

# 时间序列模型中的随机共振现象\*

何俊, 陈怀海, 贺旭东

(南京航空航天大学航空宇航学院 南京, 210016)

**摘要** 在滑动自回归(auto-regressive and moving average,简称 ARMA)时间序列模型的基础上,利用模态稳定性图来确定系统真实模态,描述了在求解过程中产生的随机共振现象。借助悬臂梁的有限元模型,利用精细时程积分方法计算得到了其加速度脉冲响应函数,建立了用于振动模态识别的 ARMA 模型。在利用模态稳定性图来确定系统真实模态的过程中发现,加入合适的噪声信号可以有效地改善识别结果,剔除虚假模态,即产生了随机共振现象。对悬臂梁进行时变化处理后,随机共振现象较之前不变系统更加显著,对最终识别结果产生了明显的优化作用。

**关键词** 滑动自回归模型; 稳定图; 随机共振; 时变系统; 模态频率

**中图分类号** O328; TH17

## 引言

随机共振是一种利用噪声使微弱信号得到增强传输的非线性现象,与线性方法相比能够检测更低信噪比的信号<sup>[1]</sup>。文献[1]介绍了用于描述随机共振现象的典型双稳态非线性系统,提出了目前随机共振方法中亟待解决的问题:双稳随机共振系统离散模型的稳定性分析;高频信号的检测问题和微弱信号检测的数值仿真研究。研究表明,在线性系统中同样存在随机共振现象<sup>[2]</sup>。在传统的时间序列模型算法中,噪声一般是被看作系统模态识别的不利因素而加以抑制,尤其是在时变系统中,噪声对系统的影响更会受到关注。在抑制噪声的同时,被测信号会受到一定的抑制或损失,从而给识别带来不利影响。文献[3]研究了非白噪声干扰下的 ARMA 模型。文献[4]研究了 ARMA 模型振动信号的降噪方法。在利用时间序列模型求解系统真实模态的过程中,稳定图是一种能够有效剔除虚假模态、确定系统真实模态的新方法,具有直观简便的特点,并能够避开传统方法中的定阶难点。文献[5]将模态稳定图方法运用到随机子空间法中进行模态参数的识别。文献[6]总结了赤池信息准则(Akaike information criterion,简称 AIC 准则)和贝叶斯信息准

则(Bayesian information criterion,简称 BIC 准则)等一系列定阶方法。

笔者研究时不变系统和时变系统,将稳定图方法运用到时间序列模型分析中。通过在 ARMA 模型输入信号中加入一定量的噪声信号,使系统产生随机共振现象,从而在稳定图中高效地识别系统的真实模态频率。

## 1 时间序列模型简介

假设一线性结构受理想白噪声激励,其观测样本序列为 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,建立的 ARMA 模型可表示为

$$x_t - \sum_{i=1}^p \varphi_i x_{t-i} = a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} \quad (1)$$

其中: $p$ 为自回归部分的阶次; $q$ 为滑动平均部分的阶次; $\varphi_i$ 为自回归系数; $\theta_j$ 为滑动平均系数; $a_{t-j}$ ( $j=1, 2, \dots, q$ )为随机输入序列; $a_t$ 为白噪声输入。

引入时移算子后,ARMA 模型的传递函数为

$$H(z) = \sum_{k=0}^q \theta_k z^{-k} / \sum_{k=0}^p \varphi_k z^{-k} \quad (2)$$

求解分母多项式的根  $s$ ,可得到系统的模态频率。它们与系统固有频率  $\omega_k$  和阻尼比  $\zeta_k$  的关系为

$$s_k = e^{s_k \Delta t} = e^{(-\zeta_k \omega_k + j\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}) \Delta t} \quad (3)$$

\* 国家自然科学基金资助项目(111102083);民机专项科研资助项目(MJ-G-2011-24)

