Duffing 振子与响应灵敏度结合的结构损伤检测方法*

刘　鎏[1]，　闫云聚[1]，　常晓通[1]，　袭著有[1,2]
(1. 西北工业大学力学与土木建筑学院　西安，710072)　(2. 辽宁工业大学理学院　锦州，121000)

摘要　阐述了 Holmes 型 Duffing 方程的混沌特性用于强噪声背景下弱信号检测的机理。针对强噪声背景下的结构损伤定位问题，提出了基于 Duffing 振子和响应灵敏度结合的结构损伤定位方法，仅通过一组特定的参数来实现对于噪声背景下响应信号的提取，避开了传统的 Duffing 振子参数选择的繁琐性，适用于更高的噪声水平，同等噪声水平下较传统的时域响应灵敏度方法计算量更小。将该方法用于强噪声背景下三维桥梁结构模型的损伤检测，结果表明，该方法在强噪声背景环境下能较好地实现损伤定位，为强噪声背景环境下的实际工程结构损伤识别提供了良好的思路。

关键词　Duffing 振子；响应灵敏度；动力响应；损伤定位
中图分类号　TB122；O322

引　言

混沌系统用于强噪声背景下的弱信号检测已成为当今科学研究的一大热点，近年来混沌理论已被广泛应用于各类分析信号的处理，取得了较好的效果。Hu 等[1]将 Duffing 振子用于旋转机械故障检测，成功识别出了强噪声背景下的转子碰摩故障信息。Wu 等[2]将 Duffing 振子应用于分析化学方面的研究，实现了强噪声背景下对于 X-射线衍射和拉曼光谱微弱信号的提取。Li 等[3]针对啮合频率组件对检测振荡器的影响提出了基于 Duffing 振子的逆向方法进行机械故障诊断。赖志慧等[4]提出的基于 Duffing 振子的变尺度微弱特征信号检测方法通过一组固定的参数实现了任意频率、任意相位特征信号的检测。现有的关于混沌理论信号检测的研究并未涉及到实际的工程结构损伤检测，因为还存在一个损伤精确定位的问题，如何从噪声环境下提取出信号信息到实现损伤的精确定位是当前面临的主要问题。

笔者将混沌理论用于强噪声背景下工程结构损伤检测，提出了基于 Duffing 振子与响应灵敏度结合的结构损伤检测方法，系统阐述了 Holmes 型 Duffing 方程的混沌特性用于强噪声背景下弱信号检测的机理。首先，引入时域响应灵敏度的概念并建立了三自由度桥梁结构模型的有限元动力学方程，利用直接积分法计算结构在外激励下的动态响应并附加强噪声干扰；然后，将混合信号输入至特定的 Holmes 型 Duffing 系统对特征信号进行细化处理；最后，将结构的局部损伤模拟为单元弹性模量的减少，求得响应信息对单元弹性模量的灵敏度，以此来对结构单元抗拉刚度进行修正，从而实现强背景噪声环境下结构的损伤定位问题。

1　Holmes 型 Duffing 振子的混沌检测特性

含噪情况下 Holmes 型 Duffing 振子系统具有以下表达形式

$$\eta\dot{x}+\ddot{x}=-\dot{V}(x)+f(t)+s(t)+n(t) \tag{1}$$

其中：$V(x)$ 为 Duffing 系统的势函数；η 为阻尼因子；$f(t)=A\cos t$，表示外场周期驱动力；$s(t)$为待测信号；$n(t)$表示均值为 0、方差为 1 的高斯白噪声。

式(1)表示存在噪声和激励情况下双稳势阱中布朗粒子的过阻尼运动。对于常见的双稳系统，其对应的势函数为

$$V(x)=-(a/2)x^2+(b/4)x^4 \tag{2}$$

其中：a 和 b 均为正常数，一般取 $a=b=1$。

式(1)与式(2)综合后有

$$\ddot{x}+\eta\dot{x}-x+x^3=A\cos t+s(t)+n(t) \tag{3}$$

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20126102130004)
收稿日期：2012-06-03；修回日期：2012-09-23

