

计算广义 Rayleigh 商的泛灰数学方法*

靳红玲^{1,2}, 陈建军¹, 马洪波¹, 尤芳^{1,2}

(1. 西安电子科技大学电子装备结构设计教育部重点实验室 西安, 710071)

(2. 西北农林科技大学机电工程学院 杨凌, 712100)

摘要 将不确定结构中的区间参数用泛灰数表示,对获得广义区间特征值方程的求解方法进行了研究,提出了一种简洁的算法。利用泛灰数的可扩展性对区间问题进行了分析,通过数学算例说明泛灰数不仅具有区间分析功能,且能解决区间分析所不能解决的问题。根据广义 Rayleigh 商的性质和对区间特征值的单调性分析,研究了广义区间特征值方程的求解方法,提出了一种基于泛灰数学的计算广义 Rayleigh 商法。将此算法应用于两个算例,通过与其他算法结果比较,验证了该方法具有计算简单、准确可靠,故有一定的工程应用价值。

关键词 不确定结构; 区间分析; 固有频率; 泛灰数学; Rayleigh 商

中图分类号 O242.29; TB122; TH113

引言

随机理论、模糊理论和区间分析是解决不确定性问题的 3 种主要方法^[1-4]。应用随机理论或模糊理论解决不确定性问题时,所有不确定性参数的概率密度函数或隶属度函数都须是已知的。在实际中要确定这些函数往往需要大量的数据或者人为给定。区间分析是在信息不够充分的条件下,求解不确定性问题的重要方法之一。区间数学的运算结果与自变量的运算次序有关,何种运算次序最佳,至今仍是未解决的问题^[5-6]。灰色系统理论自 1982 年由我国学者邓聚龙教授提出后,其理论和应用都得到了很大的发展,而且在决策学、预测学等领域也展示了极为广泛的应用前景^[7-8]。在此基础上,又有学者提出了泛灰集合和泛灰数学分析基础,为灰色信息的定量描述提供了新途径。泛灰理论可以处理多种不确定性问题,尤其是解决小样本、贫信息的不确定问题,该方法具有更好的科学性。同时,该理论的有关运算能够展开,克服了区间分析不能展开的性质,因而应用泛灰理论处理工程问题,具有较好的实用性。

利用区间分析法求解不确定性结构的特征值问题,必须解决好两个问题: a. 解区间不被放大或缩小; b. 快速获得解区间。文献[9-11]分别采用泛灰

数学方法解决结构静力区间分析问题和齿轮传动参数设计问题,并都取得了一定的研究成果。笔者针对结构动力学问题,将泛灰理论应用于求解 n 阶实对称矩阵的广义 Rayleigh 商,给出了区间特征值的计算方法,通过算例对结构系统的固有频率进行区间分析,并将计算结果与其他算法结果相比较,表明该方法计算简单,且可行有效。

1 泛灰数学基础

1.1 泛灰数的概念^[12]

定义 1 设论域 $U=R$ (实数集),则称 R 上的泛灰集为泛灰数集,记作 $g(R)$,且称 $g(R)$ 中的元素为泛灰数,记作

$$g = (x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}]) \quad (x \in R; \underline{\mu}, \bar{\mu} \in \tilde{R}) \quad (1)$$

其中: x 为观测值; $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ 为 x 的灰信息部; $g_{(0)} = (0, [0, 0])$ 和 $g_{(1)} = (1, [1, 1])$ 分别称为 $g(R)$ 中的零元和单位元。观测部为零、而灰信息部不为零的泛灰数称为亚零元,记为 $g'_{(0)}$; 零元和亚零元统称为泛零元,记为 $g''_{(0)}$ 。

定义 2 $g = (x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}])$, $x \in g(R)$, 称 $-g = (-x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}])$ 为 $g(R)$ 中关于 g 的负元, 称 $g^{-1} = (x^{-1}, [\underline{\mu}^{-1}, \bar{\mu}^{-1}])$ 为 $g(R)$ 中关于 g 的逆元。

* 国家自然科学基金资助项目(50905134)

