

# 不确定转子耦合系统的经验参数研究\*

向 玲, 王子瑞, 唐贵基

(华北电力大学机械工程系 保定, 071003)

**摘要** 提出用非线性动力学行为进行不确定转子-轴承-密封耦合系统经验参数的研究, 结果旨在为选择重要经验参数和实际控制转子的稳定运行提供依据。基于 Muszynska 模型和 Capone 圆轴承非线性油膜力模型, 推导建立密封流体激振力和油膜力共同作用下的参数不确定转子-密封-轴承系统非线性动力学方程, 通过数值分析, 研究了该系统在平均周向速比常数影响下的分岔特性以及影响规律, 并分析了几个特定参数下系统随转速变化的分岔特性和非线性动力学行为。分析结果发现, 平均周向速比常数对系统的非线性动力学行为影响很大, 随着平均周向速比常数的增大, 系统提前出现倍周期分叉, 并且振幅增大, 使得不稳定性增加。基于上述分析, 给出了合理的平均周向速比常数取值范围。

**关键词** 不确定转子; 非线性; 转子-轴承-密封系统; 平均周向转速比常数; 分岔

**中图分类号** TK263.6

## 引 言

随着非线性动力学理论的发展, 建立非线性转子-轴承-密封系统的动力学模型, 采用非线性动力学方法分析系统的动力学特性, 对转子动力学发展有着显著的意义<sup>[1-4]</sup>。在建立旋转机械转子模型时, 油膜轴承和迷宫密封模型往往需要同时被使用, 但考虑单一因素的影响。Jing 等<sup>[3]</sup>建立了连续转子轴承系统的有限元非线性方程, 研究仿真了单一油膜力下系统的非线性动力学特性。李振平等<sup>[5]</sup>用多初始点分岔分析方法研究了刚性转子-轴承系统在转速、偏心等参数变化时系统响应随参数变化的非线性现象。Ding 等<sup>[6]</sup>采用 Muszynska 密封力模型分析了对称转子-密封的 Hopf 分叉行为。Hua<sup>[7]</sup>基于 Floquet 理论, 分析了转子-密封系统的非线性运动及其稳定性。也有学者建立了转子-轴承-密封耦合系统动力学方程, 如文献[8]中对比了转子-轴承-密封耦合系统和转子-轴承系统在是否含有非线性密封力作用下的非线性动力学行为。对于经验参数的研究, 文献[9]研究了转子-密封系统的分岔特性以及 Muszynska 模型中经验参数对转子-密封单一系统稳定性的影响规律, 但并未分析具体的经验参数

下对转子-轴承-密封耦合系统的影响以及经验参数变化下系统表现出的复杂的非线性动力学行为。

笔者采用反映密封力的非线性特性 Muszynska 模型<sup>[10-11]</sup>, 结合修正的 Capone 圆轴承非线性油膜力模型<sup>[12]</sup>建立了不确定转子-轴承-密封耦合系统的数学模型。通过数值仿真, 研究了该模型在周向速比常数变化下的非线性动力学行为。鉴于周向速比常数的不确定性, 重点比较了几个特定周向速比常数下耦合系统随转速变化的非线性动力学行为。平均周向速比常数是影响耦合系统的重要因素, 分析和比较结果为经验常数的选择以及实际控制提供理论依据。

## 1 转子非线性动力学方程

转子-轴承可简化为刚性支承的 Jeffcott 转子-轴承模型, 两端采用滑动轴承, 轮盘处考虑密封作用(如图 1)。

图 1 中  $O_1$  为轴颈的几何中心;  $O_2$  为圆盘的几何中心;  $O_m$  为圆盘的质心。密封力  $F_x, F_y$  为密封力, 等效作用在圆盘上, 油膜力  $f_x, f_y$  作用在轴颈上。

设  $X_1, Y_1$  为轴颈几何中心位移,  $X_2, Y_2$  为转子密封处圆盘中心位移,  $m_1$  为轴颈处的集中质量,  $m_2$

\* 国家自然科学基金资助项目(11072078); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目  
收稿日期: 2012-04-28; 修改稿收到日期: 2012-09-20