当外界对于系统的输入为0时，势函数有两个相同的势阱，阱底位于$\pm x_m$，$x_m=(a/b)^{(1/2)}$，势垒高度$\Delta V=a^2/(4b)$，布朗粒子将停留在两势阱中的任意一个，此时系统处于稳定状态。图1表示系统输入为0时势函数$V(x)$和x的关系。

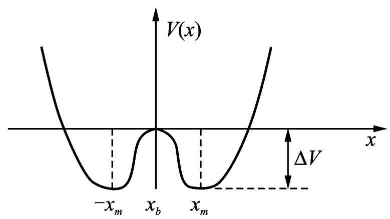


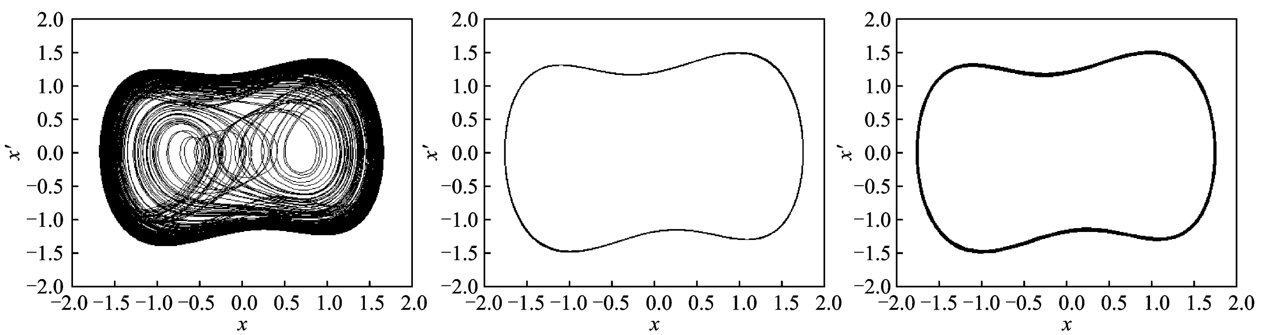
图1 双势阱系统势图

Fig.1 Double-well potential diagram system

当外界对于系统的输入不为0时，整个系统的平衡会被打破，势阱会在x的驱动下发生倾斜，即势阱高度会相应地升高或降低。当输入达到适当值时，势垒高度ΔV就会达到最小值，同时弱信号在噪声的帮助下很容易在两稳定点间转换位置，从而系统由混沌状态转换为大尺度周期状态，这时，从噪声背景下检测弱信号就变得可能。

形象地说，混沌系统的特点在于系统参数的微小扰动会导致系统状态发生改变，这种状态改变的同时伴随着系统对于噪声背景的强免疫力。因此，Duffing系统的状态转换由各参数条件共同决定，这些参数包括阻尼因子η、外加周期驱动信号的频率ω及幅值A、所选算法及初值。以往研究表明，混沌系统由混沌状态向大尺度周期状态发生转换时存在一个系统临界幅值A_c，只有当系统外加周期驱动幅值达到临界值时混沌系统才能由混沌状态向大尺度周期状态发生转换。例如，在式(3)中取定参数$\eta=0.5$，初值$x(0)=x'(0)=0$，$s(t)=0.01\sin t$，采用四阶Runge-Kutta算法进行计算。无外在噪声干扰下，当驱动幅值$A=0.825$时，系统处于混沌状态，如图2(a)所示；当$A=0.826$时，系统处于大尺度周期状态，如图2(b)所示；保持其他参数不变，取$A=0.826$，考虑噪声强度为0.05的高斯白噪声$n(t)$，系统仍处于大尺度周期状态，如图2(c)所示。

由此可见，当选定以上参数时，系统的临界幅值$A_c=0.826$，此时无论存在噪声与否，都能从相轨迹图中识别出待测信号$s(t)$，这就是基于Holmes型Duffing振子的混沌检测机理。



