

# 智能 Timoshenko 梁强迫振动响应的行波解\*

黄迪山, 刘玉霞, 朱晓锦

(上海大学机电工程与自动化学院 上海, 200072)

**摘要** 运用行波法求解智能 Timoshenko 梁的强迫振动响应。基于梁的振动行波法分析理论, 介绍周期力和周期力矩激励下激励点处波的传播关系, 推导在逆压电效应下, 智能 Timoshenko 梁上某一点的响应函数, 并以智能 Timoshenko 悬臂梁为例, 得到梁不同位置的拾振点处的幅频和相频特性及不同受力状况下的智能梁的幅频特性, 还得到了受迫振动的时域响应信号波形, 最后将求解结果与有限元法求解结果做对比分析。分析结果表明, 行波法分析可用于精确计算智能梁的强迫振动响应。

**关键词** 行波法; 智能梁; 强迫振动; 频域响应特性; 时域响应特性; Timoshenko 梁

**中图分类号** TH113; O325

## 引言

近年来, 柔性结构的振动控制已成为人们研究的热点, 由于压电材料具有良好的机电耦合性能, 具有正、逆压电效应、反应快、制动力较大的优点, 广泛用于智能结构中。压电智能悬臂梁结构简单, 在航天结构中经常被采用, 太阳能帆板、大型空间可展开反射器以及大型天线结构。太空环境没有空气, 并且柔性结构本身阻尼很小, 当受到干扰激励时, 例如太阳风、变轨、调姿和对接中机构产生的振动, 将影响结构的正常工作, 甚至降低结构的使用寿命<sup>[1]</sup>。因此, 研究智能 Timoshenko 梁的振动响应特性, 是对其进行振动控制的基础。

目前, 对结构作振动分析的方法主要为振动模态法、有限元法和行波法。其中振动模态分析法忽视了扰动传播速度的影响, 在对复杂结构的动力分析中误差偏大; 有限元法的计算结果在很大程度上依赖于单元类型、单元尺寸和求解方法, 且计算量庞大<sup>[2]</sup>。结构振动的行波分析法的研究最早始于 vonFlotow<sup>[3]</sup>以梁作为基本单元, 对柔性航天结构振动的波动角度研究。Mace<sup>[4]</sup>给出了 Euler-Bernoulli 梁模型中的波传递关系。Mei C<sup>[5]</sup>在此基础上, 较全面地分析了振动波在 Timoshenko 梁中反

射、透射和传播特性, 及外界激励与射入波的矩阵关系, 利用导波单元特性和各导波单元组装波动回路, 行波法可以分析各种条件和边界下的振动响应特性; 由于节点建模的独立性和波动回路方程的简洁性, 为由 Timoshenko 梁组成的复杂结构的振动分析提供了一个精确和系统的方法。

笔者基于行波法分析智能 Timoshenko 梁的振动特性理论<sup>[6]</sup>, 介绍 Timoshenko 梁在外力和外力矩激励下波的传播模型, 并建立智能 Timoshenko 悬臂梁模型, 结合压电片的压电效应, 推导智能梁上任一点处的频率响应, 运用 Matlab 进行数值仿真, 得到智能梁上任一点的响应曲线及受迫振动的时域响应, 并将求解结果与有限元法求解进行对比分析。

## 1 受轴向压力 Timoshenko 梁的自由振动方程

考虑到轴向受力的 Timoshenko 梁的振动方程<sup>[7]</sup>为

$$GA\kappa \left[ \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (1a)$$

$$EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + GA\kappa \left[ \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t) \right] -$$

\* 国家自然科学基金资助项目(90716027)

收稿日期: 2011-04-06; 修改稿收到日期: 2012-05-04

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1b)$$

其中:  $x$  为沿梁长度方向的位置坐标;  $t$  为时间;  $y(x,t)$  为梁中性线的挠度;  $q(x,t)$  为横向均匀分布的外力;  $E, G$  和  $\rho$  分别为弹性模量、剪切模量和密度;  $I$  为横截面相对中性轴的惯性矩;  $A$  为横截面积;  $\kappa$  为剪切系数;  $\psi(x,t)$  为由弯曲造成的截面转角, 则  $\partial y(x,t)/\partial x - \psi(x,t)$  即是中性轴上由剪切变形造成的斜度;  $F$  为轴向力, 且假设压力为正。式(1a)和式(1b)为梁结构中弯曲斜度和横向位移相互耦合的振动方程。