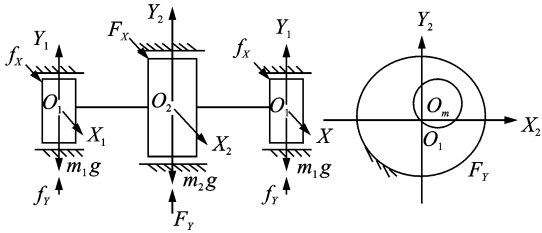


图 1 非线性转子-轴承-密封动力系统

为转子密封处圆盘质量,  $r_1$  为轴颈处质量偏心距,  $r_2$  为转子密封处圆盘质量偏心距,  $c_1$  为转子在轴承处的结构阻尼,  $c_2$  为转子圆盘阻尼,  $K_e$  为转轴刚度,  $\omega$  为转子角速度。考虑转子偏心和轴承偏心量, 加入不平衡力, 系统的运动微分方程表达如下

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 + c_1 \dot{X}_1 + \frac{K_e}{2}(X_1 - X_2) = f_x + m_1 r_1 \omega^2 \cos \omega t \\ m_1 \ddot{Y}_1 + c_1 \dot{Y}_1 + \frac{K_e}{2}(Y_1 - Y_2) = f_y - m_1 g + m_1 r_1 \omega^2 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{X}_2 + c_2 \dot{X}_2 + K_e(X_1 - X_2) = F_x + m_2 r_2 \omega^2 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{Y}_2 + c_2 \dot{Y}_2 + K_e(Y_1 - Y_2) = F_y + m_2 r_2 \omega^2 \sin \omega t - m_2 g \end{cases} \quad (1)$$

### 1.1 密封力非线性模型

方程(1)中的密封力采用 Muszynska 模型, 反映了流体激振力的非线性特性。该模型用流体周向平均流速比  $\tau$  来表征密封中流体膜的整体特征, 即认为流体对转子的整体作用力以平均角速度  $\tau\omega$  旋转, 其表达式为

$$\tau = \tau_0 (1 - e)^b \quad (0 < b < 1) \quad (2)$$

其中: 平均周向速比常数  $\tau_0$  和  $b$  用来描述具体的密封参数。

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K - m_f \tau^2 \omega^2 & \tau \omega D \\ -\tau \omega D & K - m_f \tau^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 2\tau \omega m_f \\ -2\tau \omega m_f & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中:  $\omega$  为转子的旋转角速度;  $K, D$  和  $m_f$  分别为密封力的当量刚度、阻尼和质量;  $\tau\omega D$  为密封力的交叉刚度项 ( $K, D, \tau$  均为扰动位移  $x, y$  的非线性函数)。

依据文献[8], 可表达为

$$K = K_0 (1 - e^2)^{-n}, D = D_0 (1 - e^2)^{-n} \quad (4)$$

其中:  $e = \sqrt{x^2 + y^2} / c_d$  为转子的偏心距; 密封气流进口损失系数  $n = 0.5 \sim 3$ ; 密封力的特性系数  $K_0, D_0$  采用 Black-Childs 公式计算<sup>[1]</sup>。

### 1.2 油膜力非线性模型

方程中(1)油膜力的非线性模型采用 Capone 圆轴承理论, 该模型具有较好的精度, 表达式如式(5)所示<sup>[6]</sup>。

$$f_x = \sigma \overline{f_x}; f_y = \sigma \overline{f_y}$$

$$\sigma = \mu \omega R L \left( \frac{R}{c_z} \right)^2 \left( \frac{L}{2R} \right)^2$$

$$\begin{bmatrix} \overline{f_x} \\ \overline{f_y} \end{bmatrix} = - \frac{[(x - 2\dot{y})^2 + (x + 2\dot{x})^2]^{1/2}}{1 - x^2 - y^2} \times \begin{bmatrix} 3xV(x, y, \alpha) - \sin \alpha G(x, y, \alpha) - 2\cos \alpha S(x, y, \alpha) \\ 3xV(x, y, \alpha) + \cos \alpha G(x, y, \alpha) - 2\sin \alpha S(x, y, \alpha) \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中:  $\overline{f_x}, \overline{f_y}$  为无量纲油膜力;  $\sigma$  为 Sommerfeld 修正数;  $\mu$  为润滑油粘度;  $c_z$  为轴承半径间隙;  $L$  为轴承长度;  $R$  为轴承半径。

