

# 应用拉索频率方程修正数值解的索力识别方法\*

淡丹辉<sup>1</sup>, 陈艳阳<sup>2</sup>

(1. 同济大学桥梁工程系 上海, 200092) (2. 河南省交通规划勘察设计院有限责任公司 郑州, 450052)

**摘要** 精确测量拉索索力是进行斜拉桥健康监测和工作状态评估的关键。在不考虑垂度、刚度、边界条件等因素的影响的条件下应用振动频率显式公式法识别实际工程中的拉索索力, 会造成相当程度的误差。首先, 通过对考虑上述条件时的隐式拉索频率方程零根的数值求解, 给出了索力和频率的间接计算方法; 其次, 通过数值仿真, 研究了该方法对索振动频率和索力识别误差的规律; 最后, 在此基础上建立了进一步的经验误差修正公式。实例研究表明, 与其他显式公式方法相比, 基于频率方程数值解的方法显著提高了识别精度, 在此基础上进行的经验误差修正, 可进一步大幅提高索力索频的识别精度; 与有限元模型修正法相比, 建议的方法计算耗时更小。

**关键词** 拉索; 索力; 频率方程; 数值法

**中图分类号** TH212; TH213.3

## 引言

拉索索力对斜拉桥整体结构的受力和变形都有较大的影响, 是进行此类桥梁健康监测和工作状态评估的重要依据, 需要对其进行精确测量。基于环境振动的频率公式法是目前斜拉桥上常用的索力测量方法<sup>[1-2]</sup>。当考虑拉索的垂度、抗弯刚度、边界条件等实际因素时, 索力索频之间的显式关系将无法给出。用建立在张紧弦理论基础上的公式法(不妨称之为显式频率方程)探讨二者关系将变得不精确<sup>[3]</sup>。为此, 很多旨在提高拉索索力识别精度的方法被提出。这些方法多集中在建立索力频率显式关系的技术路线上。任伟新等<sup>[4]</sup>采用能量法和曲线拟合方法, 提出了分别考虑索垂度和抗弯刚度影响的由基频计算索力的实用公式, 这是一种半经验半解析的显式关系。尽管这些方法对识别精度有一定提高, 但是在一些特定情形下, 尤其是需要同时考虑垂度、抗弯刚度、边界条件的场合, 其精度仍需改进。另一种思路是采用模型修正法, 通过修正描述拉索运动的力学模型(包括微分解析方程、有限差分或有限元模型)的参数, 实现对拉索索力的识别, 如 Byeong Hwa Kima 等<sup>[5]</sup>通过优化方法修正了考虑

了抗弯刚度的拉索微分解析模型, 进而给出了索力解答。张鹏<sup>[6]</sup>利用智能算法对拉索有限元模型进行了修正。这类尝试中, 前者由于对拉索实际条件考虑不足, 对参数的修正无法弥补模型本身的系统误差; 后者模型误差可以克服, 但由于涉及到有限元计算, 计算耗时, 不适于进行索力的实时、在线识别。

在桥梁健康监测系统应用环境下, 利用显式公式或试图对频率方程进行简化来识别索力的尝试将变得没有必要。这是因为, 简化必然会以牺牲精度为代价, 而健康监测对索力识别精度的要求更加严格; 另一方面, 不同于手工计算时代, 在线监测系统提供了有力的计算手段, 没有必要过分追求计算算法的简化而牺牲精度。

为了探求一种适于在线监测环境、精确、耗时少的索力测量方法, 以无阻尼器的拉索为研究对象, 针对文献<sup>[7]</sup>给出的同时考虑拉索垂度、抗弯刚度、固结边界条件等因素影响下的隐式频率方程, 给出了一种新的结合区间求解法和牛顿迭代法的数值求解方法, 一方面可以方便地实现索力的识别, 并通过误差的经验修正, 显著提高精度; 另一方面, 也可以方便地进行给定索力时的精确频率计算, 从而实现单步耗时小、精度高的在线拉索模型修正。

\* 国家自然科学基金资助项目(50978196); 国家重点实验室自主资助项目(SLDRCE09-D-01); “十二五”国家科技支撑计划课题资助项目(2012BAJ11B01); 中央高校基本科研业务费专项资金和国家气象局气象行业科研专项经费资助项目(201306102)

收稿日期: 2012-10-18; 修回日期: 2012-11-26

## 1 拉索频率方程

拉索频率方程描述了拉索的频率与索力之间的关系,在拉索参数已知的情况下,通过频率方程,可以实现二者的相互计算。在某些假设条件下,频率方程可以显式给出,如两端铰支的张紧弦假定下,其显式拉索频率方程即为工程中常用的振动频率法。除此之外,如文献[8]的实索条件下,拉索的频率方程一般不能显式给出,但可以根据二者的隐函数关系,通过数值法进行求解,来实现二者相互计算。下面给出两种情形的频率方程。

