

基于 Green 函数和正则化的动态载荷识别方法^{*}

常晓通, 闫云聚, 刘 鎏, 李鹏博

(西北工业大学力学与土木建筑学院 西安, 710129)

摘要 在载荷识别过程中由于结构矩阵的病态特性以及测量噪声的影响, 常规最小二乘法往往失效。针对这一问题, 采用正则化方法进行载荷识别。载荷在时域内可用一系列脉冲来表示, 系统的响应是载荷与单位脉冲响应函数的卷积积分。通过对载荷反演模型剖析, 指出该病态问题的本质, 提出了相应的正则化求解方法。基于 Morozov 相容性原理, 采用一种新的选取正则化参数的准则分别进行了单输入单输出和二输入二输出系统的载荷识别。仿真结果说明该识别方法是有效的, 可以得到满足工程要求的稳定近似解。

关键词 载荷识别; 格林函数; 奇异值分解; 正则化技术

中图分类号 TB123

引 言

各种机电产品在使用过程中经常会受到各种各样的动态载荷作用, 包括振动、冲击、噪声和热环境等动力学载荷, 准确地确定这些载荷对于结构的安全和精确设计具有重要意义。在许多情况下, 如导弹、飞行器和海洋平台等大型结构在受到风浪或交变激励等作用下, 很难对作用于结构的外载荷作直接测量。动载荷识别是根据实测系统的动力响应和已知的系统动态特性来求解结构所受的动态载荷。在实际工程中, 直接测量动载荷难度非常大, 载荷识别是一种间接获取载荷的途径。

目前, 载荷识别的方法主要有频域法和时域法两大类^[1]。频域法提出较早, 其基本思想是由响应谱识别激励谱, 主要利用激励和响应之间频响函数求逆实现, 但是矩阵求逆时经常遇到系数矩阵的病态问题和奇异值分解问题^[2]。时域法是从系统动力学方程出发, 根据载荷和响应之间复杂卷积关系的反分析, 直接确定动态力的时间历程^[3-4], 在工程中有很好的应用前景。张方等^[5]提出了基于广义正交多项式特征技术的载荷识别方法, 具有较好的精度和稳定性。侯秀慧等^[6]针对桥梁结构移动载荷识别问题, 提出了基于精细积分的桥梁结构移动载荷识别法。徐梅等^[7]采用平均法、矩阵预处理法对动态标定矩阵和所测响应进行处理, 增强识别的抗噪性。

秦远田等^[8]运用张量理论在高维正交空间建立高维矩量基函数, 识别了二维分布动载荷。E. Jacquelin 等^[9]将正则化技术引入到载荷识别解卷积过程中, 讨论了正则参数的选取对载荷识别结果的影响。

笔者在时域内对结构动态载荷识别问题进行了研究, 将动力学正问题表示为单位脉冲响应函数和动载荷的卷积积分, 并在时域将该卷积分离散^[10]。应用矩阵分析理论阐明了载荷识别病态问题的根本原因, 提出了基于正则化的无约束体系载荷识别方法。最后, 将该方法应用于动态载荷识别的数值模拟, 数值仿真的结果验证了该方法的正确性和稳定性。

1 用 Green 函数建立正问题模型

具有 n 个自由度的比例阻尼系统动力学方程为

$$M\ddot{\mathbf{y}}(t) + C\dot{\mathbf{y}}(t) + K\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t) \quad (1)$$

其中: $M \in R^{n \times n}$, $C \in R^{n \times n}$, $K \in R^{n \times n}$ 分别为总体质量矩阵、比例阻尼矩阵和刚度矩阵; $\mathbf{S}(t) \in R^{n \times 1}$ 为外载荷列向量; $\mathbf{y}(t) \in R^{n \times 1}$, $\dot{\mathbf{y}}(t) \in R^{n \times 1}$, $\ddot{\mathbf{y}}(t) \in R^{n \times 1}$ 分别为位移、速度、加速度响应向量。

