# 用形态梯度法与非负矩阵分解的齿轮故障诊断

李 兵1, 高 敏1, 张旭光2, 贾春宁3

(1. 军械工程学院四系 石家庄,050003) (2.63876部队 华阴,714200)(3. 总装备部驻上海地区军代表室 上海,201109)

**摘要** 振动信号处理与特征参数提取是实现齿轮智能故障诊断的关键。提出采用形态梯度算法对齿轮振动信号 进行处理,既可以抑制噪声又可充分突出故障信号的冲击特征,能够在强噪声背景下有效地提取振动信号中反映 齿轮工作状态的有用分量;在此基础上提出采用非负矩阵分解的特征提取方法对信号进行压缩,计算用于齿轮故 障诊断的特征参量。结果表明,与传统的信号处理与特征参量提取方法相比,笔者提出的方法能够具有更高的分 类精度,为准确判断齿轮工作状态提供了一种行之有效的新方法。

关键词 齿轮;故障诊断;特征提取;形态梯度;非负矩阵分解 中图分类号 TH165.3

# 引 言

振动是齿轮在传动过程中产生的必然现象,振动信号包含了丰富的齿轮状态信息。因此,振动信号分析法成为对齿轮进行状态监测和故障诊断最为 广泛和行之有效的方法之一<sup>[1-3]</sup>。齿轮振动信号处 理与特征参数提取是实现齿轮故障诊断的关键与核 心。近年来,小波分析、经验模态分解和统计特征参 数、分形维数、时间序列建模等信号处理与特征提取 方法已经在齿轮故障诊断中得到了广泛的应用<sup>[4-9]</sup>, 取得了较好的效果。

笔者在前期工作中研究了形态梯度解调方法在 齿轮信号处理中的应用<sup>[10]</sup>,结果表明,形态梯度解 调算子既可以抑制噪声又可充分突出故障信号的冲 击特征,具有很强的噪声抑制和脉冲提取能力,完全 不受低频分量的干扰,且计算简单、快速,是齿轮故 障信号处理的一种十分有效的方法。但经处理后的 信号空间维数仍然非常高,不能直接用来进行分类。 为节省存储空间,降低计算复杂度,避免"维数灾 难",必须对信号进行进一步的特征提取。

因此,笔者提出在采用形态梯度对信号进行处 理基础之上,进一步采用非负矩阵分解(non-negative matrix factorization,简称 NMF)技术对信号进 行压缩,计算用于齿轮故障诊断的特征参数集。采 用实测的齿轮在 5 种状态下的振动信号对文中提出 的信号处理与特征参数计算方法进行了验证,并与 传统的方法进行了对比。

# 1 形态梯度变换

#### 1.1 数学形态学基本变换

数学形态学的基本变换包括腐蚀、膨胀两种基 本算子,通常包括二值形态变换和灰值形态变换。

设 f(n)和 g(m)分别为定义在  $F = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 和  $G = \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ 上的离散函数,且 N $\gg$ M。这里 f(n)为输入信号,g(m)为结构元素。

f(n)关于 g(m)的腐蚀定义为

$$(f_{\Theta}g)(n) = \min_{m \in G} \{ f(n+m) - g(m) \}$$
(1)  
f(n)关于 g(m)的膨胀定义为

$$(f \oplus g)(n) = \max_{m \in G} \{f(n-m) + g(m)\} \quad (2)$$

#### 1.2 形态梯度变换

形态梯度(morphological gradient,简称 MG) 为信号 f(n)分别经过结构元素 g(m)膨胀和腐蚀后 的差分,其表达式为

 $GD(f) = f \bigoplus g(n) - f \Theta g(n)$ (3)

在图像处理中,MG常用来在图像中进行边沿 检测。如果某一点处的梯度值大,则表示在该点处 图像的明暗变化迅速,从而可能有边沿通过。

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51205405) 收稿日期:2013-06-23;修回日期:2013-08-08

在一维信号处理中,形态梯度算子可用来检测 加于稳态信号上的暂态信息,它同时考虑了信号的 正、负脉冲,是凸显脉冲信息的有力工具,因此可以 有效地检测出脉冲的位置,较好地保留脉冲的形状。 有关数学形态学和形态梯度更为详细地介绍以及形 态梯度在齿轮信号分析中的应用可以参考文献[10]。