与式(5)中有关的表达式如下

$$G(x, y, \alpha) = \frac{2}{(1 - x^2 - y^2)^{1/2}} \left[ \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{1 - x^2 - y^2} \right]$$

$$V(x, y, \alpha) = \frac{2 + (y \cos \alpha - x \sin \alpha) G(x, y, \alpha)}{1 - x^2 - y^2}$$

$$S(x, y, \alpha) = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{y + 2\dot{x}}{x - 2\dot{y}} - \frac{\pi}{2} \sin \left( \frac{y + 2\dot{x}}{x - 2\dot{y}} \right) - \frac{\pi}{2} \sin(y + 2\dot{x})$$

### 1.3 转子-轴承-密封系统非线性方程

模型综合考虑非线性的密封力和油膜力, 将式(3)中密封力和式(5)中油膜力代入系统运动微分方程(1)中, 同时引入无量纲变换:  $x_1 = \frac{X_1}{h}, y_1 = \frac{Y_1}{h}$ ,

$x_2 = \frac{X_2}{c}, y_2 = \frac{Y_2}{c}, \omega t = \tau$ , 并设  $M = m + m_f$ 。设  $\frac{d}{d\tau} = \omega \frac{d}{dt}, \frac{d^2}{d\tau^2} = \omega^2 \frac{d^2}{dt^2}$ , 则获得转子-轴承-密封系统的无量纲运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = k_2 x_2 - k_1 x_1 - d_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{m_2 h \omega^2} f_x + \rho_1 \cos \tau \\ \ddot{y}_1 = k_2 y_2 - k_1 y_1 - d_1 \dot{y}_1 + \frac{1}{m_2 h \omega^2} f_y + G_1 + \rho_1 \sin \tau \\ \ddot{x}_2 = -K_1 x_2 - D_1 \dot{x}_2 - K_2 y_2 + D_2 \dot{y}_2 + K_3 x_1 + \rho_2 \cos \tau \\ \ddot{y}_2 = -K_2 x_2 - D_2 \dot{x}_2 - K_1 y_2 + D_1 \dot{y}_2 + K_3 x_1 + G_2 + \rho_2 \sin \tau \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $k_1 = \frac{K_e}{2m_1 \omega^2}; k_2 = \frac{K_e c}{2m_1 h \omega^2}; d_1 = \frac{C_2}{m_2 \omega}; G_1 = \frac{g}{h \omega^2}; \rho_1 = \frac{r_1}{h}; \rho_2 = \frac{m_2 r_2}{M h}; K_1 = \frac{K_e + K - \tau^2 \omega^2 m_f}{M \omega^2}; K_2 = \frac{\tau D}{M \omega};$

$D_1 = \frac{D_e + D}{M\omega}$ ;  $D_2 = \frac{2m_f\tau}{M}$ ;  $G = -\frac{mg}{Mc\omega^2}$ ;  $D_e$  为转子外阻尼;  $K_e$  为轴在圆盘处的刚度;  $D$  为轴承结构阻尼;  $F_x, F_y$  为密封力;  $f_x, f_y$  为油膜力。

## 2 数值计算参数

将转子-轴承-密封系统四个无量纲的非线性二阶微分方程(式(6))转化为8个一阶微分方程,采用四阶 Runge-Kutta 法对所得到的方程组进行数值积分求解,分别得出系统随变化时的分岔图、时域图、轴心轨迹图、频谱图及 Poincare 截面映射图。

在数值计算中,系统的主要参数取值如下:转子密封处质量  $m_2 = 500$  kg,轴颈处质量  $m_1 = 25$  kg,转子刚度  $K_e = 1.0 \times 10^7$  N/m,转子外阻尼  $D_e = 500$  N·s/m,轴承结构阻尼  $D = 4.3 \times 10^7$  N·s/m,轴承长度  $l = 0.0285$  m,轴承半径  $R = 0.0285$  m,轴颈间隙  $h = 0.0002$  m,润滑粘度系数  $\mu = 47 \times 10^{-3}$  Pa/s。