收稿日期:2012-03-29;修回日期:2012-05-30

由于 ARMA 过程具有唯一平稳解<sup>[7]</sup>,在 MATLAB 平台中,ARMA 模型可以用其自带函数来建模

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j a_{t-j} \quad (4)$$

其中: $h_j$  为脉冲响应函数。

常用的方法是 Prony 函数方法,调用格式为

$$[b, a] = \text{prony}(h, nb, na) \quad (5)$$

prony 函数使用 Prony 方法时间序列响应拟合的 ARMA 参数建模,主要用于滤波器设计、指数信号建模和系统辨识<sup>[7]</sup>。式(5)返回传递函数的分子系数向量  $b$  和分母系数向量  $a$ ,即滑动平均系数  $\theta_j$  和自回归系数  $\varphi_i$ ,其中: $h$  为时域脉冲响应; $nb, na$  分别为传递函数的分母和分子阶次,即滑动平均阶次  $q$  和自回归模型阶次  $p$ 。这种 Prony 方法既考虑到了系统的输入,又考虑到了系统的输出,对模型参数的估计更加全面。

在 ARMA 模型中,由于存在两个阶次  $p$  和  $q$ ,因此如何确定二者关系就显得尤为重要。这里参考文献[8]中对 ARMA 模型的分析,自回归模型阶次  $p$  和滑动平均阶次  $q$  之间有关系, $p > q$ ,通常取  $p = q + 1$ ,故后面的内容  $p$  与  $q$  将按此关系取值。

## 2 稳定图方法简介

在模态参数识别领域,模态稳定性图被用于稳定模态的判定和虚假模态的剔除。笔者将稳定性图方法运用到 ARMA 模型时间序列分析法中进行模态参数识别。基本方法如下:令 ARMA 模型的阶次在一定范围内逐渐增大并进行相应求解计算,得到模态频率的一系列值,以频率为横坐标,以模型阶次(取滑动平均阶次  $q$ )为纵坐标,将所得到的模态频率绘制于图上。由于模型阶次的过估计,真实模态和虚假模态会同时出现在稳定图中。随着阶次的增加,对应于真实模态的稳定极点会排列成一条纵向直线,而虚假模态的极点则变得分散、不稳定,于是就可以很容易地从图中寻找到系统的各阶真实模态值。

对于时变系统模态参数的识别,可以基于短时不变的假设对时间段进行划分,运用稳定图方法来确定系统的真实模态频率。由于需要反映模态频率的变化情况,因此对应于每个时间段的稳定图就需要共用频率坐标轴,最后整个时变历程的稳定图就是每个时间段稳定图的组集。

## 3 算 例

选取一悬臂梁系统作为研究对象,如图 1 所示。该梁为钢制材料,其弹性模量  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,材料密度  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,长度  $l = 1.6 \text{ m}$ ,截面宽度  $b = 0.06 \text{ m}$ ,高度  $h = 0.02 \text{ m}$ 。假设该梁满足比例阻尼条件,即  $C = \alpha M + \beta K$ ,并取  $\alpha = 0.08, \beta = 10^{-5}$ ,则阻尼  $C = 0.08M + 10^{-5}K$ 。通过有限元求解方法计算得到该梁的前 3 阶理论模态值如表 1 所示。

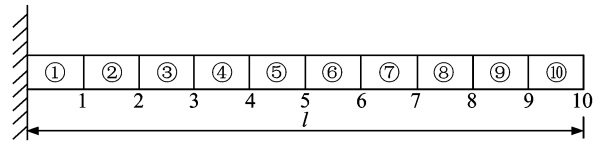


图 1 悬臂梁示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the cantilever beam

表 1 悬臂梁振动频率

Tab. 1 Frequencies of the cantilever beam

模态阶数 $r$	$f/\text{Hz}$
1	6.5
2	41.0
3	114.5
4	225.2

钟万颢<sup>[9]</sup>提出了基于哈密顿体系的精细时程积分法,具有高度精确的数值解。运用该方法计算在节点 9 处施加脉冲激励后得到节点 7 的脉冲激励响应,利用所得到的系统振动加速度时程响应信号作为输入信号建立 ARMA 模型,对其进行求解,得到系统的模态频率值<sup>[10-11]</sup>。这里,采样频率取  $2\,048 \text{ Hz}$ ,采样时间为  $10 \text{ s}$ ,采样时间间隔大小为  $\Delta t = 1/2\,048 \text{ s}$ ,共有  $20\,480$  个数据点。在作稳定图时,初步取滑动平均阶次  $q$  的阶次区间为  $1 \sim 200$  阶,作出的稳定图如图 2 所示。