收稿日期: 2011-05-29; 修改稿收到日期: 2012-02-12

泛灰数学规定了泛灰数的四则运算、泛灰等式、乘幂运算等。泛灰数集的加法和乘法具有封闭性,且泛灰数满足乘法对加法的分配律。泛灰数的四则运算规则^[12]为

$$g_1 + g_2 = \left(x_1 + x_2, \left[\frac{x_1\mu_1 + x_2\mu_2}{x_1 + x_2}, \frac{\bar{x}_1\bar{\mu}_1 + \bar{x}_2\bar{\mu}_2}{x_1 + x_2}\right]\right) \tag{2}$$

$$g_1 - g_2 = \left(x_1 - x_2, \left[\frac{x_1\mu_1 - x_2\mu_2}{x_1 - x_2}, \frac{\bar{x}_1\bar{\mu}_1 - \bar{x}_2\bar{\mu}_2}{x_1 - x_2}\right]\right) \tag{3}$$

$$g_1 \times g_2 = (x_1x_2, [\underline{\mu}_1\underline{\mu}_2, \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2]) \tag{4}$$

$$g_1/g_2 = (x_1/x_2, [\underline{\mu}_1/\underline{\mu}_2, \bar{\mu}_1/\bar{\mu}_2]) \text{ (如果 } g_2 \neq g_{(0)}) \tag{5}$$

1.2 泛灰数与区间数的转化

在实际应用时,泛灰数 $g = (x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}])$ 中的 $\underline{\mu}, \bar{\mu}$ 可理解为对 x 的最低、最高信任程度,如 $\underline{\mu} = 0.7, \bar{\mu} = 0.9$,用区间数表示为 $[0.7x, 0.9x]$ 。因此,一个泛灰数可用一个区间数表示,即 $(x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}]) = [x\underline{\mu}, x\bar{\mu}]$ 。反之, $\forall [a, b] \in I(R)$ (闭区间实数集),均可表示为一个泛灰数 $g = (x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}])$,此时要求 $\underline{\mu}, \bar{\mu} \in [-1, 1]$ 。转化规则^[12]如下

1) 当 $a > 0$, 有 $[a, b] = (b, [a/b, 1])$ (6)

2) 当 $ab < 0$, 且 $\max\{|a|, |b|\} = b$, 有 $[a, b] = (b, [a/b, 1])$ (7)

3) 当 $ab < 0$, 且 $\max\{|a|, |b|\} = |a|$, 有 $[a, b] = (a, [b/a, 1])$ (8)

4) 当 $b < 0$, 有 $[a, b] = (a, [b/a, 1])$ (9)

1.3 泛灰函数的区间分析功能

泛灰函数有区间分析的功能,且具有一定的优越性^[12]。

例 1 求函数 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \frac{x_2 + x_3}{x_2 - x_3}$ 的值域,其中变量用区间数和泛灰数表示分别为: $x_1 = [2, 3] = (3, [2/3, 1])$, $x_2 = [1, 3] = (3, [1/3, 1])$, $x_3 = [6, 18] = (18, [1/3, 1])$ 。

对原函数,若用区间数计算得: $F = [-21, -0.8235]$;而用泛灰数计算得: $F = (-21/5, [2/3, 1]) = [-4.2, -2.8]$,显然 $[-4.2, -2.8] \subset [-21, -0.8235]$ 。

将原函数变形为 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(1 + \frac{2}{x_2/x_3 - 1})$,再用区间数计算得: $F = [-9,$

$-2.2353]$;用泛灰数计算仍可得: $F = (-21/5, [2/3, 1]) = [-4.2, -2.8]$,仍然有 $[-4.2, -2.8] \subset [-9, -2.2353]$ 。

由此例可见,用区间数计算函数值域,计算结果与函数表达式有关;用泛灰数计算函数值域与函数表达式无关,且用泛灰数计算得到的解区间包含于区间数计算得到的解区间。

通过分析比较泛灰运算公式(1-4)和区间运算公式^[5]不难发现:两者的加法运算法则完全相同,但对于减法、乘法和除法运算,用泛灰运算得到的解区间的上界和下界分别是由参与运算的泛灰数上界和上界、下界和下界计算得到;而用区间运算计算得到的解区间的上界和下界还由参与运算的区间数的上界和下界混合运算来确定,这样就致使用区间数计算的解区间比用泛灰数计算的解区间大。

2 区间特征值分析

2.1 广义区间特征值问题的描述

n 个自由度振动系统的常系数线性微分方程的一般表达式为

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{10}$$

其中 M, C 和 K 分别为 $n \times n$ 阶的质量、阻尼和刚度矩阵; $\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$ 和 \mathbf{F} 分别为广义加速度、广义速度、广义位移和广义力的 n 维列向量。