假设时间变量为简谐函数, 应用分离变量法, 式(1)的解可以分别写成  $y(x,t) = y_0 e^{-ik^*x} e^{i\omega t}$  和  $\psi(x,t) = \psi_0 e^{-ik^*x} e^{i\omega t}$  形式。其中:  $\omega$  为圆频率,  $k^*$  为波数,  $i$  为虚数单位且以下相同,  $y_0$  为挠度幅值,  $\psi_0$  为截面转角幅值。将上面两式分别代入式(1a)和式(1b), 求解得到一组波数, 并且这些波数由圆频率  $\omega$  和结构本身特性决定, 其根为

$$\begin{cases} k_1^* = \pm \sqrt{\frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}}{2a_0}} \\ k_2^* = \pm \sqrt{\frac{-b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}}{2a_0}} \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$a_0 = EI(GA\kappa - F);$$

$$b_0 = -(EI\rho A\omega^2 + (GA\kappa - \rho I\omega^2)F + GA\kappa\rho I\omega^2);$$

$$c_0 = -\rho A\omega^2(GA\kappa - \rho I\omega^2)。$$

波在梁中的传播分为正负两个方向, 并用大括号外的  $\pm$  表示, 对于受轴向力的 Timoshenko 梁的振动存在一个波动模态的临界频率  $\omega_c = \sqrt{\frac{GA\kappa}{\rho I}}$ , 它与不受轴向力的 Timoshenko 梁的弹性弯曲振动得到的临界频率值相等。

不考虑时间独立分量  $e^{i\omega t}$ , 式(1)的解可表示为

$$y(x) = a_1^+ e^{-ik_1^*x} + a_2^+ e^{-k_2^*x} + a_1^- e^{ik_1^*x} + a_2^- e^{k_2^*x} \quad (3a)$$

$$\psi(x) = \bar{a}_1^+ e^{-ik_1^*x} + \bar{a}_2^+ e^{-k_2^*x} + \bar{a}_1^- e^{ik_1^*x} + \bar{a}_2^- e^{k_2^*x} \quad (3b)$$

其中:  $a_1^+$  和  $a_1^-$  分别为正、负方向的位移行波的波幅。在  $\omega < \omega_c$  (多数情况) 时,  $a_2^+$  和  $a_2^-$  代表正、负两个方向的衰减波的波幅; 在  $\omega > \omega_c$  时, 则代表正负两个方向的行波。 $\bar{a}_1^+, \bar{a}_2^+$  和  $\bar{a}_1^-, \bar{a}_2^-$  分别代表正负方向转角行波和衰减波的波幅。

将式(3)代入式(1)可得到位移幅值  $a_1^+$  和转角幅值  $\bar{a}_1^+$  之间的相互关系为

$$\frac{\bar{a}_1^+}{a_1^+} = i \frac{\rho A\omega^2 - (k_1^*)^2 GA\kappa + F(k_1^*)^2}{k_1^* GA\kappa} = i \frac{k_1^* GA\kappa}{\rho I\omega^2 - EI(k_1^*)^2 - GA\kappa} \quad (4)$$

同理, 可得到  $y(x)$  和  $\psi(x)$  各系数之间的关系

$$\frac{\bar{a}_1^-}{a_1^-} = -iP^*, \frac{\bar{a}_1^+}{a_1^+} = iP^*, \frac{\bar{a}_2^-}{a_2^-} = -N^*, \frac{\bar{a}_2^+}{a_2^+} = N^* \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} P^* = k_1^* \left( 1 - \frac{\rho A\omega^2}{(k_1^*)^2 GA\kappa} - \frac{F}{GA\kappa} \right) \\ N^* = k_2^* \left( 1 + \frac{\rho A\omega^2}{(k_2^*)^2 GA\kappa} - \frac{F}{GA\kappa} \right) \end{cases} \quad (6)$$