### 1.1 张紧弦显式频率方程

水平张紧弦的自由振动方程<sup>[1]</sup>为

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

其中:  $x$  为沿索长方向的坐标;  $v(x, t)$  为  $t$  时刻索上各点的竖向位移;  $EI$  为索的抗弯刚度;  $H$  为拉索索力;  $\rho$  为索的线密度。

考虑拉索两端铰支,由方程(1)解出的拉索平面内振动显式频率方程和相应索张力公式<sup>[2]</sup>为

$$f_n = \frac{n}{L} \sqrt{\frac{TL^2 + n^2 \pi^2 EI}{4\rho L^2}} \quad (2a)$$

$$T = \frac{4\rho L^2 f_n^2}{n^2} - \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (2b)$$

其中:  $n$  为索自振频率的阶数;  $f_n$  为拉索的第  $n$  阶频率;  $L$  为拉索的计算索长。

### 1.2 拉索的隐式频率方程

考虑垂度、抗弯刚度、固结边界条件时的拉索平面内自由振动方程<sup>[7]</sup>为

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - h(t) \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

其中:  $h(t)$  为由拉索振动引起的附加索力。

反对称模态情况下,  $h(t) = 0$ , 式(3)退化成式(1)形式。由方程(3)得到隐式频率方程<sup>[7]</sup>如下。

对称模态

$$\frac{\hat{\omega}^2}{\lambda^2} = \xi^2 \left\{ 1 - \frac{2(\hat{\beta}/\hat{\alpha} + \hat{\alpha}/\hat{\beta})}{\hat{\alpha} \coth(\hat{\beta}/2) + \hat{\beta} \coth(\hat{\alpha}/2)} \right\} \quad (4a)$$

反对称模态

$$\frac{\hat{\alpha}(\hat{\omega})}{\hat{\beta}(\hat{\omega})} = \frac{\tan[\hat{\alpha}(\hat{\omega})/2]}{\tanh[\hat{\beta}(\hat{\omega})/2]} \quad (4b)$$

其中:  $\hat{\alpha}(\hat{\omega}) = \sqrt{\sqrt{(\frac{\xi^2}{2})^2 + \hat{\omega}^2} - \frac{\xi^2}{2}}$ ;  $\hat{\omega} = \omega \frac{L^2}{\sqrt{EI \rho}}$

$$\hat{\beta}(\hat{\omega}) = \sqrt{\sqrt{(\frac{\xi^2}{2})^2 + \hat{\omega}^2} + \frac{\xi^2}{2}}; \xi = L \sqrt{\frac{H}{EI}}; \lambda^2 = \frac{(\rho g L)^2 EAL}{L_e H^3}; L_e \cong L[1 + (\rho g L)^2 / (8H^2)]$$

## 2 频率方程的数值法求解

式(4)确定了频率与索力之间的隐函数关系。该方程是复杂超越方程,无法直接利用其求出索力或其他参数。

式(2)给出了频率与索力的显式关系,可以很方便地用于索力的求解计算。然而,对实际拉索而言,它没有同时考虑索垂度影响、抗弯刚度、固结边界条件等因素,与成桥实索状态相差较大,导致采用式(2)得到的索力误差较大,甚至对于某些大垂度的长索,式(2)也可能不适用。式(4)是建立在同时考虑这些因素的基础上的,更接近实索状态,因此它描述的索力-索频关系也更为准确。可以用数值方法,求解拉索频率或索力。

### 2.1 频率方程求根形式的选用

上面 4 式的求解过程实际上是一个方程  $F(\omega, H, \theta) = 0$  求零根的过程。显然,对方程左边项  $F(\omega, H, \theta)$  的任何初等变化都不会影响零根的取值大小。因此,可以从式(4)出发做适当变化,给出最适于数值法求解的形式,使确定的频率方程的零根均处于方程函数  $F(\omega, H, \theta)$  的连续区间上,且尽可能远离间断点。

对称模态进行求解时,直接采用两边相减的形式

$$\xi^2 \left\{ 1 - \frac{2(\hat{\beta}/\hat{\alpha} + \hat{\alpha}/\hat{\beta})}{\hat{\alpha} \coth(\hat{\beta}/2) + \hat{\beta} \coth(\hat{\alpha}/2)} \right\} - \frac{\hat{\omega}^2}{\lambda^2} = 0 \quad (5a)$$

由于该方程的根大多在间断点附近,导致数值法求解比较困难(图 1(a))。而采用如下形式可以使零根位于两相邻间断点的中间地带(图 1(b)),为数值求根带来方便,寻根过程不易发散,不易陷入死循环。

$$\frac{(\xi^2 \lambda^2 - \hat{\omega}^2) \hat{\alpha} \hat{\beta} [\hat{\alpha} \coth(\hat{\beta}/2) + \hat{\beta} \coth(\hat{\alpha}/2)]}{2\lambda^2 \xi^2 (\hat{\beta}^2 + \hat{\alpha}^2)} - 1 = 0 \quad (5b)$$