## 3 转子平均周向速比常数下的系统响应

在应用 Muszynska 模型分析转子系统稳定性时,平均周向速比常数  $\tau_0$  是影响转子系统稳定性的主要经验参数。转子系统正常的耦合模型分岔转速在  $300$  rad/s 左右<sup>[13]</sup>。图2为  $\omega = 300$  rad/s 时系统随平均轴向速比常数变化的运动分岔图,从图中可以看出,在该转子转速下,当平均周向速比常数上升到  $\tau_0 = 0.375$  时,转子系统的振动突然增大并出现倍周期分岔,位移无量纲。图3是  $\tau_0 = 0.375$  时系统运动的时域图、轴心轨迹图、频谱图和 Poincare 截面映射图。可以看出,此参数下将发生倍周期分岔,是一个过渡现象。 $\tau_0$  低于  $0.375$  时,转子为稳

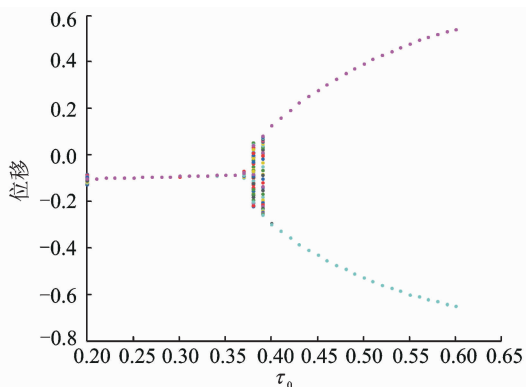


图2 随平均周向速比常数  $\tau_0$  变化的分岔图

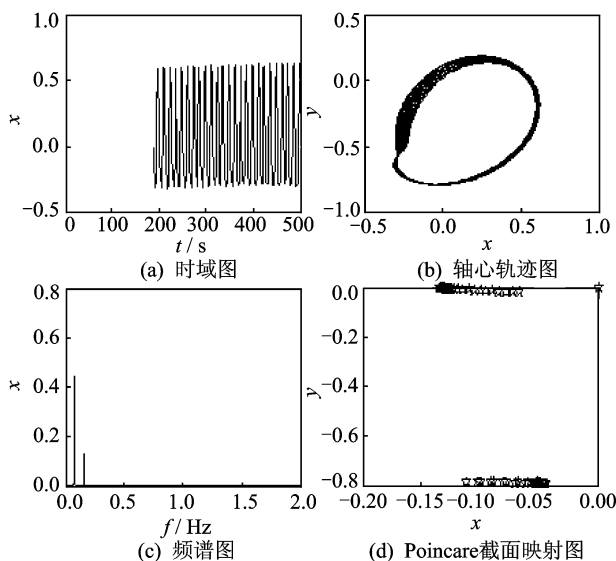


图3  $\tau_0 = 0.375$

定的单周期运动; $\tau_0$  在  $0.375 \sim 0.6$  的范围内,转子发生两倍周期运动。

## 4 几种典型常数在转速变化下的系统响应

平均周向速比常数  $\tau_0$  小于  $0.375$  时系统出现单周期运动,意味着在该转速下系统没有发生不稳定运动,但整个系统在转速升高时会出现不同的非线性动力学特性。图4为耦合系统在  $\tau_0 = 0.2$  时随转速变化的分岔图,可以看出分岔图显示的为单周期运动,系统是稳定的,没有发生非线性复杂行为。

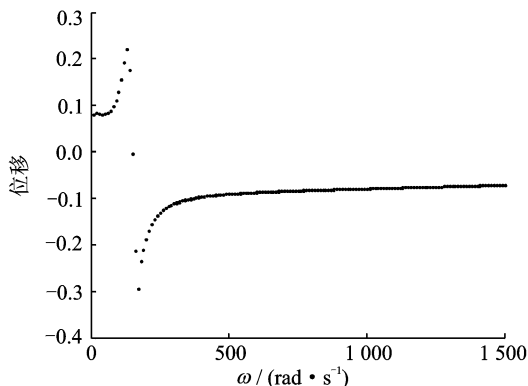


图4  $\tau_0 = 0.2$  系统随转速变化的分岔图

由图5~图7所示,在  $\tau_0 = 0.3$  时,系统  $340$  rad/s 时未经倍周期分岔直接进到复杂的拟周期运动中。虽然从图2和图5中显示在  $300$  rad/s 中系统出现的是稳定的单周期运动,但可以看出系统发生不稳定运动的转速高于  $300$  rad/s。在  $\tau_0 = 0.3$