## 2 外力和外力矩激励下波的传播模型

均质梁段在外力和外力矩激励下波的传播模型如图 1 所示, 在梁上  $x=0$  处作用有周期力  $\bar{Q}$  和周期力矩  $\bar{M}$ , 一组横向往行波从  $x=0$  左端入射。  $a^+, b^-$  和  $a^-, b^+$  分别为激励点左右两侧入射波和反射波。

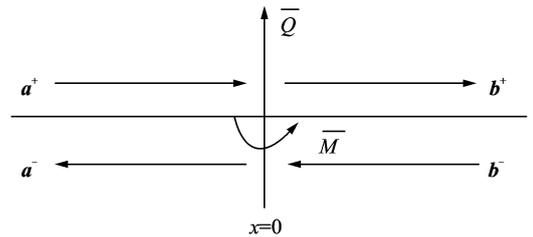


图 1 外力和外力矩激励下波的传播模型

由于剪力和弯矩发生突变, 从而导致激励点两端的波幅向量也发生突变。由激励点处的连续条件和力平衡条件<sup>[8]</sup>可以得到如下关系式

$$\begin{cases} y_- = y_+, \psi_- = \psi_+ \\ \bar{Q} = GA\kappa \left[ \left( \frac{\partial y_-}{\partial x} - \psi_- \right) - \left( \frac{\partial y_+}{\partial x} - \psi_+ \right) \right] \\ \bar{M} = EI \left( \frac{\partial \psi_-}{\partial x} - \frac{\partial \psi_+}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$y_- = a_1^+ e^{-ik_1^*x} + a_2^+ e^{-k_2^*x} + a_1^- e^{ik_1^*x} + a_2^- e^{k_2^*x} \quad (8a)$$

$$y_+ = b_1^+ e^{-ik_1^*x} + b_2^+ e^{-k_2^*x} + b_1^- e^{ik_1^*x} + b_2^- e^{k_2^*x} \quad (8b)$$

$$\psi_- = -iPa_1^+ e^{-ik_1^*x} - Na_2^+ e^{-k_2^*x} + iP a_1^- e^{ik_1^*x} + Na_2^- e^{k_2^*x} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \psi_+ = & -iPb_1^+ e^{-ik_1 x} - Nb_2^+ e^{-k_2 x} + \\ & iPb_1^- e^{ik_1 x} + Nb_2^- e^{k_2 x} \end{aligned} \quad (9b)$$

将式(8)和式(9)代入式(7),得到

$$\gamma_1 \mathbf{b}^+ + \gamma_2 \mathbf{b}^- - \gamma_1 \mathbf{a}^+ - \gamma_2 \mathbf{a}^- = 0 \quad (10a)$$

$$\beta_1 \mathbf{b}^+ + \beta_2 \mathbf{b}^- - \beta_1 \mathbf{a}^+ - \beta_2 \mathbf{a}^- = \beta_3 \quad (10b)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^+ &= \begin{Bmatrix} a_1^+ \\ a_2^+ \end{Bmatrix}, \mathbf{a}^- = \begin{Bmatrix} a_1^- \\ a_2^- \end{Bmatrix}, \mathbf{b}^+ = \begin{Bmatrix} b_1^+ \\ b_2^+ \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{b}^- &= \begin{Bmatrix} b_1^- \\ b_2^- \end{Bmatrix}, \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iP & N \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -iP & -N \end{bmatrix} \\ \beta_1 &= \begin{bmatrix} ik_1 - iP & k_2 - N \\ k_1 P & -k_2 N \end{bmatrix}, \\ \beta_2 &= \begin{bmatrix} -ik_1 + iP & -k_2 + N \\ k_1 P & -k_2 N \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \overline{GA\kappa} \\ \bar{M} \\ \overline{EI} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