系统在待识别载荷 $\mathbf{S}(t)$ 作用下 t 时刻的位移响应可由卷积形式表示为

$$y^*(t) = \int_0^t G(t-\tau)S(\tau) d\tau \quad (2)$$

其中: $G(t)$ 为系统的 Green 函数。

在自由度 $b(b=1, 2, \dots, n)$ 处, 将时间 $[0, T]$ 划

* 高等学校博士学科点专项科研基金(优先发展领域)资助项目(20126102130004)

收稿日期: 2013-02-26; 修回日期: 2013-05-13

分为 m 等份,则式(2)可以离散为

$$\begin{Bmatrix} y_{b1}^* \\ y_{b2}^* \\ \vdots \\ y_{bm}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & & & \\ g_2 & g_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_m & g_{m-1} & \cdots & g_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{m-1} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

可记为

$$\mathbf{Y}_b = \mathbf{G}\mathbf{S} \quad (4)$$

其中: y_{bi}^* , g_i , s_i 分别为 $t = i\Delta t$ 时刻自由度 b 处的位移、Green 函数和脉冲载荷。

对于多源载荷,可以用同单源载荷一样的方法离散为线性方程组的形式。由于线性系统满足叠加原理,可将多源载荷问题表示为矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \\ \vdots \\ Y_n^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} \quad (5)$$

其中: n 为载荷源的个数; G_{ij} 为载荷源 S_i 到测点 Y_j^* 之间相应的 Green 函数。

为了便于表述,仍将式(5)表示为式(4)的形式。

2 载荷识别的不适定性分析

一般情况下,式(4)的最小二乘解为

$$\mathbf{S}_{LS} = \mathbf{G}^+ \mathbf{Y}^* = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{Y}^* \quad (6)$$

此处, $\mathbf{G}^+ = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$ 为 \mathbf{G} 的伪逆,即 Moore-Penrose 逆。当矩阵 \mathbf{G} 秩亏或者病态时,式(2)的结果往往是不适定的,是一个病态问题。为了深入研究上述方程的病态问题,这里采用滤波或者说截断奇异值分解的思想进行探讨。

在实际问题中,由于响应的观测数据不可避免地带有误差或者噪音,所以可以把式(4)写为

$$\mathbf{G}\mathbf{S}_{\text{true}} + \text{err} = \mathbf{Y}_{\text{err}}^* \quad (7)$$

其中: \mathbf{S}_{true} 为实际的输入载荷;err 为扰动误差; $\mathbf{Y}_{\text{err}}^*$ 为测量到的响应数据。

由于 \mathbf{G} 为实方阵,对 \mathbf{G} 做奇异值分解,记为

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{D}\text{Diag}(\sigma_i)\mathbf{V}^T \quad (8)$$

其中: $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n)$; \mathbf{u}_i 为 \mathbf{G} 的左奇异向量; $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n)$; \mathbf{v}_i 为 \mathbf{G} 的右奇异向量。

它们满足

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \\ \mathbf{G}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{G}^* \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i \end{cases} \quad (9)$$

其中: δ_{ij} 为 Kronecker 函数,满足 $\delta_{ij} = 1$,若 $i = j$,

$$\delta_{ij} = 0, i \neq j.$$

设 \mathbf{G} 的逆矩阵存在,利用式(9)得到

$$\mathbf{G}^{-1} \mathbf{Y}_{\text{err}}^* = \mathbf{V}\mathbf{D}\text{Diag}(\sigma_i^{-1})\mathbf{U}^T \mathbf{Y}_{\text{err}}^* =$$

$$\mathbf{F}_{\text{true}} + \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \text{err}) \mathbf{v}_i \quad (10)$$

可以看出,问题的不稳定性是由于算子 \mathbf{G} 的小奇异值引起的,导致问题的解在 0 值附近震荡。

3 正则化方法

考虑抽象的线性算子方程(4),前苏联院士 Tikhonov 利用变分正则化技巧实现了拟解法(Quasi-solution Method),即问题的适定解 S_α 应满足下列变分问题

$$S_\alpha = \arg \min_{z \in F} \|\mathbf{G}\mathbf{S} - \mathbf{Y}^*\|^2 + \alpha \Omega[S] := M[S] \quad (11)$$