对于无阻尼自由振动,方程(10)可以表示为

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{11}$$

方程(11)惟一可以接受的解是具有频率 ω 的简谐函数,即

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} \sin \omega t \tag{12}$$

其中: \mathbf{X} 为振幅列向量; ω 为系统的固有频率。

将式(12)代入式(11)中整理得

$$K\mathbf{X} = \omega^2 M\mathbf{X} \tag{13}$$

式(13)的特征值问题为矩阵 K 相对于矩阵 M 的广义特征值问题,其中:数 ω^2 为矩阵 K 相对于矩阵 M 的特征值;非零解 \mathbf{X} 称为对应特征值 ω^2 的特征向量。

在不确定性问题中,系统的 K 和 M 均是区间参数矩阵,其元素可用区间数表达为

$$k_{ij} = [k_{ij}, \bar{k}_{ij}], m_{ij} = [m_{ij}, \bar{m}_{ij}] \tag{14}$$

则式(13)的特征值问题将变为广义区间特征值问题

$$[K][X] = [\omega^2][M][X] \tag{15}$$

其中: $[K]$ 表示区间刚度矩阵; $[M]$ 表示区间质量矩

阵; $[\omega^2]$ 为广义区间特征值; $[\mathbf{X}]$ 为对应于 $[\omega^2]$ 的区间特征向量。

2.2 广义 Rayleigh 商及其性质

对于机械和结构系统, 矩阵 \mathbf{K}, \mathbf{M} 为 n 阶实对称阵, 且 \mathbf{M} 正定, $\mathbf{X} \in R^n$ 。称

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}}{\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}}, \mathbf{X} \neq \mathbf{0} \quad (16)$$

为矩阵 \mathbf{K} 相对于矩阵 \mathbf{M} 的广义 Rayleigh 商。

广义 Rayleigh 商具有以下性质:

性质 1 $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ 是特征向量 \mathbf{X} 的连续函数。

性质 2 $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ 的最大值和最小值存在, 且能够在椭球面 $S = \{\mathbf{X} | \mathbf{X} \in R^n, \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = 1\}$ 上达到。

2.3 区间特征值的单调性分析

设 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)^T$ 为区间特征值问题的一组区间变量, 其中 $p_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是系统中的结构参数(包括几何参数和物理参数)。

由式(13)可得第 k 阶特征值 ω_k^2 对参数 \mathbf{p} 的一阶灵敏度^[13]

$$\frac{\partial \omega_k^2}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{X}_k^T (\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{p}}) \mathbf{X}_k}{\mathbf{X}_k^T \mathbf{M} \mathbf{X}_k} \quad (17)$$

当参数 \mathbf{p} 为区间参数向量时, 需要讨论其相对于 ω_k^2 的单调性, 否则计算得到的广义特征值区间将扩大或缩小。

对于机械或结构系统, 当结构参数 \mathbf{p} 为刚度参数和质量参数时, 由式(17)有

$$\frac{\partial \omega_k^2}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{X}_k^T (\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{k}} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{k}}) \mathbf{X}_k}{\mathbf{X}_k^T \mathbf{M} \mathbf{X}_k} = \frac{\mathbf{X}_k^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{k}} \mathbf{X}_k}{\mathbf{X}_k^T \mathbf{M} \mathbf{X}_k} > 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \omega_k^2}{\partial \mathbf{m}} = \frac{\mathbf{X}_k^T (\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{m}} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{m}}) \mathbf{X}_k}{\mathbf{X}_k^T \mathbf{M} \mathbf{X}_k} = -\omega_k^2 \frac{\mathbf{X}_k^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{X}_k}{\mathbf{X}_k^T \mathbf{M} \mathbf{X}_k} < 0 \quad (19)$$

以上两式表明: 结构的各阶区间特征值随刚度参数的增大而单调增大, 随着质量参数的增大而单调减小。据此单调关系和式(16)可得, 当各区间刚度参数均取其最大值, 且各区间质量参数均取其最小值时, 各阶区间特征值均得到最大值; 反之, 当各区间刚度参数均取其最小值, 且各区间质量参数均取其最大值时, 各阶区间特征值均得到最小值。

2.4 区间特征值的极限边界

由广义 Rayleigh 商的性质不难得出, 若 \mathbf{X} 是

$\mathbf{K} \mathbf{X} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{X}$ 的特征向量, 则 $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ 是与之对应的特征值。特别当 \mathbf{X} 是 $\mathbf{K} \mathbf{X} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{X}$ 的正则振型向量时, 则有