对反对称模态求解时,直接对频率方程采用如下形式

$$F(\omega, H, \theta) = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} - \frac{\tan(\hat{\alpha}/2)}{\tanh(\hat{\beta}/2)} = 0 \quad (6)$$

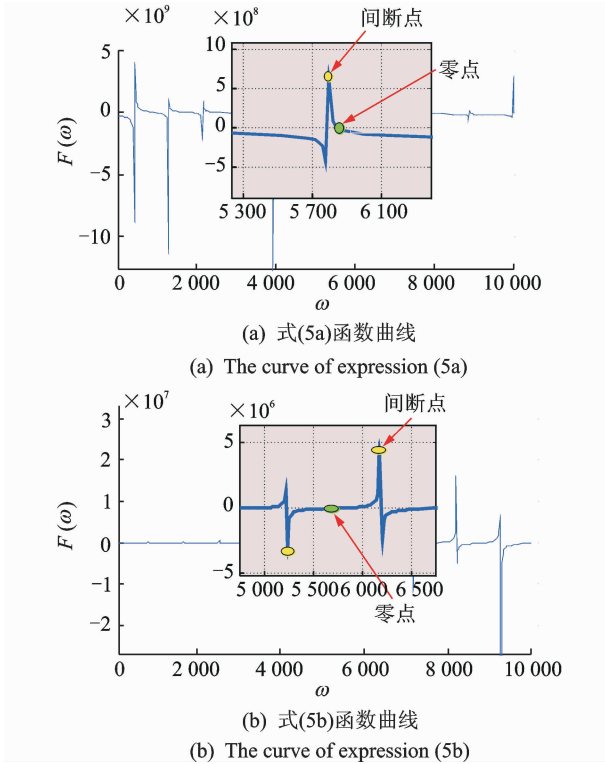


图 1 频率方程零根附近曲线对比

Fig. 1 A comparison of two frequency function curves near zero point.

### 2.2 方程求解区间的确定

由式(5,6)确定的拉索频率方程的左端为周期函数,每个周期构成一个求解区间,每个求解区间内,函数都存在至少一个零根,对应着拉索的一阶模态。因此,这种周期函数类型的隐函数求根问题,首先需要确定求解区间。

#### 1) 反对称模态情况

由式(6)及式(4)的参数取值情况可知,左端  $F(\omega, H, \theta)$  中的  $\tan(\hat{\alpha}/2)$  存在周期性间断点,可由这些间断点确定求解区间,即有

$$n\pi - \pi/2 < \hat{\alpha}/2 < n\pi + \pi/2 \quad (7)$$

其中:  $n=0, 1, 2, \dots$ 。

通过求解该不等式可以确定  $\omega$  和  $\xi^2$  的取值范围如下

$$\frac{2n\pi\sqrt{\frac{(2n)^2\pi^2EI}{m}}}{L^2} < \omega < \frac{(2n+1)\pi\sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2EI + HL^2}{m}}}{L^2} \quad (8)$$

$$\frac{\hat{\omega}^2 - (2(n+1) - 1)^4\pi^4}{(2(n+1) - 1)^2\pi^2} < \xi^2 < \frac{\hat{\omega}^2 - (2n - 1)^4\pi^4}{(2n - 1)^2\pi^2} \quad (9)$$

在已知索力求频率时,可以采用式(8)确定的求解区间进行求解,  $\omega$  为结构的圆频率;索力求解则是在式(9)的求解区间内,先求解  $\xi^2$  的区间,然后由下式计算出索力的区间

$$H = \xi^2 EI / L^2 \quad (10)$$

注意到式(6)中的  $\hat{\alpha} > 0, \hat{\beta} > 0, \tanh(\hat{\beta}/2) > 0$ , 若式(6)存在零根,则必须要求  $\tan(\hat{\alpha}/2) > 0$ , 这样求解区间可以进一步缩小为

$$n\pi < \hat{\alpha}/2 < n\pi + \pi/2 \quad (11)$$

然后再通过如上方法确定  $\omega$  或  $H$  的缩小后的区间。

#### 2) 对称模态情况

由式 5(b), 左端  $F(\omega, H, \theta)$  中的  $\cot(\hat{\alpha}/2)$  存在周期间断点,求解区间可由该系列间断点来确定,即  $n\pi < \hat{\alpha}/2 < (n+1)\pi, n=0, 1, 2, \dots$ , 通过求解不等式可以确定  $\omega$  和  $\xi^2$  的取值范围

$$\frac{2n\pi\sqrt{\frac{(2n)^2\pi^2EI + HL^2}{m}}}{L^2} < \omega < \frac{2(n+1)\pi\sqrt{\frac{(2(n+1))^2\pi^2EI + HL^2}{m}}}{L^2} \quad (12)$$

$$\frac{\hat{\omega}^2 - (2(n+1))^4\pi^4}{(2(n+1))^2\pi^2} < \xi^2 < \frac{\hat{\omega}^2 - (2n)^4\pi^4}{(2n)^2\pi^2} \quad (13)$$