其中: $\alpha > 0$ 为正则化参数; $\Omega[S]$ 为 Tikhonov 稳定子,通常取 $\Omega[S] = \|\mathbf{S}\|_{L^2}^2$ 。

从式(11)可以看出,所谓的正则化方法其实是一种带惩罚的最小二乘方法,或者说是带约束的最小二乘方法。

对于载荷识别问题采用奇异值分解的方法进行了分析,可知不稳定性是由于算子 \mathbf{G} 的小奇异值引起的。解决思路就是按照滤波的思想,把小奇异值过滤掉。对于小奇异值的逆乘上一个滤波函数 $f_\alpha(\sigma_i)$,使得当 $\sigma_i \rightarrow 0$ 时, $f_\alpha(\sigma_i)/\sigma_i \rightarrow 0$ 。按照这种做法可以得到真解的一个近似表达

$$S_\alpha = \mathbf{V}\mathbf{D}\text{Diag}(f_\alpha(\sigma_i)\sigma_i^{-1})\mathbf{U}^T \mathbf{Y}_{\text{err}}^* = \sum_{i=1}^n f_\alpha(\sigma_i)\sigma_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{Y}_{\text{err}}^*) \mathbf{v}_i \quad (12)$$

为了真实地逼近原问题的解,必须在过滤掉小奇异值的同时保留较大的奇异值,即当 σ 较大时使 $f_\alpha(\sigma_i) \sim 1$ 。若取

$$f_\alpha(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma^2 \geq \alpha) \\ 0 & (\sigma^2 < \alpha) \end{cases} \quad (13)$$

将推导出截断奇异值分解(TSVD)为

$$S_\alpha = \sum_{\sigma_i^2 \geq \alpha} \sigma_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{Y}_{\text{err}}^*) \mathbf{v}_i \quad (14)$$

若取滤波函数为

$$f_\alpha(\sigma) = \frac{\sigma^2}{\alpha + \sigma^2} \quad (15)$$

则推导出 Tikhonov 逼近式为

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i (\mathbf{u}_i^T \mathbf{Y}_{\text{err}}^*)}{\sigma_i^2 + \alpha} \mathbf{v}_i = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{Y}_{\text{err}}^* \quad (16)$$

正则化参数选取通常有先验和后验两种策略。后验策略中广泛采用的原则是 Morozov 偏差原理

$$\varphi(\alpha) = \| \mathbf{GS}_{\alpha,\delta}^i - \mathbf{Y}_\delta^* \|^2 = \delta^2 \quad (17)$$

其中： δ 为误差水平。

为了进一步提高精度，笔者采用改进的 Morozov 偏差原理

$$\varphi(\alpha) = \| \mathbf{GS}_{\alpha,\delta}^i - \mathbf{Y}_\delta^* \|^2 = \frac{\delta^2}{\| \mathbf{Y}_\delta^* \|^2} \quad (18)$$

正则化参数的具体求解见文献[11]。

4 数值仿真

算例模型为一端固支的板，板的材料是铝合金，弹性模量为 $7.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ，泊松比为 0.3，密度为 $2.7 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ 。板的边长为 0.8 m，厚度为 $1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。假设在板上作用两个垂直于板的激励力，另有两个测点用于载荷识别。板的有限元模型及作用力位置示意图如图 1 所示（两个箭头分别表示由左向右为激励 1 和激励 2 点的位置，两个点由左向右分别表示两个测点 3 和 4 的位置）。