由式(4)可以得到

$$\begin{cases} \mathbf{b}^+ - \mathbf{a}^+ = \mathbf{g}_1 = (\beta_1 - \beta_2 \gamma_2^{-1} \gamma_1)^{-1} \beta_3 \\ \mathbf{a}^- - \mathbf{b}^- = \mathbf{g}_2 = \gamma_2^{-1} \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2 \gamma_2^{-1} \gamma_1)^{-1} \beta_3 \end{cases} \quad (12)$$

以上各式中,  $\mathbf{y}_-, \psi_-$  和  $\mathbf{y}_+, \psi_+$  分别为激励点左和右侧的梁中性线的挠度和由弯曲造成的截面转角。  $a_1^+, a_2^+$  和  $b_1^+, b_2^+$  分别表示正向波  $\mathbf{a}^+$  和  $\mathbf{b}^+$  的行波和衰减波的波幅系数,  $a_1^-, a_2^-$  和  $b_1^-, b_2^-$  分别表示负向波  $\mathbf{a}^-$  和  $\mathbf{b}^-$  的行波和衰减波的波幅系数。  $\bar{Q}$  和  $\bar{M}$  分别为作用于  $x=0$  处的周期激励力和周期激励力矩。

### 3 压电智能梁的强迫振动响应函数

建立智能悬臂梁 QS 的强迫振动模型, 由于压电元件均匀对称地分布在基体梁上, 压电元件横截面为大小相同的矩形, 材料均为各向同性, 压电材料和基体梁内部的应力和应变均匀分布。因此, 根据弹性模量的混合定律计算压电梁段的纵向等效弹性模量<sup>[9]</sup>。

压电陶瓷片具有逆压电效应, 即在外电场作用下压电体会产生形变, 因此它可作为压电致动器, 产生致动力和致动力矩。当压电片对称分布于中性面时, 对其施加方向相反的驱动电压, 上下压电片产生的轴向致动力等大反向, 相互抵消, 此时压电片产生的致动力矩用于激励结构振动。如图 2 所示, 压电片为根部粘贴, 粘贴压电片段为 QU, 激励点在 Z 点, 由于点 Z 在压电片上, 设 QZ 段和 ZU 段长度分

别为  $L_{11}$  和  $L_{12}$ , QU 段长度为  $L_1$ , US 段长度为  $L_2$ , 悬臂梁总长度为  $L$ 。

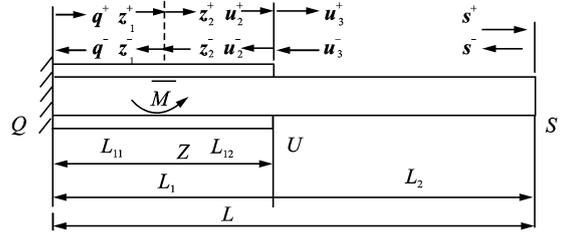


图 2 智能悬臂梁的强迫振动模型

图 2 中各波幅系数之间的关系为

$$\begin{cases} q^+ = r_Q q^-, s^- = r_S s^+, z_1^+ = f(L_{11}) q^+ \\ u_2^+ = f(L_{12}) z_2^+, s^+ = f(L_2) u_3^+ \\ u_3^- = f(L_2) s^-, z_2^- = f(L_{12}) u_2^-, q^- = f(L_{11}) z_1^- \\ u_3^+ = t_{12} u_2^+ + r_{22} u_3^-, u_2^- = t_{21} u_3^- + r_{11} u_2^- \end{cases} \quad (13)$$

其中:  $r_Q, r_S$  分别为 Q, S 两处的反射矩阵;  $r_{11}, t_{12}, r_{22}$  和  $t_{21}$  分别为变截面 U 处左右两端的反射矩阵和透射矩阵;  $f(L_{11}), f(L_{12})$  和  $f(L_2)$  分别表示 QZ 段, ZU 段和 US 段波的传播矩阵。

由式(13)递推得到 Z 点各波幅系数之间的关系为

$$z_1^+ = \rho_1 z_1^-, z_2^- = \rho_2 z_2^+ \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_1 &= f(L_{11}) r_Q f(L_{11}) \\ \rho_2 &= f(L_{12}) r_{11} f(L_{12}) + f(L_{12}) t_{21} f(L_2) r_S f(L_2) \cdot \\ & \quad (\mathbf{I} - r_S f(L_2) r_{22} f(L_2))^{-1} r_S f(L_2) t_{12} f(L_{12}) \end{aligned}$$