然后可以采用与反对称模态情况相同的方法求  $H$  的求解区间。

### 2.3 数值求解方法的选取

常用的方程数值求根方法有 NR(Newton-Raphson)法、二分法、黄金分割法、两点法、动点迭代法和不动点迭代法等。牛顿法具有很快的搜索速度,但是不适用于跨间断区间的求解,容易导致求解区间的穿插,导致求出的根不是该方程相应区间的解,采用牛顿法还需要满足收敛充分条件,否则有可能导致迭代值远离所求根的情况或死循环的情况。区间求解方法有二分法、黄金分割法及两点法等,只要函数在两区间端点处异号,它们都可以给出方程的在该区间至少一个根。二分法的搜索速度较慢,黄金分割法较二分法快,但也存在着同样的问题,两点法具有相对较快的收敛速度。

根据频率方程的特点,应选择收敛速度快且求解正确的方法。式(5)、式(6)方程中周期函数项的存在,使得二式左端函数值周期性穿越零轴,因此方程存在多个根。一般情况下,每个求解区间只有一个零根,特殊情形下,可能存在两个或更多零根。因此,与文献[7]不同的是,文中采用区间求解法(Matlab 的 fzero 函数)和 NR 法相结合来进行拉索

频率方程的求解。

对于单个求解区间内出现多个零根的情况,需要进行更进一步的甄别判断,找出真正的方程解。对于求索力问题,无论是采用哪一阶频率,求得的索力应该是相等的。因此,可以利用这一原理进行筛选,即选择与其他求解区间的单个零根最接近的根作为方程的根。

### 3 索力、索频识别误差及其经验修正

利用上面建立的频率方程数值解法,可以方便地实现已知拉索振动频率条件下的索力识别和已知索力下的拉索振动频率计算。文中方法比张紧弦显式频率方程得到的索力、索频公式更接近拉索实际状况,因此识别精度更高。尽管如此,文中基于隐式频率方程的索力、索频识别法仍然存在较大误差。相比而言,只要将拉索单元的数目划分得足够多,用有限元法得到的索力、索频就足够接近真实值。因此,可以假设拉索有限元法计算出的频率为实际结构的频率,用来研究文中方法的误差规律。

频率误差  $E_{rr}(f_n)$  定义为其他方法求得的频率相对于有限元程序的相对误差,即

$$E_{rr}(f_n) = \frac{f_n - f_n^{FE}}{f_n^{FE}} \quad (14)$$

其中:基准频率  $f_n^{FE}$  为无外加阻尼装置且边界为刚接条件下索的第  $n$  阶模态频率;  $f_n$  为其他方法计算的索的第  $n$  阶频率。

索力误差  $E_{rr}(T)$  的定义为识别的索力  $T_{id}$  与有限元模型设定索力  $T_{de}$  的相对误差

$$E_{rr}(T) = \frac{T_{id} - T_{de}}{T_{de}} \quad (15)$$

通过对不同拉索技术参数下隐式频率方程的数值法识别拉索索力进行数值仿真计算,研究索力误差与  $\lambda^2$  和  $\xi$  的关系(图2、图3)。仿真计算时,为了取得  $\lambda^2$  和  $\xi$  的合理取值范围,特以拉索参数(包括  $T_{de}$ )的工程取值范围的上限为界,在此范围内对其取值进行遍历,并保持各参数独立取值。每步仿真对应一组参数组合,先利用有限元计算准确的前7阶拉索频率,然后将这些频率作为输入,用数值法识别索力  $T_{id}$ ,利用式(14,15)计算索力误差,研究其与拉索参数  $\lambda^2$  和  $\xi$  的关系。

#### 1) 索力误差与 $\lambda^2$ 的关系

由图2可见,  $\lambda^2$  存在临界值42,该值确定了频率方程数值法的适用范围。当  $\lambda^2 < 42$  时,索力识别误差在5%~7%以内(比真实索力偏大),误差与