4.1 单输入单输出的识别

假设力作用在 1 点，载荷的作用方向垂直于方板，使用测点 3 的响应来识别 1 点激励。

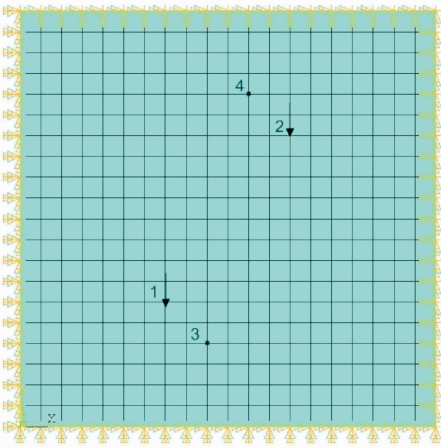


图 1 结构有限元模型

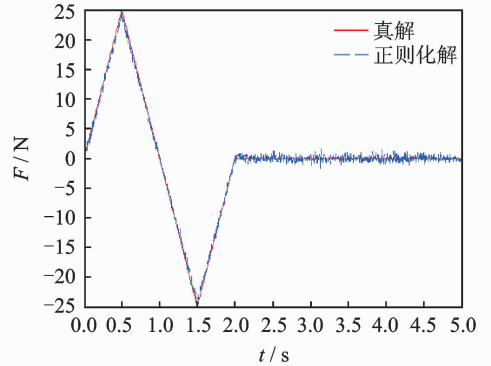
Fig. 1 The structural finite element model

为了研究噪声对识别结果的影响，笔者按照式(19)添加了测量误差来模拟工程中的测量噪声

$$\bar{\mathbf{y}}_{\text{noise}} = \bar{\mathbf{y}} + \text{delt} \left[\frac{\sqrt{\sum \bar{y}_i}}{n_i} \right] \mathbf{N} \quad (19)$$

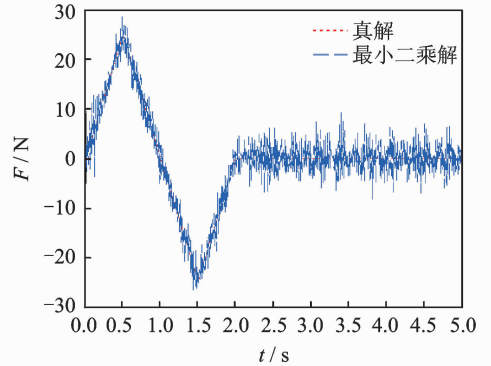
其中： delt 为误差水平； n_i 为响应信号的长度； \mathbf{N} 是均值为零、偏差为 1、与 $\bar{\mathbf{y}}$ 具有同样维数的随机向量。

为了验证正则化方法的稳定性，图 2 给出了噪声水平为 1% 时分别使用正则化方法和常规最小二乘方法的识别结果。



(a) 正则化解

(a) The regularization method



(b) 最小二乘解

(b) The least square method

图 2 使用正则化方法和最小二乘法的识别结果比较
Fig. 2 Comparison of results using the regularization method and the least square method

为了验证该方法在共振状态下的适用性，按照该结构的第 1 阶频率 20.741 添加一正弦载荷，结构的响应如图 3 所示。误差水平为 5% 时的识别结果如图 4 所示，识别结果的载荷误差为 3.50%。

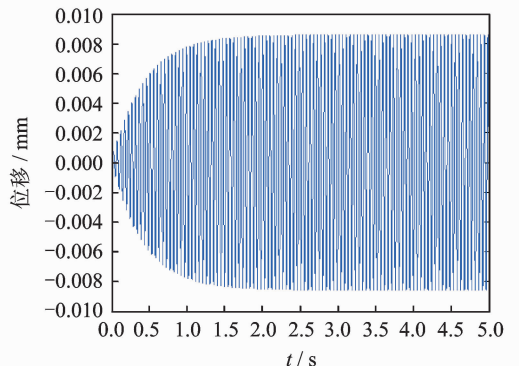


图 3 结构的共振响应

Fig. 3 The structural response of the in the resonance statement

为了考察该方法在反共振状态下的适用性,在结构上施加频率为反共振点(27.4 Hz)的简谐激励,结构的响应如图 5 所示。在噪声水平为 5%时的识别结果如图 6 所示,识别的载荷误差为 6.31%。

