(s) = (m_{ri} s^2 + c_{ri} s^\alpha + k_{ri} s^\beta)^{-1} \quad (9)$$

对 $s^{(\alpha)}, s^{(\beta)}$ 进行整数阶近似^[9], 拟合频率段为 $[\omega_l, \omega_h]$, 可构造如下传递函数

$$G_f(s) = K_f \prod_{j=-N}^N \frac{s + \bar{\omega}_j}{s + \omega_j} \quad (10)$$

其中: $K_f, \omega_j, \bar{\omega}_j$ 的表达式见文献[7]; N 为所选整数。

用式(10)的 $G_f(s)$ 代替式(9)中的 $s^{(\alpha)}, s^{(\beta)}$, 则传递函数 $G_i(s)$ 可表示为

$$\bar{G}_i(s) = \frac{s^{m_i} + a_1 s^{m_i-1} + \dots + a_{m_i-1} s + a_{m_i}}{s^{n_i} + b_1 s^{n_i-1} + \dots + b_{n_i-1} s + b_{n_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

其中: m_i, n_i 均为正整数, 且 $m_i < n_i$ 。

将式(11)转化为状态方程

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \tilde{A}_i z_i + \tilde{B}_i v_i \\ x_{ri} = C_{ri} z_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

其中: $z_i \in R^{n_i \times 1}$; $\tilde{A}_i \in R^{n_i \times n_i}$; $\tilde{B}_i \in R^{n_i \times 1}$; $C_{ri} \in R^{1 \times n_i}$; 均为转换过程中产生的矩阵。

将 $v_{ri} = B_{ri} U + E_{ri} F$ 代入上式, 可得

$$\begin{cases} \dot{z}_i = \tilde{A}_i z_i + B_i U + E_i F \\ x_{ri} = C_i z_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

其中: $B_i = \tilde{B}_i B_{ri}$; $E_i = \tilde{B}_i E_{ri}$ 。

将式(13)写成矩阵形式

$$\begin{cases} \dot{\bar{Z}} = \bar{A} \bar{Z} + \bar{B} U + \bar{E} F \\ X_r = \bar{C} \bar{Z} \end{cases} \quad (14)$$

其中: $\bar{Z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$; $\bar{B} = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n]^T$; $\bar{E} = [E_1 \ E_2 \ \dots \ E_n]^T$; $X_r = [x_{r1} \ x_{r2} \ \dots \ x_{rn}]^T$; $\bar{A} = \text{diag}[\tilde{A}_1 \ \tilde{A}_2 \ \dots \ \tilde{A}_n]$; $\bar{C} = \text{diag}[C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]$ 。

设观测输出为 $\bar{Y} = \bar{H} X_r$, 考虑到 $X = \Phi X_r$, 则 $\bar{Y} = \bar{H} X_r, \bar{H} = \bar{H} \Phi$ 。代入式(14)可得

$$\begin{cases} \dot{\bar{Z}} = \bar{A} \bar{Z} + \bar{B} U + \bar{E} F \\ \bar{Y} = \bar{H} \bar{Z} \end{cases} \quad (15)$$

其中: $\bar{H} = \overline{HC}$ 。

笔者采用基于系统输出的控制策略, 选择控制输出矩阵使得 $\bar{Y} = Y$ 。定义性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (Y^T Q Y + U^T R U) dt \quad (16)$$

通过极小化性能指标可得控制力为

$$U = -\tilde{R}^{-1} \bar{B}^T \bar{P} H^{-1} Y \quad (17)$$

其中: 控制增益 $G = \tilde{R}^{-1} \bar{B}^T \bar{P} H^{-1}$ 。

则

$$U = -GY \quad (18)$$

矩阵 \bar{P} 为下列 Riccati 方程的解

$$-\bar{A}^T \bar{P} - \bar{P} \bar{A} + \bar{P} \bar{B} \tilde{R}^{-1} \bar{B}^T \bar{P} - H^T \bar{Q} H = 0 \quad (19)$$

假设每个作动器最大控制力为 u_{\max} , 则

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

$$u_i = \begin{cases} u_i & (u_i < u_{\max}, i = 1, 2, \dots, p) \\ u_{\max} & (u_i \geq u_{\max}, i = 1, 2, \dots, p) \end{cases}$$