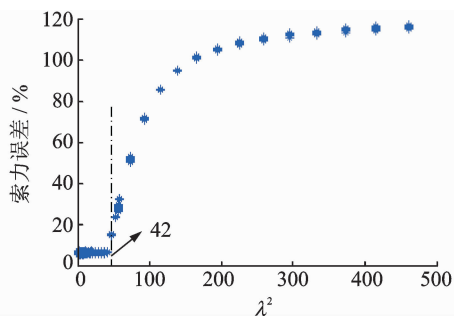


图2 索力误差与  $\lambda^2$  的关系

Fig. 2 Relationship between error of cable force and  $\lambda^2$

$\lambda^2$  无明显关系;  $\lambda^2 > 42$  时,误差从7%突然增大。这可以解释为,  $\lambda^2 > 42$  时拉索垂度影响变大,使得拉索不再满足拉索垂跨比小于1/8的假设,隐式频率方程已经不能反映拉索的真实受力情况。所幸的是,桥梁工程常用拉索的  $\lambda^2$  值通常都小于临界值42,因此文中给出的索力识别方法可以应用到斜拉桥的拉索索力识别中去。

#### 2) 索力误差与 $\xi$ 的关系

现针对实际桥梁工程的拉索情况 ( $\lambda^2 < 42$ ), 讨论索力误差与  $\xi$  的关系。由图3可见,无论采用基频,还是从2阶到7阶的模态频率识别索力,其索力误差与  $\xi$  值均存在着很好的近似指数函数关系。在  $0 < \xi < 200$  时,随着拉索  $\xi$  值的增加,索力误差从14%迅速下降至7%,当  $\xi > 300$  时,误差下降速度趋于平缓,误差值趋近5%。

用下式拟合索力误差与  $\xi$  的关系

$$E_{rr i} = a_i \xi^{b_i} + c_i \quad (16)$$

其中:下标  $i$  表示采用的索频阶数;  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  为采用第  $i$  阶索频是索力误差与  $\xi$  的拟合关系式的系数,其拟合值见表1。

各阶拟合曲线见图4。从图4和表1可见,采用2~7阶识别索力时,误差与  $\xi$  的关系式基本重合,而采用基频时,误差与  $\xi$  的关系式偏大。这就意味着,相同索条件下,用基频识别索力的误差稍大,而使用从2~7阶频率,误差近似相等。因此,只需用两个拟合公式,就可以实现索力的修正。表1的最后一栏给出了适于2~7阶的  $E_{rr} - \xi$  拟合公式,图4中也给出了适于2~7阶的索力误差综合修正曲线。