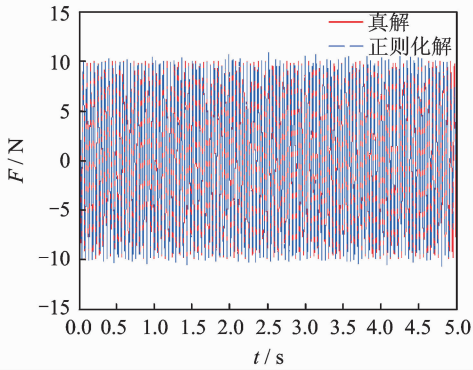


图 4 共振状态载荷识别结果

Fig. 4 The identified sinusoidal load in the resonance statement

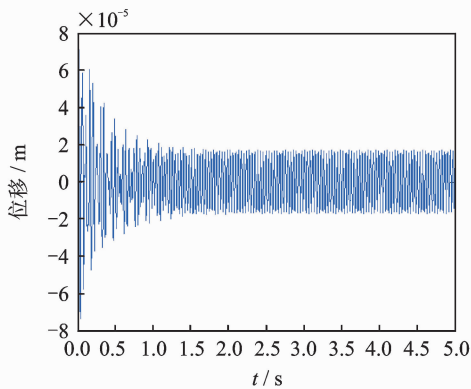


图 5 结构的反共振响应

Fig. 5 The structural response in the anti-resonance statement

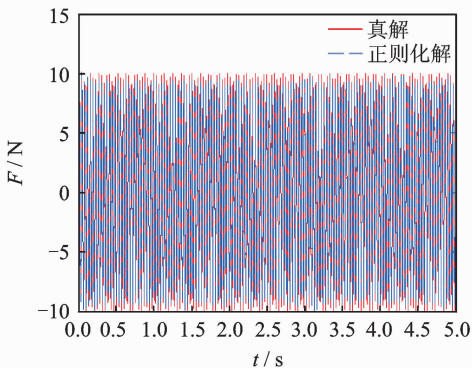
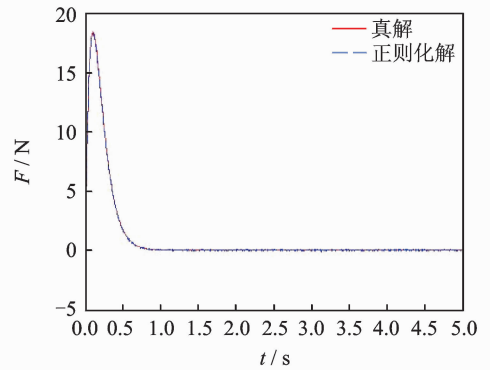


图 6 反共振状态载荷识别结果

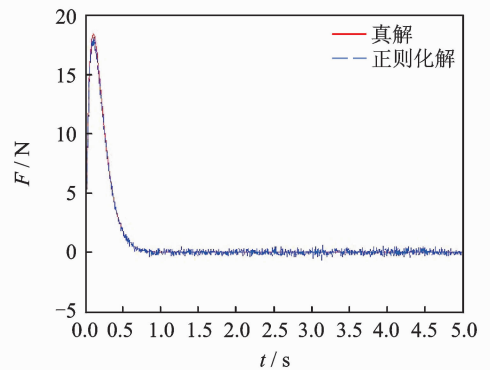
Fig. 6 The identified sinusoidal load in the anti-resonance statement