# 2 非负矩阵分解

1999年,非负矩阵分解(non-negative matrix factorization,简称 NMF)算法是由 Lee 和 Seung<sup>[11]</sup> 在 Nature 上提出的一种新的特征提取方法。非负 矩阵分解的心理学和生理学构造依据是对整体的感 知由对组成整体的部分的感知构成的(纯加性的), 这也符合直观的理解:整体是由部分组成的,因此它 在某种意义上抓住了智能数据描述的本质。此外, 这种非负性的限制导致了相应描述在一定程度上的 稀疏性,稀疏性的表述已被证明是介于完全分布式 的描述和单一活跃分量的描述之间的一种有效数据 描述形式。非负矩阵分解算法实现简便,分解的结 果中不出现负值,而且具有可解释性和明确的物理 意义,以及占用存储空间少等优点,已经引起许多 科学家和研究人员的广泛重视。

#### 2.1 非负矩阵分解主要思想

非负矩阵分解的主要思想为:已知非负矩阵 V, 寻找适当的非负矩阵因子 W 和 H,使得给定数据向 量集合 V<sub>n×m</sub>为

$$\boldsymbol{V}_{n \times m} \approx \boldsymbol{W}_{n \times r} \boldsymbol{H}_{r \times m} \tag{4}$$

其中:n为数据样本的维数,m为集合中数据样本的 个数。

这个矩阵可以近似地分解为矩阵 $W_{n\times r}$ 和矩阵  $H_{r\times m}$ 的乘积。一般情况下,r的选择要满足(n + m)r < nm,从而W和H的维数都会小于原始矩阵 V,由此可实现对原始数据维数压缩。

#### 2.2 非负矩阵分解的算法实现

2001年,Lee 和 Seung 提出了简化的计算非负 矩阵分解的两种算法<sup>[12]</sup>。一种算法以最小化剩余 的 Frobenius-Norm 为目标函数,另一种算法则是 以最小化修正的 Kullback-Laebler 散度为目标函 数。笔者采用最小化修正的 Kullback-Laebler 散度 为目标函数,给定非负矩阵  $V_{n\times m}$ ,寻找矩阵  $W_{n\times r}$ 和 矩阵  $H_{r\times m}$ ,使得矩阵 V 和矩阵 WH 的 Kullback-Laebler 散度最小,因此非负矩阵分解算法可转化为 如下的带约束的优化问题  $\min D(V \parallel WH) =$ 

$$\sum_{ij} \left( \boldsymbol{V}_{ij} \log \frac{\boldsymbol{V}_{ij}}{(\boldsymbol{W}\boldsymbol{H})_{ij}} - \boldsymbol{V}_{ij} + (\boldsymbol{W}\boldsymbol{H})_{ij} \right)$$
$$(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{H} \ge 0)$$
(5)

Lee 和 Seung 等提出了采用乘性迭代规则对上述优化问题进行求解,为了消除尺度对于基矩阵的影响,对基矩阵 W 限制其 L-1 范数为 1。对应于式 (5)的乘性迭代规则为迭代公式如下所示

$$\boldsymbol{H}_{au} \leftarrow \boldsymbol{H}_{au} \frac{\sum_{i} \boldsymbol{W}_{ia} \boldsymbol{V}_{iu} / (\boldsymbol{W}\boldsymbol{H})_{iu}}{\sum_{k} \boldsymbol{W}_{ka}}$$
(6)

$$\boldsymbol{W}_{ia} \leftarrow \boldsymbol{W}_{ia} \frac{\sum_{u} \boldsymbol{H}_{au} \boldsymbol{V}_{iu} / (\boldsymbol{W}\boldsymbol{H})_{iu}}{\sum_{v} \boldsymbol{H}_{av}}$$
(7)

$$\boldsymbol{W}_{ia} = \boldsymbol{W}_{ia} / \sum_{i} \boldsymbol{W}_{ia}$$
(8)

由式(6)~式(7)可以看出,在上述算法的每一 步迭代过程中,W和H的新值可以通过其当前值与 一些因子的乘积来获得,式(8)保证了基矩阵的范数 为1。Lee和Seung对算法的迭代规则的收敛性进 行了证明,从理论上保证了算法的收敛性。

### 3 齿轮故障诊断

文中的齿轮故障信号来自于一个二级传动齿轮 箱,其结构如图 1 所示。齿轮箱由两对齿轮副组成, 齿数分别为 25,50 和 18,91,输入轴转速为 1 491 r/ min,加速度传感器安装在 3 个传动轴的 6 个轴承 座上方,如图 2 中  $S_1 \sim S_6$  所示,采样频率为 6 400 Hz,采样点数为 6 400。