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = 1 \quad (20)$$

由式(15)和(16)可知, 满足性质 2 的 Rayleigh 商所在区间

$$[\omega^2] = \{\omega_i^2 | \omega_i^2 = \mathbf{X}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{X}_i | \mathbf{X}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{X}_i = 1\} \quad (21)$$

其中: $\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_i$ 分别是区间刚度矩阵 $[\mathbf{K}]$ 和区间质量矩阵 $[\mathbf{M}]$ 中某一个确定的刚度矩阵和质量矩阵; ω_i^2 为矩阵 \mathbf{K}_i 相对于矩阵 \mathbf{M}_i 的广义特征值; 与 ω_i^2 相对应的非零解 \mathbf{X}_i 称为属于 ω_i^2 的正则振型向量; 对应于区间特征值 $[\omega_i^2]$ 的所有 \mathbf{X}_i 组成的正则振型区间向量为 $[\mathbf{X}_i]$ 。

广义区间 Rayleigh 商可表为

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = [\omega^2] = [\mathbf{X}]^T [\mathbf{K}] [\mathbf{X}] \quad (22)$$

根据前面的单调性分析, 可知区间特征值

$$[\omega^2] = \left(\frac{(\mathbf{X}^l)^T \mathbf{K}^l \mathbf{X}^l}{(\mathbf{X}^l)^T \mathbf{M}^l \mathbf{X}^l}, \frac{(\mathbf{X}^u)^T \mathbf{K}^u \mathbf{X}^u}{(\mathbf{X}^u)^T \mathbf{M}^u \mathbf{X}^u} \right) \quad (23)$$

其中: $\mathbf{K}^l = [k_{ij}^l]; \mathbf{K}^u = [k_{ij}^u]; \mathbf{M}^l = [m_{ij}^l]; \mathbf{M}^u = [m_{ij}^u]; \mathbf{X}^l$ 为 \mathbf{K}^l 相对于 \mathbf{M}^l 的正则振型向量; \mathbf{X}^u 为 \mathbf{K}^u 相对于 \mathbf{M}^u 的正则振型向量。

可以取试解的正则振型区间向量为

$$[\mathbf{X}] = [\min(\mathbf{X}^l, \mathbf{X}^u), \max(\mathbf{X}^l, \mathbf{X}^u)] \quad (24)$$

基于以上分析, 给出广义区间特征值计算方法的求解步骤:

- 1) 计算 $\mathbf{K}^l, \mathbf{K}^u$ 分别相对于 $\mathbf{M}^l, \mathbf{M}^u$ 的正则振型向量 $\mathbf{X}^l, \mathbf{X}^u$;
- 2) 按式(24)计算试解的区间正则振型向量, 并将其转换为泛灰列向量;
- 3) 将区间刚度矩阵 $[\mathbf{K}]$ 转换为泛灰矩阵;
- 4) 将以上两步的计算结果代入 Rayleigh 商公式(22)得到各阶区间特征值。

3 算例

例 1 求图 1 所示具有单位质量和区间刚度参数的弹簧质量系统的全部特征值。已知各弹簧刚度分别为: $[k_1] = [2, 2.1]$ kN/m, $[k_2] = [1.8, 1.85]$ kN/m, $[k_3] = [1.6, 1.63]$ kN/m, $[k_4] = [1.4, 1.42]$ kN/m, $[k_5] = [1.2, 1.21]$ kN/m, $[k_6] = [1, 1.008]$ kN/m。

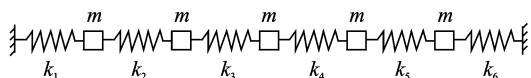


图 1 区间弹簧质量系统

利用 MATLAB 语言面向对象的编程原理, 基于以上有关泛灰加、减、乘法的定义以及有关泛灰数与区间数的转化方法, 编写了相应的计算程序。

利用本研究方法得到的各阶特征值解区间与其他方法的结果见表 1。

例 2 求图 2 所示 5 自由度框架结构的全部特征值的解区间。其刚度区间参数 $[k_1] = [2, 2.02]$ kN/m, $[k_2] = [1.8, 1.85]$ kN/m, $[k_3] = [1.6, 1.63]$ kN/m, $[k_4] = [1.4, 1.42]$ kN/m, $[k_5] = [1.2, 1.21]$ kN/m; 质量区间参数 $[m_1] = [29, 31]$ kg, $[m_2] = [26, 28]$ kg, $[m_3] = [26, 28]$ kg, $[m_4] = [24, 26]$ kg, $[m_5] = [17, 19]$ kg。