$\mathbf{I}$  为二阶单位矩阵。

由式(12)知

$$\begin{cases} z_2^+ - z_1^+ = \mathbf{g}_1 = (\beta_1 - \beta_2 \gamma_2^{-1} \gamma_1)^{-1} \beta_3 \\ z_1^- - z_2^- = \mathbf{g}_2 = \gamma_2^{-1} \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2 \gamma_2^{-1} \gamma_1)^{-1} \beta_3 \end{cases} \quad (15)$$

由式(14), (15)联立可求得  $z_1^+$  和  $z_1^-$ ,  $z_2^+$  和  $z_2^-$ ,  $u_3^+$  和  $u_3^-$ , 分别为

$$\begin{cases} z_1^+ = \rho_1 (\rho_2^{-1} - \rho_1)^{-1} (\mathbf{g}_1 + \rho_2^{-1} \mathbf{g}_2), z_1^- = \rho_1^{-1} z_1^+ \\ z_2^+ = z_1^+ + \mathbf{g}_1, z_2^- = \rho_2 z_2^+ \\ u_3^+ = (\mathbf{I} - r_{22} f(L_2) r_S f(L_2))^{-1} t_{12} f(L_{12}) z_2^+ \\ u_3^- = f(L_2) r_S f(L_2) u_3^+ \end{cases} \quad (16)$$

事实上, 也可将式(13)和式(15)联立写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}
 -I & r_Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 f(L_{11}) & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -I & 0 & f(L_{11}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & f(L_{12}) & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & f(L_{12}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f(L_2) & 0 & -I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & f(L_2) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_s & -I \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{12} & 0 & -I & r_{22} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{11} & -I & 0 & t_{21} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 q^+ \\
 q^- \\
 z_1^+ \\
 z_1^- \\
 z_2^+ \\
 z_2^- \\
 u_2^+ \\
 u_2^- \\
 u_3^+ \\
 u_3^- \\
 s^+ \\
 s^-
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 g_1 \\
 g_2
 \end{bmatrix}
 \tag{17}$$

其中:  $\mathbf{0}$  为零矩阵或零矢量;  $\mathbf{I}$  为二阶单位矩阵。

将式(17)矩阵记为

$$\mathbf{MX} = \mathbf{N} \tag{18}$$

其中:  $\mathbf{X}$  为各波幅向量组成的列矩阵;  $\mathbf{M}$  为方程(18)的系数矩阵, 则由  $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$  得到各对应的波幅向量。

由上述结论可得到智能悬臂梁上任一点的响应。例如, QZ 段区域内距离激励点 Z 为  $x_1$  处的点的响应为

$$\mathbf{y}(x_1) = [1 \quad 1] \mathbf{f}(x_1) \mathbf{z}_1^- + [1 \quad 1] \mathbf{f}(-x_1) \mathbf{z}_1^+ \tag{19}$$

ZU 段区域内距离激励点 Z 为  $x_2$  的点的响应为

$$\mathbf{y}(x_2) = [1 \quad 1] \mathbf{f}(x_2) \mathbf{z}_2^+ + [1 \quad 1] \mathbf{f}(-x_2) \mathbf{z}_2^- \tag{20}$$

同理, US 段区域内距 Z 点为  $x_3$  处的点的响应为

$$\mathbf{y}(x_3) = [1 \quad 1] \mathbf{f}(x_3) \mathbf{u}_3^+ + [1 \quad 1] \mathbf{f}(-x_3) \mathbf{u}_3^- \tag{21}$$

### 4 仿真结果

以根部粘贴压电片的智能悬臂梁为例, 根据上述行波理论对智能 Timoshenko 梁受迫振动响应的理论推导, 通过在 Matlab 中编程分别计算激励点左右两侧拾振点处的响应及相位, 以及智能梁受不同轴向力作用时拾振点处的响应。