模拟的齿轮局部故障为齿根裂纹和齿面磨损故障,故障设置在中间轴齿轮 B 和输出轴齿轮 D 上。因此,试验中采集了齿轮在 5 种状态下的振动信号,即正常,中间轴齿轮齿根裂纹,中间轴齿轮齿面磨损,输出轴齿轮齿根裂纹和输出轴齿轮齿面磨损。试验中每种状态下采集 20 个样本,共 100 个故障样本。

图 2 为齿轮在 5 种状态下的信号时域波形。



图 1 试验齿轮箱结构图 Fig. 1 Schematic of testing gear box





#### 3.1 齿轮故障信号的形态梯度处理

图 3 为采用长度为 40 的扁平结构元素对齿轮 信号进行形态梯度分析的结果,由图 3 可以看出,形 态梯度能够非常有效地将反映齿轮工作状态地冲击 特征信号提取出来,并大大降低了噪声干扰。

图 4 为图 3 所对应的频谱。由图 4 能够非常明 显地看出不同的故障部位所对应的特征频率,如中 间轴齿轮故障的特征频率 12 Hz 和输出轴齿轮故障 的特征频率 3 Hz。从图 4 中还可以发现,齿面磨损 故障引起的转频调制更加明显,而且频谱能量更高。

#### 3.2 基于非负矩阵分解的特征参数计算

由于齿轮故障信号在频域具有更好的区分性, 因此对形态梯度处理后的信号采用快速傅里叶变换



图 3 齿轮在 5 种状态下的振动信号的形态梯度处理结果

Fig. 3 Morphological gradient of vibration signals of gear under five states

技术将信号变换至频域,在频域选取 0~200 Hz 范 围作为分析范围,这样就得到一个 200×100 的样本 集。每类状态下选择 5 个样本作为训练样本,这样 可以得到训练样本集 X200×25。图 5 给出了用于训练 的 25 个数据样本,图中每一行代表一种齿轮状态, 从第 1 行至第 5 行分别为正常、中间轴齿轮齿根裂 纹、中间轴齿轮齿面磨损、输出轴齿轮齿根裂纹和输 出轴齿轮齿面磨损。

对 X 采用 NMF 技术进行分解,基向量秩 r 根据 PCA 分解结果定,由于前 20 个特征值的累积贡献率超过了 99%,因此选择 r=20。在训练过程中,首先采用 PCA 对 X 进行分解,取前 20 个特征值对应的特征向量的绝对值作为初始化的基矩阵 W,取X在W上的投影系数的绝对值作为初始化的系数





矩阵 H,训练中迭代次数设置为 200。

训练结束后就可以得到基向量矩阵 $W_{200\times 20}$ 和 编码矩阵 $H_{20\times 25}$ ,图 6 给出了由非负矩阵分解得到 的 20 个基向量,图 7 给出了由非负矩阵分解得到的 编码系数,即特征参数,图 7 中的 25 个数据与图 5 中 25 个样本为一一对应关系。

对训练样本来说,可用编码矩阵对其进行描述, 对于剩余的测试样本,可采用下式得到编码矩阵

$$\boldsymbol{H}_{\text{test}} = \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_{\text{test}} \tag{9}$$

由此可以得到描述齿轮故障信号的特征参数 集,将基于 MG 和 NMF 技术得到的特征参数集记 为 F<sub>MG\_NMF</sub>。

为证明提出的特征提取方法的有效性和优越性,本研究还采用广泛应用的小波分析和统计特征 来提取信号的特征,采用的统计特征参数包括4个 有量纲统计特征参数(均值、标准差、均方根和峰-峰





值)和 6 个无量纲特征参数(偏度、峭度、峰值指标、 脉冲指标、波形指标和裕度指标)。首先采用常用 的'db5'小波对信号进行 3 层分解,然后计算各层分 解系数的统计特征参数,共 40 个特征参量,将其记 为 *F*wav stat。

#### 3.3 齿轮故障分类

为验证结果的通用性,现采用3种常见的分类

器,即最近邻分类器(K nearest neighbor classifier, 简称 KNNC)、朴素贝叶斯分类器(naive Bayes classifier,简称 NBC)和支持向量机分类器(support vectro machine,简称 SVM)及前述的两个特征集对 5 类齿轮状态进行分类。

在分类试验中,每类状态下随机选择 10 个样本 作为训练样本,剩余的 10 个样本作为测试样本。为 保证结果的有效性,将此随机选择过程重复 50 次, 并将 50 次运算结果的平均值作为评价标准。 表 1 给出了各特征子集的分类精度。