结合上式, 将式(18)代入式(4), 则整体状态方程可化为

$$\begin{cases} \dot{Z} = \bar{A} Z + E F \\ Y = C Z \end{cases} \quad (20)$$

其中: $\bar{A} = A - BGC$ 。

3 最优阶次

定义建筑结构控制性能指标 J

$$J = (\gamma_1 \|x\|_2 / |x|_{\max} + \gamma_2 \|f\|_2 / |f|_{\max})^{-1} \quad (21)$$

其中: x 为各个自由度结构经控制后的位移; f 为各作动器的作用力; γ_1, γ_2 为权系数。

控制系统最优控制阶次根据系统稳定性、最大位移分布稳定性和控制性能指标逐次限定。当 $\alpha = 1, \beta = 0$ 时控制系统等同于传统整数阶方法控制整数阶模型。

4 仿真分析

笔者以 5 层剪切型框架结构作为研究对象(见图1), 在楼层 1, 2 布置作动器。选择 El Centro 波作为水平方向激励, 结构阻尼比为 0.02。各楼层的质量均为 $3.2 \times 10^5 \text{ kg}$, 刚度为 43 MN/m。考虑到建筑结构的特点, 选择拟合频率段为 (0.001, 100) rad/s。

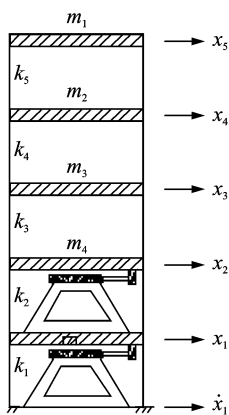


图1 5层框架结构

$N=2$ 。在控制器的设计中,权矩阵选择如下: Q 为21维对角矩阵,其对角线上的元素均为 1×10^7 ; R 为 2×2 阶对角矩阵,其对角线上的元素均为1.3。结合实际限定作动器最大输出为1 000 kN。

首先考虑控制效果的稳定性,分别限定 α ,改变 β ;限定 β ,改变 α ,得到与 x_{\max} 的关系,如图2,3所示。结合控制稳定性,初步选取 α, β 的范围,对控制性能指标的影响如图4所示。排除边界不稳定区域,从图4中可以得到最优控制区域。

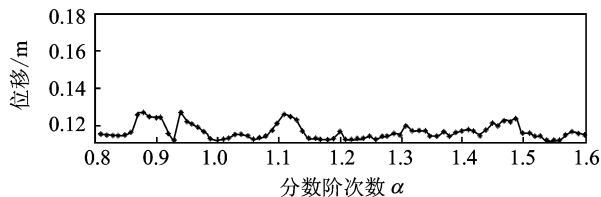


图2 控制后最大位移随分数阶阶次 α 的变化曲线

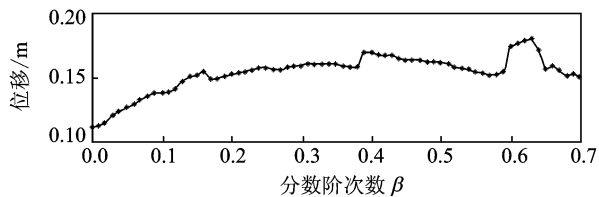


图3 控制后最大位移随分数阶阶次 β 的变化曲线

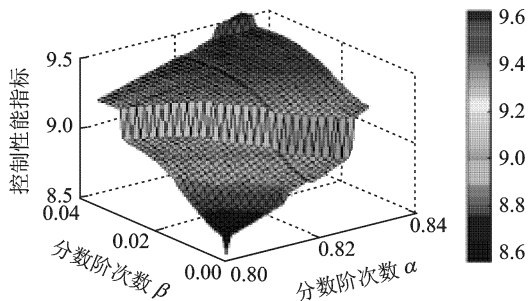


图4 控制效果指标随分数阶次数的变化曲线

以楼层4为例,控制效果见图5(图中虚、实线分别为未控制时和当 $\alpha=0.840, \beta=0.033$ 分数阶控制后的位移响应),第2作动器控制力时程曲线见图6。控制效果指标 $J=9.3856$,当 $\alpha=1, \beta=0$ 时等同于传统整数阶控制模型控制效果指标 $J=7.3996$,由此可以看出,笔者所设计的控制器比传统整数阶控制具有更好的控制效果。