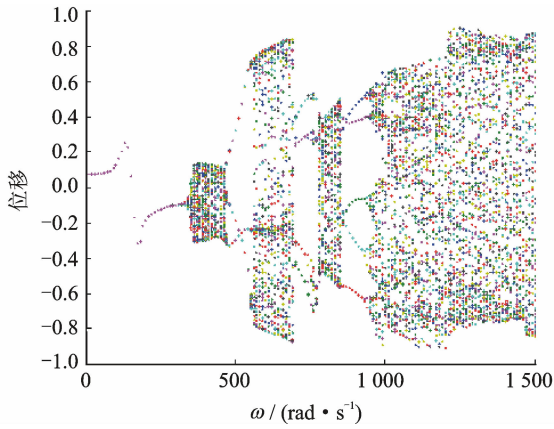


图 5  $\tau_0=0.3$  系统随转速变化的分岔图

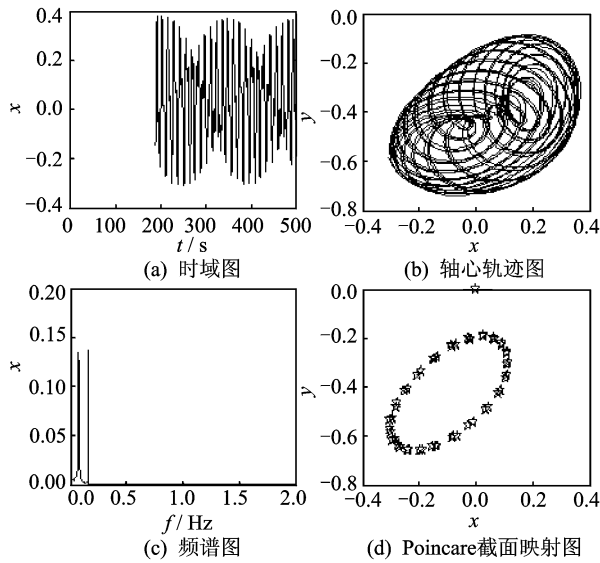


图 6  $\omega=340$  rad/s

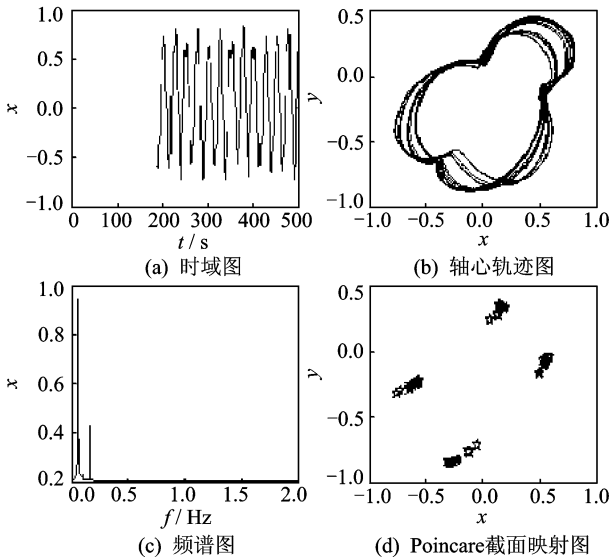


图 7  $\omega=750$  rad/s

图 8 给出了该耦合系统在  $\tau_0=0.375$  时随转速变化的分岔图。图 9 为该参数典型转速下的系统运动的时频细化图。从图 8 和图 9 中可以看出,  $\tau_0=0.375$  时耦合系统在 320 rad/s 时进入到拟周期阶段, 对应于与图 8 提前进入不稳定状态, 且振幅增大。图 10 是耦合系统在  $\tau_0=0.4$  时随转速变化的分岔图, 图 11 为该参数下系统在 320 rad/s 时的时频细化图。从图 10 和图 11 可以看出,  $\tau_0=0.4$  时耦合系统从单倍周期运动分岔进入双周期运动, 进入时的速率为 300 rad/s, 与  $\tau_0$  小于 0.375 的系统运动相比, 系统提前进入到不稳定的分岔运动, 并且振幅明显增大。