表 1 各特征子集的齿轮故障诊断精度

Tab. 1	Gear fa	ult diagnosis	accuracy of	each f	eature subset	%
--------	---------	---------------	-------------	--------	---------------	---

竹仙丁米	KNNC	NBC	SVM
$F_{ m WAV\_STAT}$	80.24	86.51	88
${F}_{ m MG_NMF}$	98.87	95.41	98.67

由表1可以看出,在齿轮故障诊断中,文中所提 出的基于形态梯度和非负矩阵分解的特征子集取得 了比传统的统计特征参数更高的分类精度。

此外,形态学计算只涉及简单的加减运算,非负 矩阵分解技术采用乘性迭代规则也能够快速收敛, 因此笔者提出信号处理与特征提取方法的计算代价 可满足实际的工程需要。

# 4 结 论

 1)形态梯度能够最有效地保留信号中的冲击 特征信息同时抑制噪声;在齿轮故障信号中的应用 表明,形态梯度能够在强噪声背景下有效地提取齿 轮振动信号中能够反映齿轮工作状态的有用分量。

2)在形态梯度对齿轮故障信号处理的基础上, 采用非负矩阵分解技术对信号进行特征参数提取, 实际的故障诊断结果表明,与传统的信号处理与特征提取技术相比,文中提出的形态梯度与非负矩阵分解的特征子集具有更高的分类精度。

参考文献

- [1] Stander C J, Heyns P S, Schoombie W. Using vibration monitoring for local fault detection on gears operating under fluctuating load conditions[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2002, 16(6): 1005-1024.
- [2] Andrade F A, Esat I, Badi M N M. A new approach to time-domain vibration condition monitoring: Gear tooth fatigue crack detection and identification by the Kolmogorov-Smirnov test[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 240(5):909-919.
- [3] 余红英, 闫宏伟, 潘宏侠. 齿轮振动信号分解及其在故 障诊断中的应用[J]. 振动、测试与诊断, 2005, 25 (2):109-114.

Yu Hongying, Yan Hongwei, Pan Hongxi. Gear vibration signal analysis and its application to fault diagnosis[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2005, 25(2):109-114. (in Chinese)

[4] Lin J, Zuo M J. Gearbox fault diagnosis using adaptive wavelet filter[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003, 17(6):1259-1269.

- [5] Liu B, Riemenschneider S, Xu Y. Gearbox fault diagnosis using empirical mode decomposition and Hilbert spectrum[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(3):718-734.
- [6] Saravanan N, Ramachandran K I. Fault diagnosis of spur bevel gear box using discrete wavelet features and decision tree classification [J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(5):9564-9573.
- [7] Zhan Y M, Jardine A K S. Adaptive autoregressive modeling of non-stationary vibration signals under distinct gear states. part 1: modeling [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 286(3):429-450.
- [8] 李兵,张培林,米双山,等.齿轮故障信号多重分形维数 的形态学计算方法[J]. 振动、测试与诊断,2011,31 (4):450-454.

Li Bing, Zhang Peilin, Mi Shuangshan, et al. Mathematical morphology based on multifractal dimensions for gear fault diagnosis [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011,31(4):450-454. (in Chinese)

[9] 张德祥,汪萍,吴小培,等. 基于 EMD 和非线性峭度的 齿轮故障诊断[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32(1): 56-62.

Zhang Dexiang, Wang Ping, Wu Xiaopei, et al. Fault diagnosis of gear based on empirical mode decomposition and nonlinear kurtosis[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(1):56-62. (in Chinese)

[10] 李兵,张培林,刘东升,等. 基于形态梯度解调算子的 齿轮故障特征提取[J]. 振动、测试与诊断,2010,30 (1):29-34.

Li Bing, Zhang Peilin, Liu Dongsheng, et al. Feature extraction for gear fault diagnosis using morphological gradient demodulation [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010, 30(1):29-34. (in Chinese)

- [11] Lee D D, Seung H S. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization [J]. Nature, 1999, 401(6755):788-791.
- [12] Lee D D, Seung H S. Algorithms for non-negative matrix factorization [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2001, 2001(13):556-562.



**第一作者简介**:李兵,男,1982 年 9 月 生,博士、讲师,主要研究方向为信号处 理与模式识别,状态监测与故障诊断。 曾发表《An adaptive morphological gradient lifting wavelet for detecting bearing defects》(《Mechanical Systems and Signal Processing》2012, No. 5)等论文。 E-mail:rommandy@163.com