从图 2 可以看到,系统的前 4 阶模态频率直观而清楚地显示在稳定图中,其频率值分别为  $6.5, 41.0, 114.5, 225.1 \text{ Hz}$ ,与有限元计算结果一致。同时可以看到,在  $250 \text{ Hz}$  的地方存在一阶模态频率,而事实上系统在该频率值处是不存在模态频率的,即识别出的为虚假模态。

接下来对悬臂梁进行改造,方法是通过假设梁质量矩阵随采样间隔  $\Delta t$  线性改变得到一个时变系统,具体表达式为

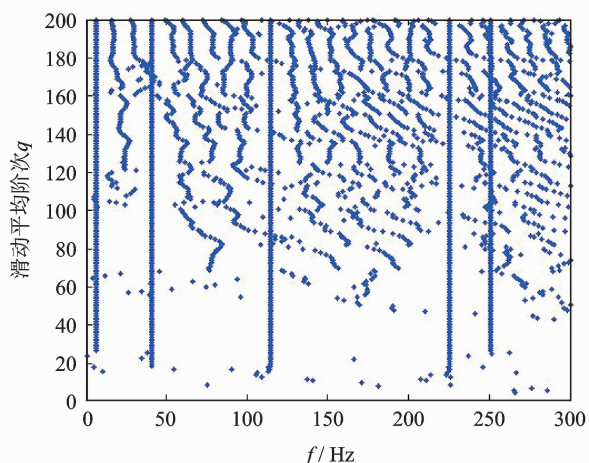


图2 ARMA模型稳定图

Fig. 2 Stable diagram of the ARMA model

$$\mathbf{M}(n) = \mathbf{M} + n\Delta\mathbf{M} \quad (6)$$

其中： $n$ 为采样时刻； $\mathbf{M}$ 为系统的初始质量阵； $\Delta\mathbf{M}$ 为质量矩阵的改变量。

整个时间段内的总质量变化取为 1 kg。通过有限元方法得到 10 s 内前两阶模态频率变化情况如图 3 所示。从图 3 看出，这里构建的时变系统参数变化较为平缓，可以对振动响应信号进行短时时不变的划分，继而作出该时变系统在整个时间段内的稳定图。为了直观而清楚地表示各阶频率的变化情况，这里将每阶频率单独拿出来作图，初步分析前两阶模态变化，响应信号分为 20 段。

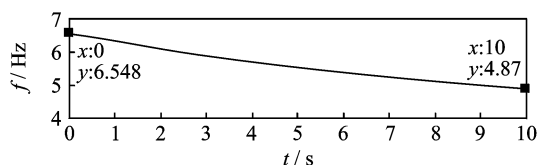
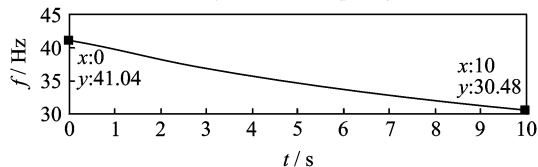
(a) 第1阶频率  
(a) The first frequency(b) 第2阶频率  
(b) The second frequency

图3 前两阶模态频率变化图

Fig. 3 Changing of the first two frequencies

从图 2 看出，模型的阶次区间并不需要很大即可得到系统的真实模态频率，且在分析时变系统时，合适的阶次区间还能剔除绝大部分的虚假模态，令最终的稳定图清晰而明了。这里，第 1 阶模态阶次