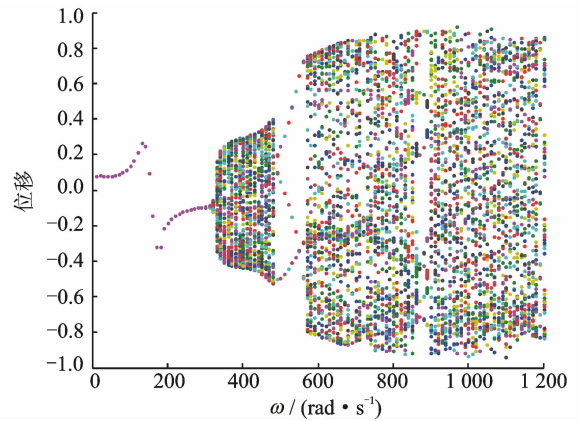


图 8  $\tau_0=0.375$  系统随转速变化的分岔图

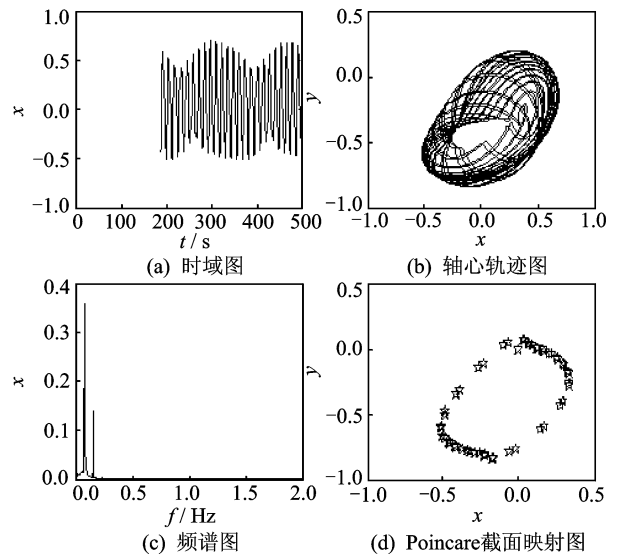


图 9  $\omega=320$  rad/s

图 12 给出了该耦合系统在  $\tau_0=0.6$  时随转速变化的分岔图。图 13 为该参数下 270 rad/s 系统运动的时频细化图。从图 12 和图 13 可以看出, 随着经验参数  $\tau_0$  的增大, 即增加到 0.6 后, 倍周期分岔