基体梁和压电材料的物理参数如表 1 所示, 采用图 2 所示智能梁结构, 压电片分布于悬臂梁根部。

梁 QS 的总长  $L$  为 1.5 m, 压电片 QZ 段长度  $L_1$  为 0.2 m, 激励点 Z 处作用有单位周期弯矩, 点 Z 距 Q 端的距离  $L_{11}$  为 0.1 m。

表 1 悬臂梁基体和压电材料的物理参数

物理参数	长度/m	宽度/m	厚度/m	密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	弹性模量/( $10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ )	泊松比
基体梁	1.5	0.05	0.03	2 800	$7.1 \times 10^{10}$	0.3
压电片 (PZT)	0.2	0.05	0.005	7 500	$6.3 \times 10^{10}$	0.3

#### 算例 1 智能悬臂梁不同位置的频率响应。

在固定激励点情况下, 智能梁频率响应随不同位置处的拾振点而改变。分别选取位于激励点 Z 左侧 0.05 m 处, 右侧 0.05 m 处和右侧 0.5 m 处作为分析对象, 三处的幅频响应分别如图 3(a)、3(b)、3(c)所示, 而图 3(d)、3(e)、3(f)为对应的相频特性(滞后)。由图 3 知, 当 Z 点左右两侧的拾振点距 Z 点的距离相同时, 右侧拾振点处的共振幅值大于左侧; 当右侧拾振点距激励点 Z 较远时, 在 200~400 Hz 之间就会出现无反共振点现象。

#### 算例 2 不同轴向力状况下智能悬臂梁的强迫响应。

智能梁在受到轴向力作用时, 响应特性与轴向力大小有关。如在轴向力为 0 kN、轴向压力为 100 kN、轴向拉力为 100 kN 3 种受力状况下, 计算距 Z 点右侧 0.5 m 的拾振点处的幅频响应作对比分析, 分析结果如图 4 所示。由图 4 知, 与智能梁无轴向力时拾振点处的幅频响应相比, 当受到轴向压力时, 拾振点的共振频率降低, 受到轴向拉力时, 拾振点的共振频率提高。