(a) 混沌状态 (A=0.825, D=0) (a) Chaos state (A=0.825, D=0)

(b) 大尺度周期状态 (A=0.826, D=0) (b) Large-scale periodic state (A=0.826, D=0)

(c) 大尺度周期状态 (A=0.826, D=0.05) (c) Large-scale periodic state (A=0.826, D=0.05)

图2 相轨迹图

Fig.2 Phase trajectories

2 基于响应灵敏度的结构损伤检测法

灵敏度分析法就是利用测量参数(响应)对结构参数(刚度、质量等)的偏导数来计算物理参数的变化，从而进行模型修正的方法。笔者主要采用基于时域响应的灵敏度方法[5-6]。对于一般的线弹性时不变结构的有限元模型，其动力方程可表示如下

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{F}(t) \tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{K}$分别为结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵；$\boldsymbol{d}$为位移向量；$\boldsymbol{F}(t)$为节点激振力向量。

本研究采用瑞利阻尼模型[7]，即$\boldsymbol{C}=a_1\boldsymbol{M}+a_2\boldsymbol{K}$，其中：$a_1$，$a_2$为常数，由给定的两个不等的模态频率$\omega_i$，$\omega_j$与相应的阻尼比$\xi_i$，$\xi_j$来确定。

2.1 响应灵敏度矩阵

基于响应灵敏度的结构损伤检测的关键在于灵敏度矩阵的获得，笔者以结构响应对于单元弹性模量的偏导数作为灵敏度指标。首先，通过Newmark直接积分法计算结构的动态响应；然后，将式(4)的两边对第i个单元的弹性模量求偏导数，$\boldsymbol{C}=a_1\boldsymbol{M}+a_2\boldsymbol{K}$，且$\boldsymbol{K}$为弹性模量的函数。移项整理后有

$$\boldsymbol{M}\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{d}}}{\partial E^i}+\boldsymbol{C}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{d}}}{\partial E^i}+\boldsymbol{K}\frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial E^i}=-\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial E^i}\boldsymbol{d}-a_2\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial E^i}\dot{\boldsymbol{d}}$$

$$(i=1,2,\cdots,N) \tag{5}$$

其中：N 为有限元模型单元数。

由于结构的动态响应已经计算得出，将此响应代入式(5)再由 Newmark 法进一步得出响应灵敏度矩阵。响应灵敏度具有以下形式

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\frac{\partial R^i(t_1)}{\partial E_1} & \frac{\partial R^i(t_1)}{\partial E_2} & \frac{\partial R^i(t_1)}{\partial E_3} & \cdots & \frac{\partial R^i(t_1)}{\partial E_N}\\ \frac{\partial R^i(t_2)}{\partial E_1} & \frac{\partial R^i(t_2)}{\partial E_2} & \frac{\partial R^i(t_2)}{\partial E_3} & \cdots & \frac{\partial R^i(t_2)}{\partial E_N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial R^i(t_f)}{\partial E_1} & \frac{\partial R^i(t_f)}{\partial E_2} & \frac{\partial R^i(t_f)}{\partial E_3} & \cdots & \frac{\partial R^i(t_f)}{\partial E_N}\end{bmatrix} \tag{6}$$

对于单自由度结构体系，$\partial R^i(t_h)/\partial E_l$ 表示 t_h 时刻第 i 个单元的响应对于第 l 单元弹性模量的偏导数，$i=1,2,\cdots,N$，$l=1,2,\cdots,N$，N 为划分的有限单元数。对于多自由度结构体系，$\partial R^i(t_h)/\partial E_l$ 则表示 t_h 时刻第 i 个单元的某一响应分量对于第 l 单元弹性模量的偏导数。

2.2　结构损伤参数的识别

结构损伤识别问题可以表达为：寻找弹性模量向量 $\boldsymbol{E}$，使得计算出来的假设损伤结构响应(本研究使用加速度响应)与测量的实际损伤结构响应的残差最小化，即

$$\delta\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_{\mathrm{cal}} \tag{7}$$