左右时, 系统较晚发生不稳定分岔并且具有复杂的系统非线性特征。

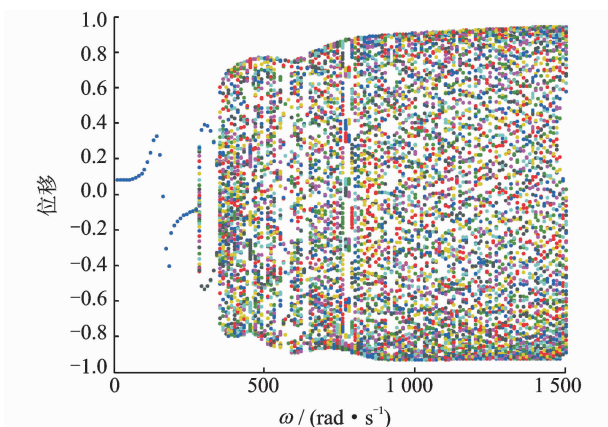


图 10  $\tau_0 = 0.4$  系统随转速变化的分岔图

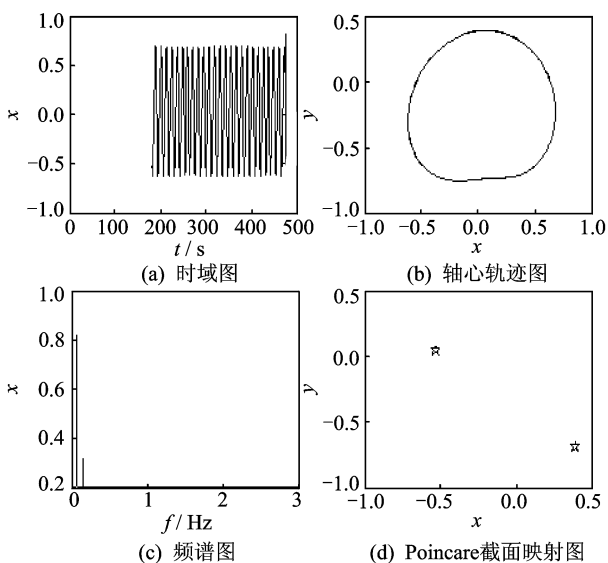


图 11  $\omega = 290$  rad/s

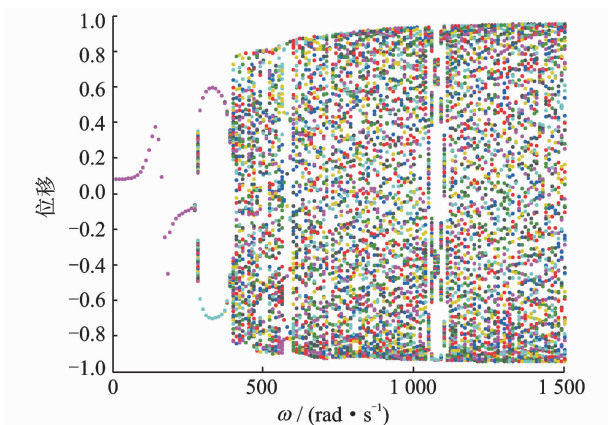


图 12  $\tau_0 = 0.6$  系统随转速变化的分岔图

后的双周期运动的振幅增大,持续较长,系统发生不稳定又有所提前,使得拟周期运动后移。系统的失稳转速过低,振幅幅值过大会导致系统运动不稳定。所以由以上分析,建议平均周向速率比取值范围为  $\tau_0 < 0.6$ 。

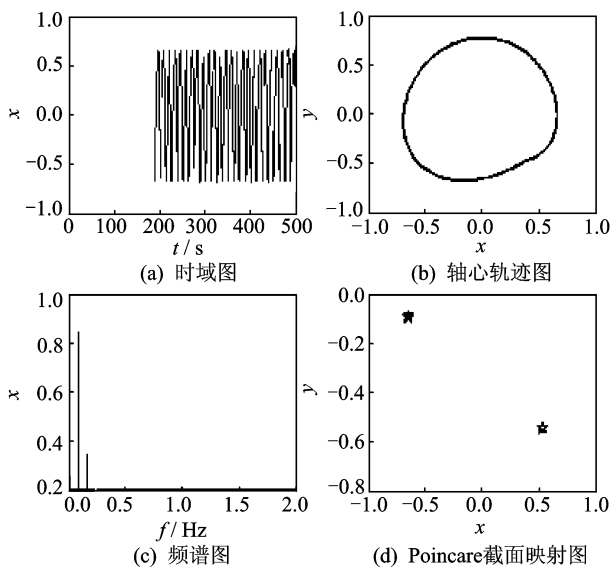


图 13  $\omega = 270$  rad/s

### 5 结论

1) 平均周向速比常数是影响转子-轴承-密封系统耦合系统的重要经验参数,在参数的变化下,系统具有复杂的非线性运动,包括单周期运动、倍周期运动,而单周期运动和倍周期运动决定了不同的失稳状态。因此,在应用 Muszynska 模型分析转子系统稳定性时,对平均周向速比常数有必要进行分析,提高经验参数选择的准确性。

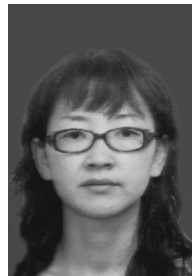
2) 平均周向速比常数  $\tau_0$  在小于 0.2 时出现的单周期运动,意味着在该低转速下系统没有发生不稳定运动,耦合系统在该参数以下系统保持稳定的单周期运动,没有发生非线性的行为,建议参数选择应大于 0.2。