此时,由于所有识别结果较拉索真实索力都偏大,因此可以用上述拟合公式对隐式频率方程数值索力识别结果进行修正。修正后的索力由下式给出

$$H_{mo} = H_{id} \cdot (1 - E_{rr i}) \quad (17)$$

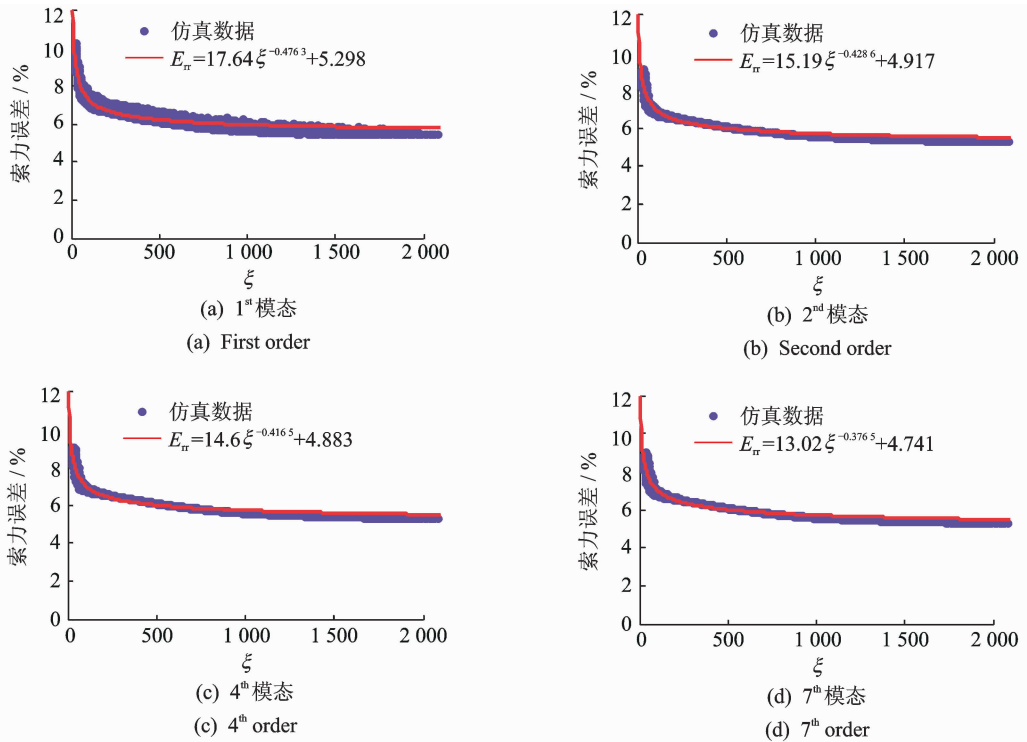


图 3 索力误差与  $\xi$  的关系

Fig. 3 Relationship between error of cable force and  $\xi$

表 1 隐式频率方程数值索力识别误差拟合系数

Tab. 1 Fitness coefficients of error- $\xi$  relationship in expression 16

系数	基频	2	3	4	5	6	7	2~7 综合
$a_i$	17.64	15.19	15.31	14.66	13.6	13.45	13.02	14.205
$b_i$	-0.476 3	-0.428 6	-0.429 6	-0.416 5	-0.394 3	-0.389 3	-0.376 5	-0.405 8
$c_i$	5.298	4.917	4.926	4.883	4.817	4.795	4.741	4.846 5

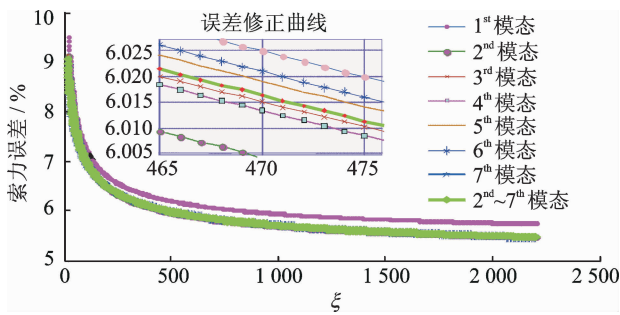


图 4 前 7 阶索力误差与  $\xi$  的拟合关系式

Fig. 4 Relationship between  $\xi$  and error of cable force id. by first 7 order frequencies

### 4 工程应用

为了说明笔者方法的有效性,特对上海长江大桥 B01 和 B17 号拉索进行了基于隐式频率方程的数值法(以下简称数值法, Numerical)的索力识别计算和频率求解。同时还进行了有限元方法(FEM)、张紧弦显式振动频率公式(简称显式公式法, Ex-

plicit formula)的计算。该二索的物理常数在表 2 给出。采用考虑几何刚度的三维梁单元进行有限元拉索建模,单元数目为 100(对前 20 阶模态参数而言,这个有限单元数目划分已经非常精确,可以近似为拉索真实模态频率)。

#### 1) 已知索力求频率

由图 5(a, c)可知,采用数值法的拉索频率求解结果比振动频率公式法更接近有限元程序计算结果。除基频外的前 20 阶频率,由振动频率公式法求解的上海长江大桥 B01 号拉索的各阶频率误差在 4.2%~4.6%之间,数值法求解的相对误差只有 2.6%~3.1%,二者相差 1.5%。上海长江大桥 B17 号拉索二者的频率误差差值也有 0.8%。对于基频,振动频率公式法得到频率误差比其他阶频率误差大一倍,而数值法则相对小得多,只有 2%~3%。由图 5(c, d)可见,文中讨论的数值法求得的频率均比有限元法小,因此,只要对误差的大小进行估计后,就可以对数值法得到频率进行修正。



表2 上海长江大桥拉索基本参数

Tab. 2 Cable parameters for Shanghai Changjiang Bridge

拉索	索长/m	弹性模量/Pa	截面积/m <sup>2</sup>	截面惯性矩/m <sup>4</sup>	线密度/(g·m <sup>-1</sup> )	索力/kN
B01号	97.6	2×10 <sup>11</sup>	1.002 9×10 <sup>-2</sup>	8.003 6×10 <sup>-6</sup>	79.15	3×10 <sup>3</sup> (倾角 70°)
B17号	300	2×10 <sup>11</sup>	1.227 2×10 <sup>-2</sup>	1.198 4×10 <sup>-5</sup>	96.85	5.46×10 <sup>3</sup> (倾角 28°)