其中：$\boldsymbol{R}$ 为模拟的测量响应(实际损伤结构响应)；$\boldsymbol{R}_{\mathrm{cal}}$ 为假设损伤结构的计算响应。

结构损伤的识别方程可以表示为

$$\delta\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{E} \tag{8}$$

其中：$\boldsymbol{S}$ 为灵敏度矩阵。

弹性模量增量向量 $\delta\boldsymbol{E}$ 由 Tikhonov 正则化方法[8]获得，对于离散不适定性问题，一般形式的 Tikhonov 正则化后就得到了正则极小化问题

$$\min\{\|\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{E}-\delta\boldsymbol{R}\|_2^2+\lambda^2\|\boldsymbol{I}\delta\boldsymbol{E}\|_2^2\}$$

$$(\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{R}^{f\times N};\quad \boldsymbol{I}\in\boldsymbol{R}^{N\times N}) \tag{9}$$

其中：正则化参数 λ 用来控制正则项 $\|\boldsymbol{I}\delta\boldsymbol{E}\|_2$ 的最小化和拟合项 $\|\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{E}-\delta\boldsymbol{R}\|_2$ 的最小化二者之间的相对权重；$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

式(9)等价于如下最小二乘问题

$$\min\left\|\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}\\ \lambda\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\delta\boldsymbol{E}-\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{R}\\ 0\end{bmatrix}\right\|_2 \tag{10}$$

式(10)的法方程为

$$(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}+\lambda^2\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I})\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{R} \tag{11}$$

直接得到正则化解的显式表达式为

$$\delta\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}+\lambda^2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{R} \tag{12}$$

修正后的弹性模量为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\delta\boldsymbol{E} \tag{13}$$

其中：$\boldsymbol{E}_0$ 为无损结构弹性模量向量。

3　基于 Duffing 振子和响应灵敏度方法结合的结构损伤定位方法

鉴于 Duffing 振子的混沌检测特性在强噪声背景下检测信号信息的能力以及响应灵敏度方法在结构损伤定位方面的优势，笔者提出了基于 Duffing 振子和响应灵敏度方法相结合的结构损伤定位方法。

由于工程中的信号往往是大信号，传统的 Duffing 振子系统只适用于小参数信号，这里采用基于 Duffing 振子的变尺度微弱特征信号检测[4]来实现强噪声下大参数信号检测。变尺度就是保持前文中 Duffing 系统参数不变，引入变尺度系数 P，使待测信号 $s(t)$ 在其时间轴上放大 P 倍，即 $t'=Pt$。然后令 $P=\omega$，ω 为待测信号频率，则待测信号转换为 $s(t')=a\sin(\omega t)=a\sin(\omega t'/P)=a\sin t'$，将此信号输入至 Duffing 系统就能检测出 $s(t')$ 的频率成分，这里通过对数值计算的步长进行尺度变换来实现频率的尺度变换。

基于 Duffing 振子和响应灵敏度方法相结合的结构损伤定位方法的具体步骤如下：

1) 由式(4)计算给定外激励作用下实际损伤结构的动态响应，并在响应中添加一定水平的随机噪声，作为模拟的测量响应；

2) 选定变尺度系数 P 等于外激振力频率，其余系统参数不变，将测量响应经尺度变换后输入至 Duffing 系统，经由四阶 Runge-Kutta 算法求解 Duffing 方程，此时系统即处于大尺度周期状态，可以得到与之相对应的系统输出；

3) 将此输出的频率进行尺度还原，采用余弦拟合的随机共振反演技术[9]对信号时域信息进行反演，将此时域响应作为真正的测量响应；

4) 由式(4)计算给定外激励作用下假设损伤结构的动态响应，并进一步由式(5)计算动态响应对单元弹性模量的灵敏度，形成灵敏度矩阵；

5) 通过式(8)计算测量响应与计算响应的差值 $\delta\boldsymbol{R}$；

6) 由式(12)计算弹性模量参数的增量 $\delta\boldsymbol{E}$，并

利用式(13)计算修正后的弹性模量参数 $\boldsymbol{E}$；

7) 重复步骤 4～6，直到前后两步的弹性模量的相对误差达到一个很小的容许值，即

$$\left\|\frac{\boldsymbol{E}_{k+1}-\boldsymbol{E}_k}{\boldsymbol{E}_{k+1}}\right\| \leqslant T \tag{14}$$