3) 随着平均周向速比常数的增大,耦合系统失稳点不断前移。尤其是在平均周向速比常数大于 0.375 后,系统随着均周向速比常数的增大,系统提前出现倍周期分叉,振幅增大,使不稳定性增加,因此,建议平均周向速比常数取值在 0.6 以内。

### 参 考 文 献

[1] 周纪卿,朱因远.非线性振动[M].西安:西安交通大学出版社,1998.  
 [2] 李明.转角不对中故障的转子系统非线性动力学特征[J].振动、测试与诊断,2011,31(5):552-556.  
 Li Ming. Nonlinear dynamics characteristics of rotor system with angular misalignment[J]. Journal of Vi-

- bration, Measurement & Diagnosis, 2011,31(5):552-556. (in Chinese)
- [3] 王炎,马吉声,郑海起,等.含柔性转子的齿轮轴承系统动态特性分析[J].振动、测试与诊断,2012,32(1):51-55.  
Yang Yan, Ma Jisheng, Zheng Haiqi, et al. Dynamic characteristics analysis of gear-bearing system with flexible rotor[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012,32(1):51-55. (in Chinese)
- [4] Jing Jianping, Guang M. On the non-linear dynamic behavior of a rotor-bearing system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 274:1031-1044.
- [5] 李振平,闻邦椿.刚性转子—轴承系统的复杂非线性动力学行为研究[J].振动与冲击,2005,24(3):36-39.  
Li Zhenping, Wen Bangchun. Study on complex nonlinear dynamics of rigid rotor-bearing system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2005, 24(3): 36-39. (in Chinese)
- [6] Ding Q, Cooper J E, Leung A Y T. Hopf bifurcation analysis of a rotor/seal system [J]. Journal of Sound and Vibration. 2002, 252(5):817-833.
- [7] Hua J. Numerical analysis of nonlinear rotor-seal system[J]. ASME, Journal of Sound and Vibration, 2005, 283:525-542.
- [8] 成玫,孟光,荆建平.转子-轴承-密封系统的非线性振动特性[J].上海交通大学学报,2007,41(3):171-174.  
Chen Mei, Meng Guang, Jing Jianping. Nonlinear vibration characteristics of a rotor bearing seal system [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2007, 41(3): 171-174. (in Chinese)
- [9] 李勇,董宏云. Muszynska 模型经验系数对转子系统稳定性的影响[J].热能动力工程,2011,26(1),368-373.  
Li Yong, Dong Hongyun. Muszynska model empirical coefficient on the stability of rotor system[J]. Journal of Thermal Power Engineering, 2011, 26(1), 368-373. (in Chinese)
- [10] Muszynska A, Bently D E. Frequency-swept rotating input perturbation techniques and identification of the fluid force models in rotor - bearing - seal systems and fluid handling machines[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 143(1):103-124.
- [11] Muszynska A. Model testing of rotor-bearing system [J]. The International Journal of Analytical and Experimental Model Analysis, 1986, 1(3):15-34.
- [12] Adiletta G, Guido A R, Rossi C. Chaotic motions of rigid rotor in short journal bearings [J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 10(6):251-269.
- [13] 向玲,王子瑞,唐贵基.偏心量对转子-轴承-密封耦合系统非线性振动特性影响分析[J].华北电力大学学报, 2012, 39(5):59-64.  
Xiang Ling, Wang Zirui, Tang Guiji. The analysis of eccentricity impact of the rotor-bearing-seal nonlinear vibration characteristics of coupled system [J]. Journal of North China Electric Power University, 2012, 39(5):59-64. (in Chinese)



**第一作者简介:**向玲,女,1971年4月生,博士、教授。主要研究方向为机械故障诊断、信号分析与处理、非线性动力学等。曾发表《New feature extraction method for the detection of defects in rolling element bearings》(《Journal of Engineering for Gas Turbines and Power》2012, Vol. 134, No. 8)等论文。  
E-mail:ncepuxl@163.com