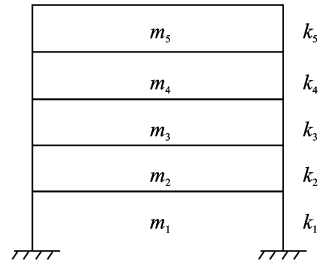


图 2 多层框架结构

利用本算法得到的各阶特征值区间与其他算法的结果如表 2 所示。

表 1 弹簧质量系统的特征值区间

| ω^2/Hz^2 | 矩阵摄动法 ^[14] | 全局优化解 ^[13] | 区间因子法 ^[15] | 本研究方法 |
|------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------------|
| $[(\omega^2)_1^l, (\omega^2)_1^u]$ | [342.543, 433.920] | [384.151, 393.375] | [384.172, 393.395] | [384.151 5, 393.375 5] |
| $[(\omega^2)_2^l, (\omega^2)_2^u]$ | [1 402.714, 1 497.998] | [1 434.801, 1 465.266] | [1 434.861, 1 465.324] | [1 434.800 8, 1 465.265 8] |
| $[(\omega^2)_3^l, (\omega^2)_3^u]$ | [2 841.894, 2 933.086] | [2 860.175, 2 913.670] | [2 860.289, 2 913.781] | [2 860.175 2, 2 913.670 0] |
| $[(\omega^2)_4^l, (\omega^2)_4^u]$ | [4 333.767, 4 424.497] | [4 337.950, 4 420.780] | [4 338.000, 4 420.828] | [4 337.950 0, 4 420.780 0] |
| $[(\omega^2)_5^l, (\omega^2)_5^u]$ | [5 982.923, 6 134.909] | [5 982.923, 6 134.909] | [5 982.678, 6 134.672] | [5 982.922 5, 6 134.909 0] |

表 2 框架结构的特征值区间

| ω^2/Hz^2 | 矩阵摄动法 ^[14] | 全局优化解 ^[13] | 区间因子法 ^[15] | 本研究方法 |
|------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| $[(\omega^2)_1^l, (\omega^2)_1^u]$ | [4.617, 7.830] | [5.858, 6.502] | [5.858, 6.502] | [5.858 1, 6.502 0] |
| $[(\omega^2)_2^l, (\omega^2)_2^u]$ | [40.643, 47.820] | [42.029, 46.309] | [42.029, 46.308] | [42.029 3, 46.308 8] |
| $[(\omega^2)_3^l, (\omega^2)_3^u]$ | [99.180, 109.399] | [98.856, 108.689] | [98.852, 108.683] | [98.856 4, 108.689 0] |
| $[(\omega^2)_4^l, (\omega^2)_4^u]$ | [157.848, 174.002] | [158.051, 173.778] | [158.044, 173.767] | [158.0515, 173.777 7] |
| $[(\omega^2)_5^l, (\omega^2)_5^u]$ | [209.515, 230.084] | [209.515, 230.084] | [209.514, 230.083] | [209.514 8, 230.084 5] |

通过分析比较例 1、例 2 和文献的计算结果可知, 本研究方法与文献[13]都得到了问题的准确解, 二者的解区间均是矩阵摄动法解区间的子集。文献[15]采用区间因子法给出了基于 Rayleigh 商计算结构广义特征值的一种算法, 计算方法简单, 但其计算精度低于本研究方法。从计算过程分析, 文献[13]采用的全局优化算法, 需要一定的迭代次数才能得到问题的准确解, 计算时间长。本算法无需迭代, 一次计算即可得到问题的准确解, 计算量显著减少, 计算精度高, 计算时间短。另外, 本研究方法具有一般性, 适合于求解具有区间参数的一般结构的特征值区间范围, 只是为验证本研究方法的正确性, 文中仅给出了有关文献求解的具有区间参数的弹簧质量系统和多层框架结构特征值问题的算例。

4 结束语

对于不确定性问题, 笔者在没有引入任何假设

的情况下, 提出一种基于泛灰理论、广义 Rayleigh 商的计算结构广义区间特征值的新方法。研究分析和算例结果均表明: 该方法可以避免直接采用区间数学运算结果易于扩张的缺陷, 相对于全局优化算法而言, 该算法具有相同的计算准确度, 但计算效率明显提高。

参 考 文 献

- [1] Elishakoff I. Three versions of the finite element method based on concepts of either stochasticity, fuzziness or anti-optimization[J]. Applied Mechanics Review, 1998, 51(3): 209-218.
- [2] Rao S S, Berke L. Analysis of uncertain structural system using interval analysis[J]. AIAA Journal, 1997, 35(4): 727-735.
- [3] Muhanna R L, Mullen R L. Uncertainty in mechanics problems-interval-based approach[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, 127: 556-557.