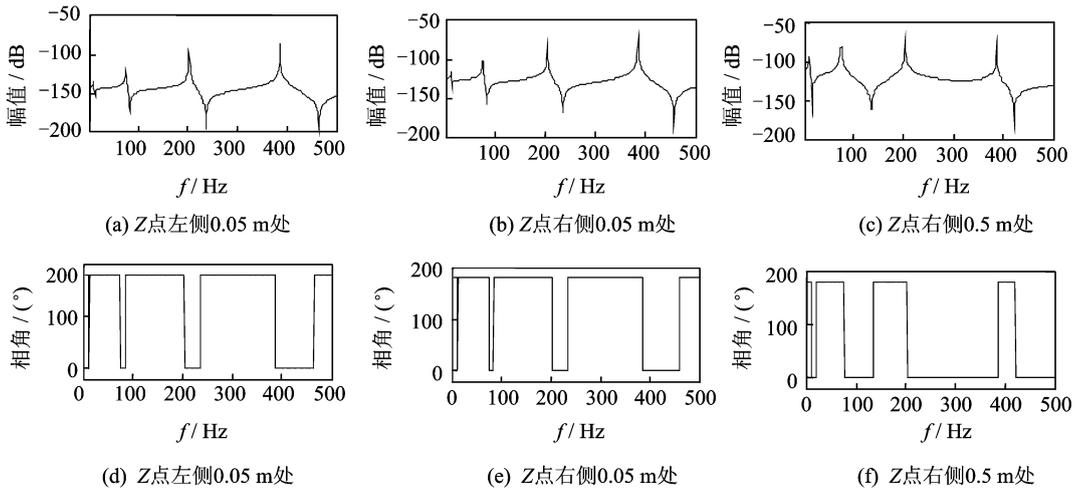


图3 不同位置拾振点处的频率响应

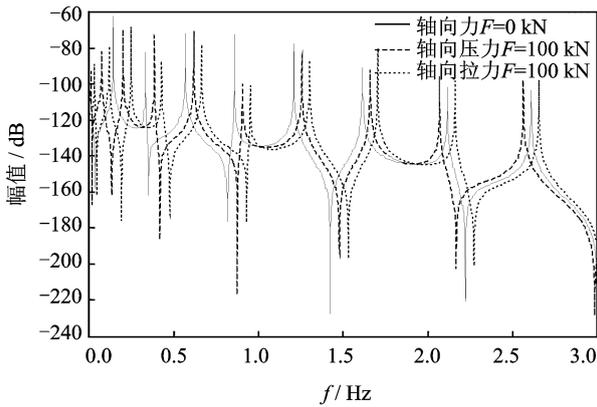


图4 智能悬臂梁在不同轴向力状况下的强迫响应

**算例3 瞬态时域振动响应。**

对行波法所得的振动频率响应特性,通过逆傅里叶变换将其转成瞬态时域振动响应。根据式(19)的频域响应,在数据处理中将  $y(x3)$  的实部按偶函数扩展,  $y(x3)$  的虚部按奇函数扩展,通过逆傅里叶变换得到瞬态时域响应。如图5所示,悬臂梁上施加  $10 \text{ N} \cdot \text{m}$  脉冲力矩激励,用行波法求得频率响应,然后转换为瞬态时域响应。

**算例4 行波法求解响应结果与有限元法的对比。**

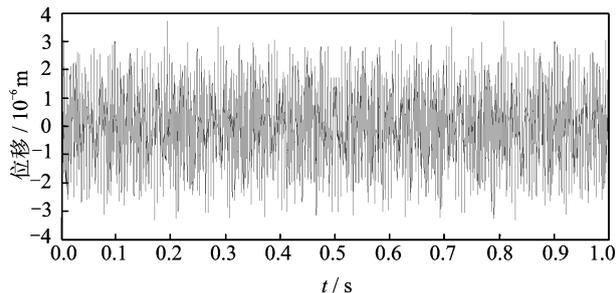
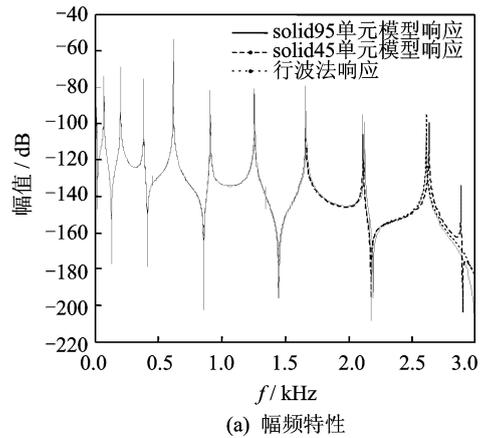
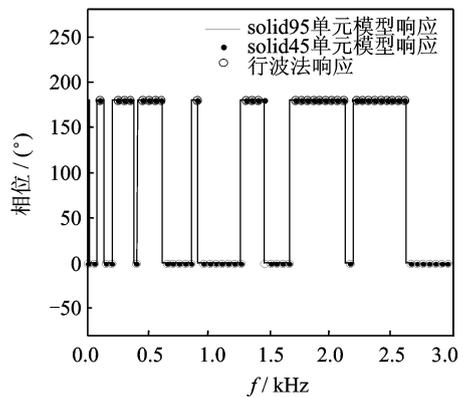


图5  $10 \text{ N} \cdot \text{m}$  脉冲力矩激励的响应信号

为验证行波法用于响应分析的正确性,将行波法求解响应的结果与 ansys 的求解结果作对比分析。依据表1中的参数,在 ansys 中建立智能悬臂梁实体模型,先后选用 solid 20nodes 95 单元和 solid brick 8node 45 单元建模,激励点距悬臂端  $0.1 \text{ m}$ ,激励力矩为  $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,响应点距悬臂端  $0.59 \text{ m}$ ,三种方法求得的响应如图6所示,由图(a)可以看出,行波法求得的响应频率与有限元法求解结果一