区间取为 81~120 阶，第 2 阶模态阶次区间取为 61~100 阶，稳定图如图 4、5 所示。可以看到，前两阶模态的时变稳定图基本上是容易识别的，只是在真实模态附近明显存在虚假模态，第 1 阶模态附近存在一个虚假模态，第 2 阶模态附近存在两个虚假模态，且完全遵循真实模态的分布规律，紧密地贴合在一起，给识别带来一定影响。

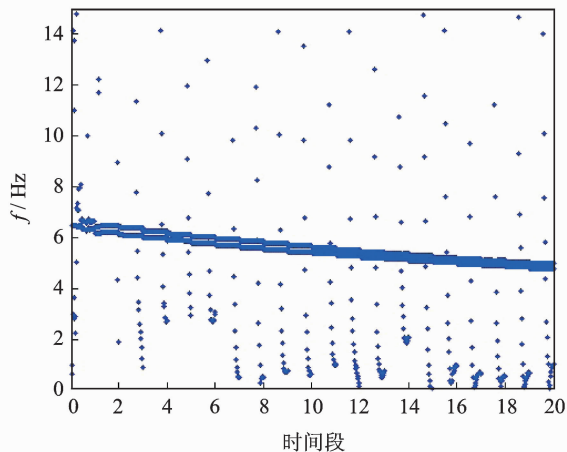


图4 第1阶频率时变稳定图

Fig. 4 The stable diagram of the first changing frequency

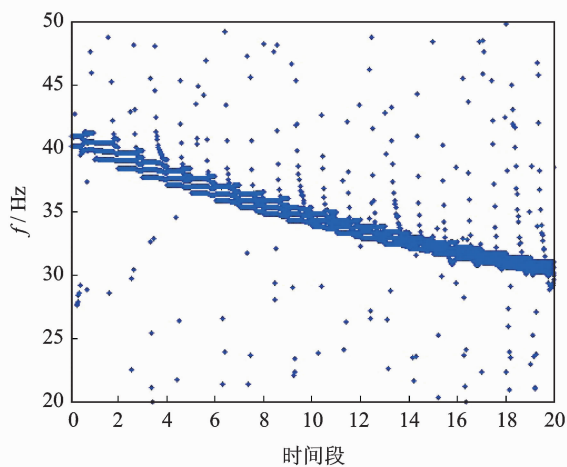


图5 第2阶频率时变稳定图

Fig. 5 The stable diagram of the second changing frequency

## 4 随机共振现象

随机共振的基本思想是在信号中加入一定量的噪声，使被测信号产生随机共振而更易被检测出来。当然，这种噪声应是刚好能够使系统产生随机共振现象，但从实际上并不容易操作。

由于本研究中的振动响应信号采用的是精细时

程积分数值解法,其求解精度非常高,可以认为是系统在无噪声污染情况下的输出,而实际中并不存在这样的情况,因此在响应信号中加入一定量的噪声进行分析。这里首先针对时不变系统进行研究,取噪声的标准差为 0.1 加在响应信号上,稳定图如图 6 所示。可以看到,250 Hz 处的虚假模态已经完全剔除掉了,第 2,3,4 阶模态基本没有受到噪声的影响,而第 1 阶模态受到了噪声很大的影响,已经不能识别了,因此这里考虑减小噪声强度,标准差取为 0.01,再次观察稳定图如图 7 所示。可以看到,由于产生了随机共振现象,此时系统的各阶模态频率都能很好地识别出来。综合来看,第 1 阶模态最容易受到噪声的影响,如果控制不好,便不能正常识别,而第 2,3,4 阶模态的抗噪声干扰能力明显比第 1 阶模态要强。