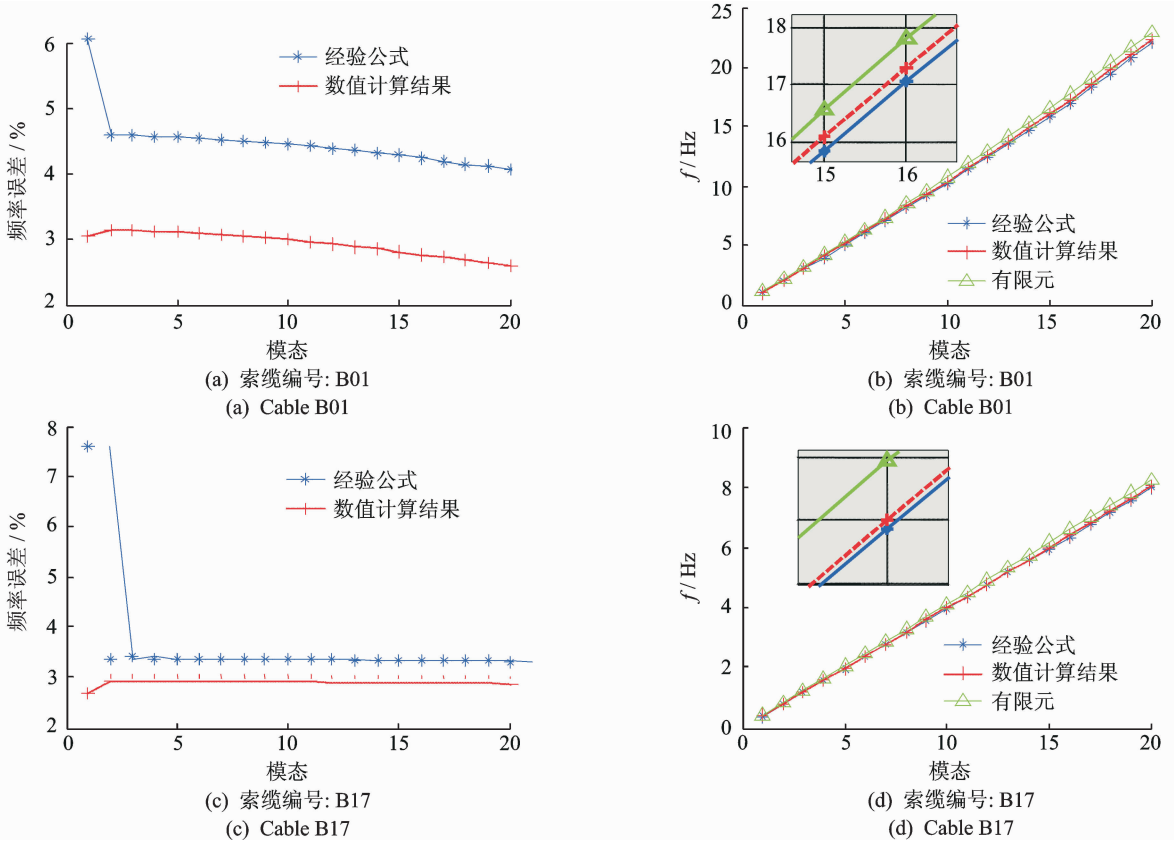


图5 上海长江大桥 B01 和 B17 号拉索的频率计算值及其相对误差

Fig. 5 Frequency result and its errors for cable B01 and cable B17 for Shanghai Changjiang bridge

## 2) 已知频率求索力

由图 6(a, b)可知,数值法的索力测量精度明显比振动频率法高。采用除基频以外各阶频率估计索力时,对于受垂度影响小的短索,数值法的索力测量精度比振动频率法可提高 3%~5%,而对于 300 m 的长索,数值方法相对于振动频率法仍可提高 1% 的索力测量精度。采用基频时,无论长索短索,数值方法均大大提高精度,误差降低了 5%~10%,长索(B17)误差降低的幅度比短索(B01)大。可见数值

法的索力测量考虑了垂度的影响,得到的索力精度高。研究还发现,数值法得到索力均在真实索力偏大一侧,因此,可以利用文中给出修正方法对误差予以修正。

利用式(17)修正后的上海长江大桥 B01 和 B17 号拉索索力及误差在表 3 中给出。

由表中可见,经由式(17)修正后,数值法得到索力识别结果得到了更大程度上的提高,误差可以控制在 1.5% 以内。

表3 修正后数值法的实索识别结果

Tab. 3 The cable force identified by using correction relationship

参数	基频	2	3	4	5	6	7	2~6 复合
B01 设定索力/N	3×10 <sup>6</sup>							
B01 识别索力/N	3.004	2.998	2.998	2.998	2.998	2.997	2.997	2.998
B01 索力误差/%	0.14	-0.08	-0.08	-0.08	-0.08	-0.09	-0.09	-0.09
B17 设定索力/N	5.46×10 <sup>6</sup>							
B17 识别索力/N	5.532	5.468	5.469	5.469	5.469	5.468	5.468	5.468
B17 索力误差/%	1.31	0.14	0.17	0.16	0.16	0.15	0.16	0.13