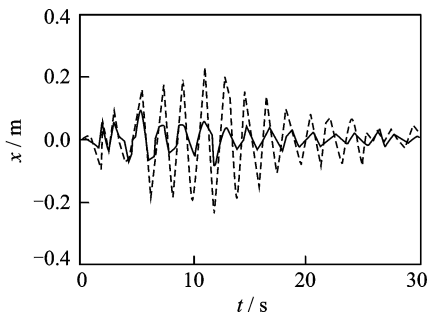


图5 第4楼层位移响应控制效果图

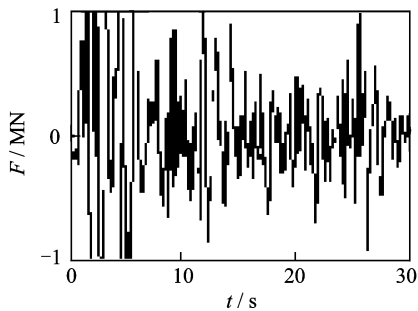


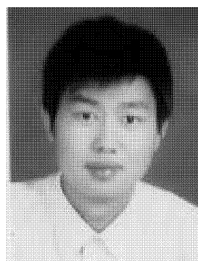
图6 第2作动器的控制力时程曲线

5 结束语

笔者从大量案例及图2,3中观察发现: α 的变化对最大位移的影响较为平稳,对控制效果影响较小;而 β 的改变对控制效果影响较大,所以取值范围不宜过大。从实例中可以看出,含分数阶的控制方法具有更好的控制效果。由于实际系统的自由度多,维数较高,不利于控制的实现,可以采用模态降阶法。首先,对系统进行降阶,同时采用Oustaloup算法对分数阶方程进行拟合,虽然效果较好,但所设计的控制器阶数偏高,也可以对其进行降阶处理,再进行控制器设计;其次,实际测量响应多为加速度响应,因此可以采用加速度等输出来进行控制器的设计。通过对更多实例进行仿真分析,结果表明本研究提出的控制方法是有效的,控制效果比较好。

参 考 文 献

- [1] Jia Jiuhong, Shen Xiaoyao, Hua Hongxing. Viscoelastic behavior analysis and application of the fractional derivative maxwell model [J]. Journal of Vibration and Control, 2007, 13(4): 385-401.
- [2] Shokooh A, Suarez L. A comparison of numerical methods applied to a fractional model of damping materials [J]. Journal of Vibration and Control, 1999, 5(3): 331-354.
- [3] Barbosa R S, Machado J A T. Describing function analysis of systems with impacts and backlash [J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1/4): 235-250.
- [4] Torvik P J, Bagley R L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real material [J]. Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME, 1984, 51(2): 294-298.
- [5] 王在华, 胡海岩. 含分数阶导数阻尼的线性振动系统的稳定性[J]. 中国科学:G 辑, 2009, 39(10): 1495-1502.
Wang Zaihua, Hu Haiyan. Stability of a linear oscillator with damping force of fractional-order derivative [J]. Science China: Ser G, 2009, 39(10): 1495-1502. (in Chinese)
- [6] Tangpong X W, Agrawal O P. Fractional optimal control of distributed systems [J]. ASME International Engineering Congress and Exposition, 2008, 9(A): 511-519.
- [7] Oustalop A, Levron F, Mathieu B. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis [J]. IEEE Transaction on Circuit and Systems-I: Fundamental Theory and Application 2000, 47(1): 25-39.
- [8] 周星德, 姜冬菊. 结构振动主动控制 [M]. 北京: 科学出版社, 2009: 92-107.
- [9] 梁涛年, 陈建军. 时滞系统分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 鲁棒控制 [J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(3): 357-361.
Liang Taonian, Cheng Jianjun. Fractional order robust control for time delay system [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011, 31(3): 357-361. (in Chinese)
- [10] Podlubny I. Fractional differential equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999: 244-247.
- [11] Raynaud H F, Zergalnoh A. State-space representation for fractional order controllers [J]. Automatica, 2000, 36(7): 1017-1021.



第一作者简介: 石星星, 男, 1986年11月生, 硕士研究生。主要研究方向为结构振动与控制。

E-mail: shixingxing777@163.com。