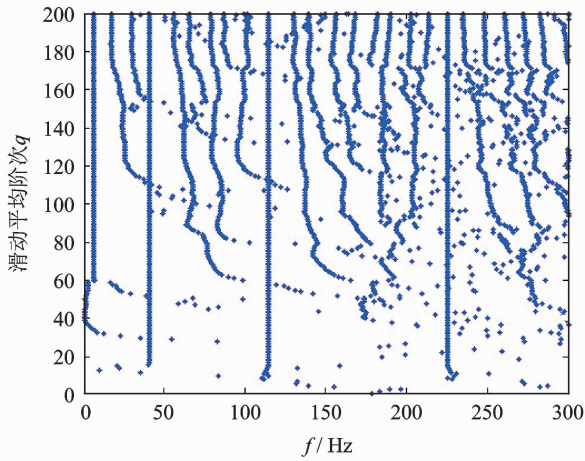


图 6 噪声标准差为 0.1 时的稳定图

Fig. 6 The stable diagram with an adding noise with a standard deviation of 0.1

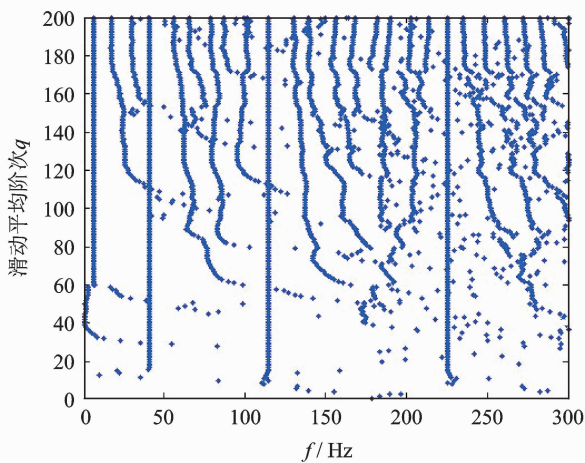


图 7 噪声标准差为 0.01 时的稳定图

Fig. 7 The stable diagram with an adding noise with a standard deviation of 0.01

噪声的取值是一个关键的因素。经过多次试验发现,当噪声标准差取为  $10^{-4}$  时,250 Hz 处的竖线发生明显抖动,产生弯曲现象。因此,当噪声的取值为  $10^{-3}$  至  $10^{-2}$  量级之间时,可以完全剔除 250 Hz 处的虚假模态,且不会对真实模态产生负面影响。

从图 5 可以看到,分析第 2 阶频率时的时间段分为 20 段显得比较粗糙,因此将时间段重新分为 40 段。考虑到时变系统更容易受到噪声的影响,因此需要进一步减小噪声信号,取标准差为  $10^{-4}$ 。作出第 1,2 阶模态频率的时变稳定图如图 8,9 所示。可以看到,噪声的加入对前两阶模态的识别结果产生了明显的优化作用,直观地显示出时间序列模型中存在的随机共振现象。

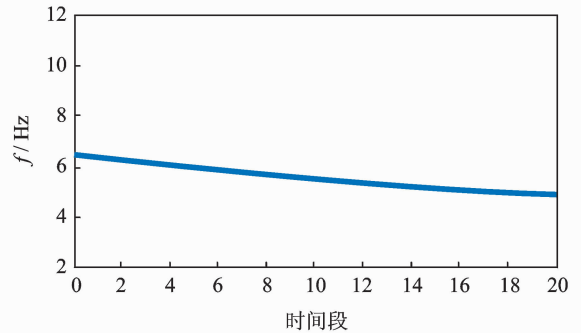


图 8 噪声标准差为  $10^{-4}$  时的第 1 阶频率时变稳定图  
Fig. 8 The stable diagram of the first time-varying frequency with an adding noise with a standard deviation of  $10^{-4}$