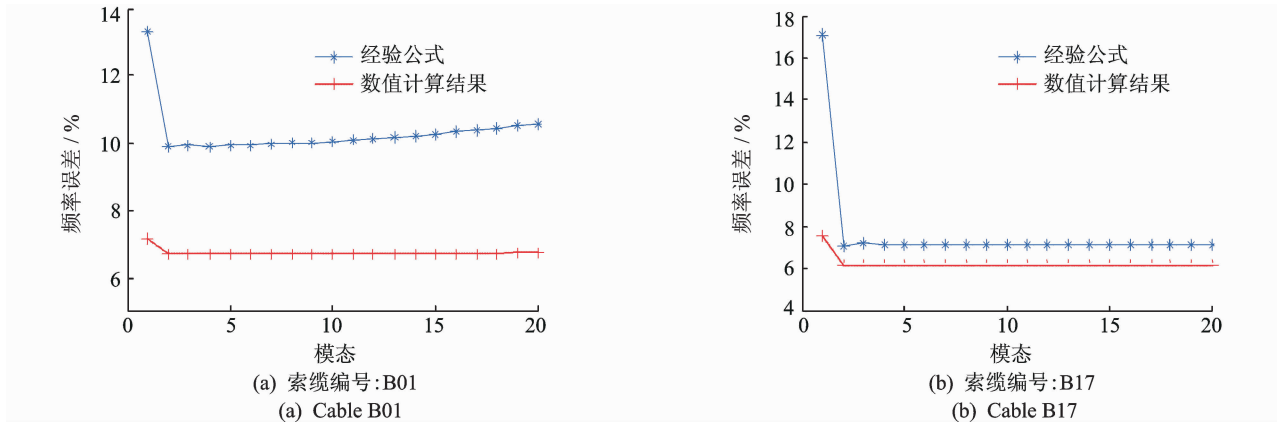


图 6 上海长江大桥 B01 号和 B17 号拉索索力误差

Fig. 6 Cable force identification error for cable B01 and cable B17 for Shanghai Changjiang bridge

## 5 结束语

同时考虑拉索垂度、抗弯刚度、边界条件时,拉索的频率方程是一个复杂的超越方程,不能显式给出根的解答。研究表明,用数值方法可以将隐式的拉索频率方程显式化,进而方便地给出了频率、索力的解答。和适于张紧弦的频率公式法相比,基于拉索隐式频率方程的数值法可以有效地提高索频、索力估计精度,对数值法进行修正后,可以进一步提高索力的识别精度。

工程实例表明,对索频计算,采用数值法的拉索频率求解结果较振动频率显式公式法更接近有限元程序计算结果,对各阶频率普遍提高 1.5%,对一阶频率的精度改善更为明显。对索力识别而言,受垂度影响小的短索,该方法相比显式公式(振动频率法),可以提高 3%的索力测量精度;对于长索,采用 2~7 阶频率,可以提高 1%的索力测量精度。垂度对基于基频的索力识别精度影响更大。

笔者给出的基于频率方程数值解的索力识别方法适于  $\lambda^2 < 42$  的情况,这对于桥梁工程上常用的拉索均是适用的,此时,采用拉索的 1~7 阶频率计算可以获得较好的索力测量精度。对于拉索  $\lambda^2 > 42$  的拉索,采用基频的索力测量精度更好。采用振动方程的数值法求解计算拉索索力时,较有限元模型修正方法能有效地节省计算机机时,可应用于索力的实时监测。

## 参 考 文 献

[1] Irvine H M. Cable structures[M]. New York: Dover Publications, 1991: 1-23.

[2] Byeong H K, Taehyo P, Hyunyang S, et al. A comparative study of the tension estimation methods for cable supported bridges [J]. Steel Structures, 2007, 7(1): 77-84.

[3] 刘文峰,应怀樵,柳春图. 考虑刚度及边界条件的索力精确求解[J]. 振动与冲击, 2003, 22(4): 12-14. Liu Wenfeng, Ying Huaiqiao, Liu Chuntu. Cable force resolution by consideration of stiffness and boundary condition[J]. Journal of Vibration and Shock, 2003, 22(4): 12-14. (in Chinese)

[4] Ren Weixin, Chen Gang, Hu Weihua. Empirical formulas to estimate cable tension by cable fundamental frequency[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2005, 20(3): 363-380.

[5] Byeong H K, Taehyo P. Estimation of cable tension force using the frequency-based system identification method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 304(3): 660-676.

[6] 张鹏. 基于粒子群算法的拉索智能模型修正及索力识别[D]. 上海: 同济大学, 2010: 12-14.

[7] Ricciardi G, Saitta F. A continuous vibration analysis model for cables with sag and bending stiffness[J]. Engineering Structures, 2008, 30(5): 1459-1472.

[8] Geier R, De Roeck G, Flesch R. Accurate cable force determination using ambient vibration measurements [J]. Structure and Infrastructure Engineering, 2006, 2(1): 43-52.



**第一作者简介:** 淡丹辉,男,1972年1月生,博士、副教授。主要研究方向为桥梁结构健康监测与振动控制。曾发表《结构动力有限元的模态阻尼比单元阻尼建模法》(《振动、测试与诊断》2008年第28卷第2期)等论文。  
E-mail: dandanhui@tongji.edu.cn