正则化方法对于结构的冲击载荷同样是适用的,图 7 为响应误差分别为 1%和 5%时的冲击载荷

识别效果,识别的误差分别为 1.89%和 4.21%。



(a) 误差水平为1%
(a) 1% error level



(b) 误差水平为5%
(b) 5% error level

图 7 误差水平分别为 1%和 5%时的冲击载荷识别效果

Fig. 7 The identification effect of impact force with different error level

4.2 二输入二输出的识别

为了验证本方法在多输入多输出系统载荷识别中的应用,笔者在板上的两个载荷作用点上分别加载了正弦和三角载荷,识别结果如图 8,9 所示。

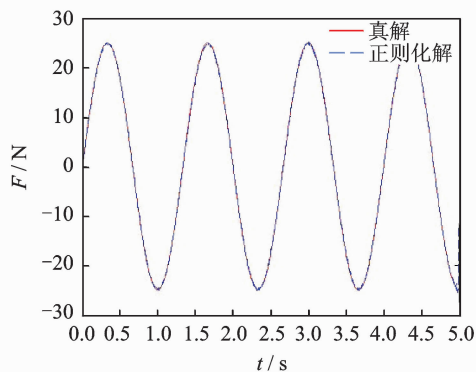
由表 1 可以看出,两个点的载荷识别结果仍然比较准确,但是多点载荷识别结果比单点识别的效果差一些。考虑可能由于多点识别时,识别结果受到载荷作用与测点相关性以及两个测点之间相关性的影响,同时 Green 函数的规模变大对结果也有一定影响。在以后的研究过程中还要考虑测点的选取对于载荷识别结果的影响。

表 1 两点载荷在不同噪声水平下的识别效果

Tab. 1 The identification errors of two-point loads with different noise level

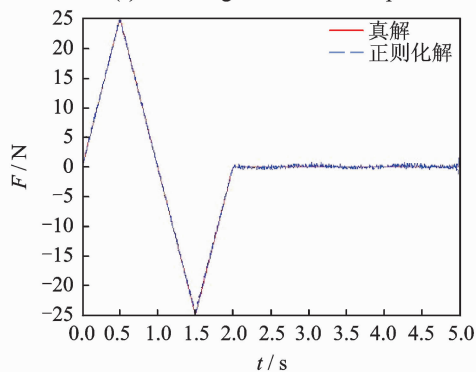
	噪声水平	
	1%	5%
F_1 (正弦)	1.13	3.80
F_2 (三角)	2.73	9.22

%



(a) 1点识别结果

(a) The recognition results of 1 point

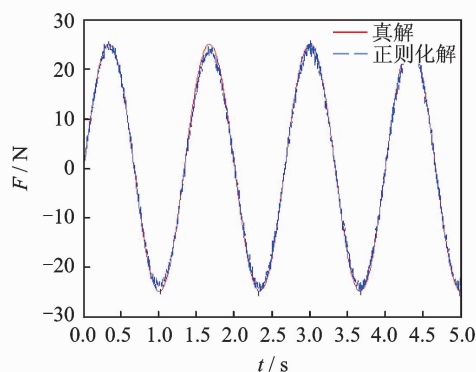


(b) 2点识别结果

(b) The recognition results of 2 point

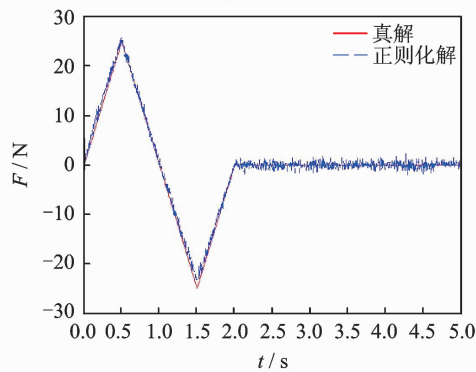
图8 误差水平为1%时1点和2点的识别结果

Fig.8 The recognition results of 1 point and 2 point with 1% measurement error



(a) 1点识别结果

(a) The recognition results of 1 point



(b) 2点识别结果

(b) The recognition results of 2 point

图9 误差水平为5%时1点和2点的识别结果

Fig.9 The recognition results of 1 point and 2 point with 5% measurement error

5 结束语

工程实际中动态载荷识别是一个难度较高且较复杂的反问题。从理论分析可以看出,测量噪声和结构矩阵奇异是引起结构体系动态载荷识别失真的主要因素,而噪声是实际测量中不可避免的,因此在载荷识别过程中要尽量提高响应测量信噪比。通过引入正则化方法,能够降低结构矩阵奇异的影响,改善解的稳定性。