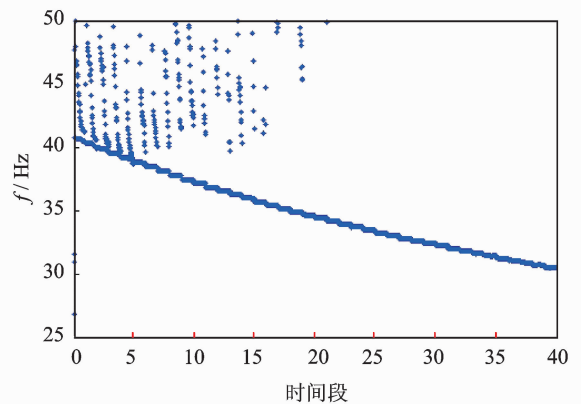


图 9 噪声标准差为  $10^{-4}$  时的第 2 阶频率时变稳定图  
Fig. 9 The stable diagram of the second time-varying frequency with an adding noise with a standard deviation of  $10^{-4}$

### 5 结束语

借助稳定图确定 ARMA 模型稳定解的方法,

发现了时间序列模型中存在的随机共振现象,分析了用于优化识别结果的噪声取值。在特定的环境下,噪声的存在是一种有利的因素,对于系统模态的识别具有明显的积极作用。

### 参 考 文 献

- [1] 邵菊花. 微弱信号检测的随机共振方法和应用研究[D]. 成都:电子科技大学,2008.
- [2] 孙万麟,黄玉划,赵丽. 一种基于线性系统随机共振的弱信号检测方法[J]. 黑龙江工程学院学报,2010,24(1):53-54.  
Sun Wanlin, Huang Yuhua, Zhao Li. Weak signal detection method based on linear system with stochastic resonance[J]. Journal of Heilongjiang Institute of Technology, 2010, 24(1):53-54. (in Chinese)
- [3] 卢启兴. 非白噪声干扰下的 ARMA 模型[J]. 上海海运学院学报,1993,14(2):69-80.  
Lu Qixing. The ARMA model under the interference of non-white noise[J]. Journal of Shanghai Maritime University, 1993, 14(2):69-80. (in Chinese)
- [4] 刘建军,黄方林,王学敏. 基于 EMD 和 ARMA 模型桥梁振动信号降噪的处理方法[J]. 铁道科学与工程学报,2006,3(5):55-59.  
Liu Jianjun, Huang Fanglin, Wang Xuemin. Noise reduction of bridge vibration signal based on EMD and ARMA mode[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2006, 3(5):55-59. (in Chinese)
- [5] Peters B. Comparative study of modal analysis techniques for bridge dynamic characteristics[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003, 17(5):965-988.
- [6] Gooijer D, Abraham B, Ann Gould, et al. Methods for determining the order of an autoregressive-moving average process: a survey[J]. International Statistical Review, 1985, 53(3):301-329.
- [7] 王济,胡晓. MATLAB 在振动信号处理中的应用[M]. 北京:中国水利水电出版社,2006:235.
- [8] Nield S A, Williams M S, McFadden P D. Non-linear vibration characteristics of damaged concrete beam[J]. ASCE Journal of Structural Engineering, 2003, 129: 260-268.
- [9] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报,1994,34(2):131-136.  
Zhong Wanxie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2):131-136. (in Chinese)
- [10] 王宏宏,陈怀海,崔旭利,等. 热效应对导弹翼面固有振动特性的影响[J]. 振动、测试与诊断,2010,30(3): 275-279.  
Wang Honghong, Chen Huaihai, Cui Xuli, et al. Thermal effect on dynamic characteristics of a missile wing[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010, 30(3):275-279. (in Chinese)
- [11] 王亮,陈怀海,贺旭东,等. 轴向运动悬臂梁系统阻尼与边界条件试验[J]. 振动、测试与诊断,2010,30(5): 547-551.  
Wang Liang, Chen Huaihai, He Xudong, et al. Test on damping and boundary condition of axially moving cantilever beam[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010, 30(5): 547-551. (in Chinese)



**第一作者简介:**何俊,男,1987年9月生,助理工程师。主要研究方向为工程力学。

E-mail: melhejun@126.com

**通信作者简介:**陈怀海,男,1965年11月生,教授。主要研究方向为振动分析、测试与控制。

E-mail: chhnuaa@nuaa.edu.cn