其中：k 为迭代步数；T 取为 10^{-6}。

基于 Duffing 振子和响应灵敏度方法相结合的结构损伤定位方法的具体流程如图 3 所示。

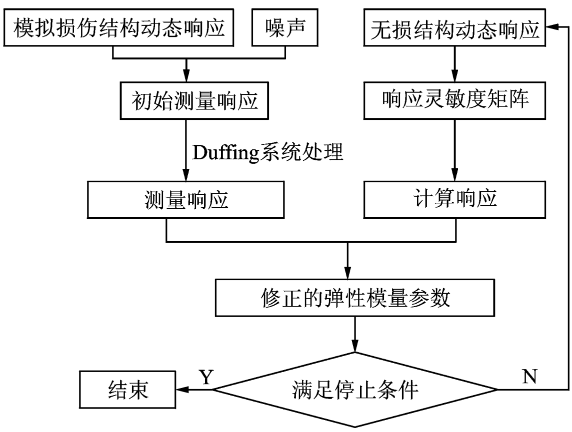


图 3　Duffing 振子和响应灵敏度法相结合的方法流程图

Fig. 3　Float chart of the combining method based on Duffing oscillator and response sensitivity method

4　算例分析

算例为一座两跨钢筋混凝土桥梁[10]，如图 4 所示。桥梁总长为 18.28 m，上部桥面结构宽为 2.28 m，高为 0.38 m，截面积为 0.866 4 m^2，下部结构排架墩高分别为 1.83，2.24，1.52m，材料弹性模量 $E=2.0\times10^{10}$ Pa，密度 $\rho=2\ 500$ kg/m^3。排架墩采用固结方式，桥面板两端附加质量块，用于模拟模型中未考虑的上部结构和两端桥墩的惯性力。

采用集中质量法，用刚架单元建立有限元模型，共划分为 15 个单元，考虑每个结点上 x，y，θ 三个方向的振动位移。单元、节点编号如图 5 所示。

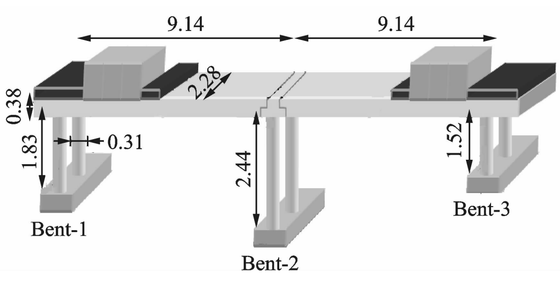


图 4　桥梁模型示意图(单位：m)

Fig. 4　Schematic bridge model (unit: m)

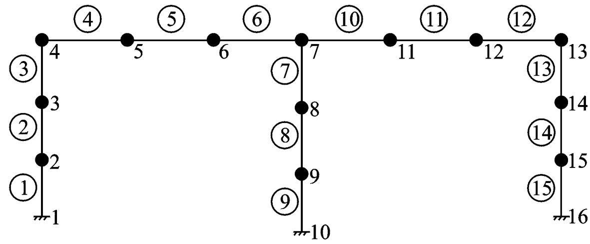


图 5　桥梁有限元模型

Fig. 5　Finite element model of the bridge

在节点 4 处施加一个横向简谐荷载 $f(t)$ 作为激励力，$f(t)=50\sin(20t)$，作用时间为 10 s，响应步长 $\mathrm{d}t=0.001$ s。响应信号取为加速度信号，模拟噪声采用符合高斯分布的白噪声[11]，各测点加入噪声后的加速度响应如下