- [4] Chen S H, Qiu Z P. A new method for computing the upper and lower bounds on frequencies of structures with interval parameters [J]. Mechanics Research Communication, 1994, 21(2): 583-592.
- [5] 祁力群. 区间分析[J]. 运筹学杂志, 1982, 1(1): 151-156.
Qi Liqun. Interval analysis [J]. Or Transactions, 1982, 1(1):151-156. (in Chinese)
- [6] 张纪元, 沈守范. 机构误差分析中的区间分析法[J]. 华东工学院学报, 1992(2): 13-19.
Zhang Jiyuan, Shen Shoufan. Mechanical error analysis based on interval analysis theory [J]. Journal of East China Institute of Technology, 1992(2):13-19. (in Chinese)
- [7] 牟峰, 袁晓辉, 王慈光, 等. 基于灰预测和正态云的参数自适应蚁群遗传算法[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(6): 701-706.
Mu Feng, Yuan Xiaohui, Wang Ciguang, et al. Ant-colony-genetic algorithm with adaptive parameters based on grey prediction and normal cloud [J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(6): 701-706. (in Chinese)
- [8] 秦海勤, 徐可君, 隋育松, 等. 基于系统信息融合的滚动轴承故障模式识别[J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(3): 372-376.
Qin Haiqin, Xu Kejun, Sui Yusong, et al. Rolling bearing fault pattern recognition based on fusing random, gray and fuzzy information [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011, 31(3): 372-376. (in Chinese)
- [9] 吴晓, 罗佑新, 文会军, 等. 非确定结构系统区间分析的泛灰求解方法[J]. 计算力学学报, 2003, 20(3): 229-333.
Wu Xiao, Luo Youxin, Wen Huijun, et al. Interval analysis method of uncertain structural systems using universal grey number [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(3): 229-333. (in Chinese)
- [10] 张建国, 陈建军, 马孝松, 等. 关于不确定结构系统区间分析的泛灰数方法的讨论[J]. 机械科学与技术, 2005, 24(11): 1272-1276.
Zhang Jianguo, Chen Jianjun, Ma Xiaosong, et al. Discussion on the method for interval analysis of uncertain structural systems by using universal grey numbers [J]. Mechanical Science and Technology, 2005, 24(11): 1272-1276. (in Chinese)
- [11] 罗佑新, 何哲明, 车晓毅, 等. 基于泛灰区间数的齿轮传动设计参数分析[J]. 湖南文理学院学报:自然科学版, 2008, 20(1): 72-76.
Luo Youxin, He Zheming, Che Xiaoyi, et al. Parameter analysis of gear design based on interval number of universal grey [J]. Journal of Hunan University of Arts and Science; Natural Science Edition, 2008, 20(1): 72-76. (in Chinese)
- [12] 王清印. 灰色数学基础[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996:91-141.
- [13] 王登刚. 计算具有区间参数的固有频率的优化方法[J]. 力学学报, 2004, 36(3): 364-372.
Wang Denggang. Global optimization method for computing frequencies of structures with interval uncertain parameters [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(3): 364-372. (in Chinese)
- [14] 陈塑寰, 邱志平, 宋大同, 等. 区间矩阵标准特征值的一种解法[J]. 吉林工业大学学报, 1993, 23(3): 1-8.
Chen Suhuan, Qiu Zhiping, Song Datong, et al. A method for solving eigenvalue problem of the interval matrix [J]. Journal of Jilin University of Technology, 1993, 23(3): 1-8. (in Chinese)
- [15] 杨宇军, 陈建军. 计算区间特征值的 Rayleigh 商法[J]. 振动与冲击, 2009, 28(1): 42-45.
Yang Yujun, Chen Jianjun. A fast method for computing eigenvalues of a structure matrix with interval parameters [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(1):42-45. (in Chinese)



第一作者简介: 靳红玲, 女, 1975年9月生, 博士研究生、讲师。主要研究方向为不确定结构分析与可靠性工程。曾发表《XTD469Q型微型车发动机设计与试验》(《农业机械学报》2007年第38卷第6期)等论文。

E-mail: jhl929@tom.com