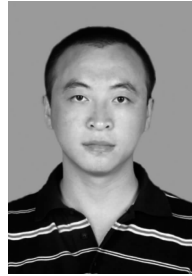
参 考 文 献

- [1] 许锋,陈怀海,鲍明. 机械振动载荷识别研究的现状与未来[J]. 中国机械工程,2002,6:526-530.
Xu Feng, Chen Huaihai, Bao Ming. Study on the general domain based modal model of force identification and its accuracy analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002,6:526-530. (in Chinese)
- [2] 智浩,文祥荣,缪龙秀,等. 动态载荷的频域识别方法[J]. 北方交通大学学报,2002,24(4):5-10.

Zhi Hao, Wen Xiangrong, Miao Longxiu, et al. Dynamic loading identification in frequency domain[J]. Journal of Northern Jiaotong University, 2002,24(4): 5-10. (in Chinese)

- [3] 蔡元奇,朱以文,刘礼华. 动态载荷识别中的模态确定方法研究[J]. 振动工程学报,2006,19(4):543-547.
Cai Yuanqi, Zhu Yiwen, Liu Lihua. Research on method for determining modality in dynamic load identification[J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(4):543-547. (in Chinese)
- [4] 张运良,林皋,王永学,等. 一种改进的动态载荷时域识别方法[J]. 计算力学学报,2004,21(2):209-215.
Zhang Yunliang, Lin Gao, Wang Yongxue, et al. An improved method of dynamic load identification in time domain[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2004,21(2):209-215. (in Chinese)
- [5] 张方,秦远田,邓吉宏. 复杂分布动载荷识别技术研究[J]. 振动工程学报,2006,19(1):81-85.
Zhang Fang, Qin Yuan Tian, Deng Jihong. Research of identification technology of dynamic load distributed on the structure[J]. Journal of Vibration Engineering,

- 2006,19(1):81-85. (in Chinese)
- [6] 侯秀慧,邓子辰,黄立新. 基于精细积分方法的桥梁结构移动载荷识别[J]. 振动与冲击,2007,26(9):142-145.
Hou Xiuhui, Deng Zichen, Huang Lixin. Dynamic moving load identification for bridge structures based on precise integration method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007,26(9):142-145. (in Chinese)
- [7] 徐梅,张方. 分布动载荷识别的抗噪处理[J]. 振动、测试与诊断,2009,29(4):470-473.
Xu Mei, Zhang Fang. An noise study on distributed dynamic load identification[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2009,29(4):470-473. (in Chinese)
- [8] 秦远田,陈国平,张方. 二维分布动载荷识别的矩量方法[J]. 振动、测试与诊断,2012,32(1):34-41.
Qin Yuantian, Chen Guoping, Zhang Fang. Moment method of two-dimension distributed load identification [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012,32(1):34-41. (in Chinese)
- [9] Jacquelin E, Bennani A, Hamelin P. Force reconstruction; analysis and regularization of a deconvolution problem[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 165:81-107.
- [10] 王晓军,杨海峰,邱志平. 基于 Green 函数的动态载荷区间识别方法研究[J]. 固体力学学报,2011,32(1):95-101.
Wang Xiaojun, Yang Haifeng, Qiu Zhiping. Research on interval identification method for dynamic loads based on Green's functionl[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2011,32(1):95-101. (in Chinese)
- [11] 傅初黎,李洪芳,熊向团. 不适定问题的迭代 Tikhonov 正则化方法[J]. 计算数学,2006,28(3):237-246.
Fu Chuli, Li Hongfang, Xiong Xiangtuan. Iterated tikhonov regularization for ill-posed problems [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2006,28(3):237-246. (in Chinese)



第一作者简介:常晓通,男,1985年2月生,博士研究生。主要研究方向为载荷识别、损伤检测。

E-mail: xtchang@163.com