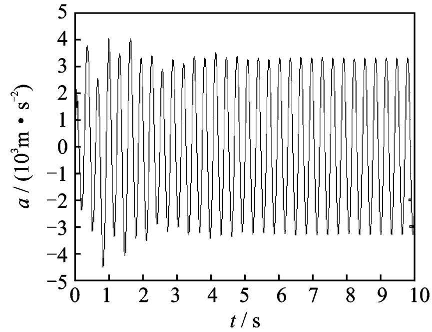
$$a_j^z=a_j+a_{j\max}SN \tag{15}$$

其中：a_j 和 a_j^z 分别为加噪声前后的加速度响应；S 为均值为 0、方差为 1 的高斯白噪声；N 为噪声信号强度水平。

工况 1　50％噪声水平下单一局部小损伤识别。首先研究强噪声环境下单一局部小损伤问题，在原始响应中添加 50％水平的强噪声干扰，并假定模型的第 5 号单元的弹性模量减少 5％来模拟局部损伤。损伤结构的第 4 号单元在激励作用下水平方向加速度响应(无噪声干扰和 50％水平噪声)如图 6 所示。

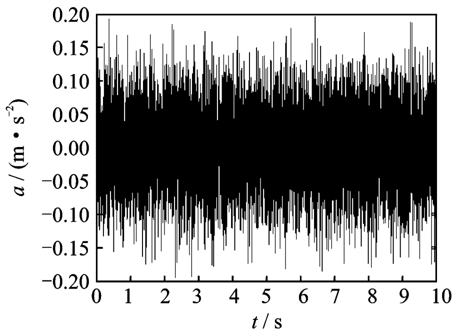
由图 6(a)可知，结构在简谐激励下其加速度响应亦为一简谐曲线，幅值为 0.003 m/s^2，周期为 0.314 s。然而在 50％水平噪声环境下单元响应则完全淹没于噪声环境中，如图 6(b)所示，阻碍了后续的结构损伤定位。下面将含噪响应输入至 Duffing 系统处理。Duffing 系统参数选择同上：阻尼因子 $\eta=0.5$，驱动力幅值 $A=0.826$，初值 $x(0)=x'(0)=0$，原始采样频率 $f_s=1$ kHz，计算步长 $\mathrm{d}t=0.001$ s，引入变尺度系数 $P=\omega=20$，即变尺度后数值计算步长 $\mathrm{d}t'=(\omega/f_s)=0.02$ s。采用四阶 Runge-Kutta 算法对式(3)进行计算，其中用含噪响应代替 $s(t)+n(t)$ 项，计算结果如图 7 所示。

图 7(a)所示为系统输出的相轨迹图，可见此时系统处于大尺度周期状态。由图 7(b)可知，输出明显存在频率 $f=0.067$ Hz 的信号成分，尺度还原有 $f_0=(f\times f_s)/P=3.183$ Hz，对应周期 $T=1/f=0.314$ s，这正是原始信号需要检测出的频率成分。由于双稳态系统布朗粒子越过势垒的能量积累需要时间，这样输出就不能很好地跟上信号的变化，从而



(a) 无噪声干扰下单元4加速度响应

(a) Acceleration response of element 4 without noise

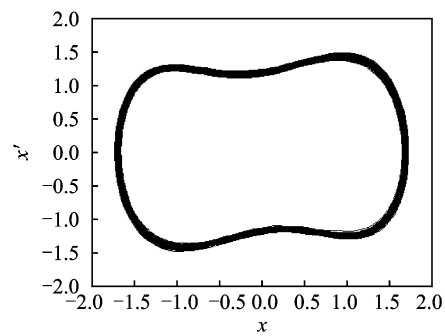


(b) 50%水平噪声下单元4加速度响应

(b) Acceleration response of element 4 with 50% noise level

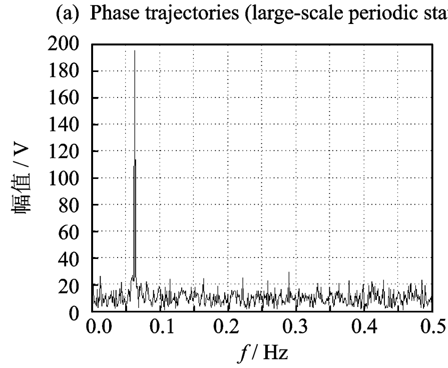
图 6　加噪前后单元 4 加速度响应

Fig. 6　Acceleration response of element 4 without and with noise



(a) 相轨迹图(大尺度周期状态)