(a) 幅频特性



(b) 相频特性

图6 行波法脉冲响应求解结果和有限元法响应求解结果

致,响应的幅值大于 solid45 单元模型,小于 solid95 单元模型。由图(b)知,三种方法求得的相位一致。

但在高频处行波法的响应频率略低于有限元结果。由于行波法应用中采用 Timoshenko 模型,考虑了转动惯量后,导致梁的惯性增加,而剪切变形则使梁的刚度降低,导致固有频率降低,在计算高阶固有频率时这种差别得以显示。另外,行波法用于响应的求解时,求解结果稳定。而有限元法求解时,求解结果会因单元类型、建模方式、网格划分方式、约束施加方式和节点选择方式的不同而相异,求解结果有一定的波动性。

## 5 结束语

基于行波法振动分析,从智能 Timoshenko 梁中周期力和周期力矩激励下波的传播关系,确定激励力导波单元特性,对梁中各导波单元特性回路组装,得到非齐次矩阵;通过解波幅矢量,得到在压电致动力矩激励下智能 Timoshenko 梁上任一点的振动响应函数的数学表达。比较行波法响应分析结果与有限元法求解结果在低频部分基本一致。但在高频处行波法的响应频率略低于有限元结果,这是由于行波法应用中采用 Timoshenko 模型,考虑了转动惯量后,导致梁的惯性增加,而剪切变形则使梁的刚度降低,导致固有频率降低,在计算高阶固有频率时这种差别得以显示。另外,行波法不仅适用于进行智能梁的响应特性分析,而且便于数值编程计算,求解响应结果稳定。

利用导波单元特性和各导波单元回路组装,行波法可以分析各种条件和边界下的振动响应特性。通过在 Matlab 中编程计算,得到智能梁上不同位置的拾振点处的幅频响应和相频响应、不同受力状况下的某一拾振点处的幅频响应及某一激励下的瞬态时域响应。

## 参 考 文 献

[1] 胡超,陈涛,黄文虎. 基于行波与模态的混合方法对 Timoshenko 梁进行振动主动控制[J]. 航空学报, 2007,28(2):301-308.  
Hu Chao, Chen Tao, Huang Wenhui. Active vibration control of Timoshenko beam based on hybrid wave/mode method [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007,28(2):301-308. (in Chinese)

- [2] 陈建军,石光军,王小兵,等. 随机参数压电智能梁结构的动态特性分析[J]. 振动、测试与诊断, 2007,27(1):20-24.  
Chen Jianjun, Shi Guangjun, Wang Xiaobing, et al. Analysis of dynamic characteristic for intelligent beam with random parameters [J]. Journal of Vibration Measurement & Diagnosis, 2007, 27(1): 20-24. (in Chinese)
- [3] von Flotow A H. Traveling wave approach to the dynamic analysis of large space structures[C]// USAF. Collection of Technical Papers, Part 2. Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Lake Tahoe, New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1983; 509-519.
- [4] Mace B R. Wave reflection and transmission in beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 1984, 97: 237-246.
- [5] Mei C, Mace B R. Wave reflection and transmission in Timoshenko beams and analysis of Timoshenko beam structures[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2005, 127(4): 382-394.
- [6] 郭兰满,黄迪山,唐亮,等. 基于行波法分析轴向受力智能梁振动特性[J]. 机械强度, 2012,34(5):638-643.  
Guo Lanman, Huang Dishan, Tang Liang, et al. Vibration Analysis of axially loaded smart beams with wave propagation[J]. Journal of Mechanical Strength, 2012, 34(5): 638-643. (in Chinese)
- [7] Graff K F. Wave motion in elastic solids[M]. Belfast: Oxford University Press, 1975: 181-184.
- [8] Mei C, Karpenko Y, Moody S, et al. Analytical approach to free and forced vibrations of axially loaded cracked Timoshenko beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006,291:1050-1059.
- [9] 陈烈民,杨宝宁. 复合材料的力学分析[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2006: 30-39.



第一作者简介:黄迪山,男,1957年11月生,博士、副教授。主要研究方向为机械动力学、机械结构振动检测与分析。曾发表《FFT相位误差分析及实用修正方法》(《振动工程学报》1994年第7卷第2期)等论文。

E-mail:hdishan@shu.edu.cn