(a) Phase trajectories (large-scale periodic state)



(b) 输出响应频域图

(b) Frequency domain of output

图 7　相轨图和输出响应频域图

Fig. 7　Phase trajectories and frequency domain of output

会产生严重的波形失真[12]，这里运用余弦拟合的随机共振反演技术[9]来对输出信号进行反演。因为经过 Duffing 系统处理后的输出响应具有较高的信噪比，以 f_0 来设计余弦曲线对系统输出进行拟合，得到时域响应如图 8 所示。

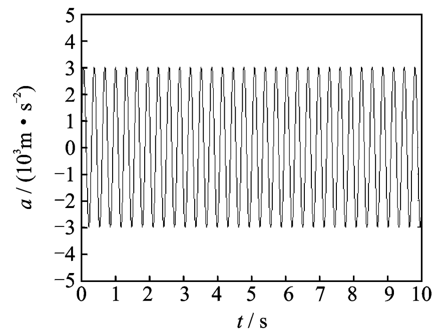


图 8　拟合后 Duffing 系统输出加速度响应

Fig. 8　Acceleration response after fitting

对比图 6 和图 8 可以发现，含噪输出响应经过 Duffing 系统处理后，其外部强噪声得到了较好的去除，这为进一步运用响应灵敏度方法进行损伤定位打下了良好的基础。

下面进行响应灵敏度分析，按照文中所提的算法步骤，取 4 号单元的横向加速度响应来进行损伤检测，经过 19 次迭代计算后结果如图 9 所示。由图 9可以看出，单元 5 上的局部损伤得到了很好的识别，其他单元上没有出现误判的情况，说明系统响应经过 Duffing 振子去噪处理后运用响应灵敏度方法能够很好地识别出强噪声环境下的结构局部损伤。

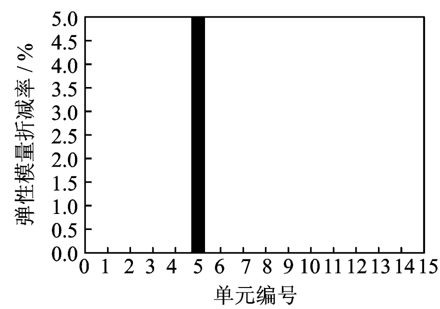


图 9　单一损伤识别(50％水平噪声)

Fig. 9　Single damage identification (50％ noise level)

工况 2　50％噪声干扰下多损伤的识别。此工况下进行强噪声环境的多损伤识别。在原始响应中添加 50％水平的强噪声干扰，假定杆的第 4，6 号单元的弹性模量分别减少 10％，5％来模拟局部损伤。取 4 号单元的横向加速度响应来进行损伤检测，同样将含噪输出响应经过 Duffing 系统处理，然后进行响应灵敏度计算，经过 21 次迭代后，识别结果如

图10所示。图10结果表明，第4,6号单元上存在的局部损伤得到了很好的识别，所存在的识别误差均比较小，最大误差不超过0.5%。

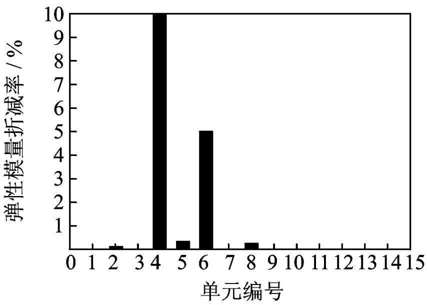


图10 多损伤识别(50%水平噪声)

Fig. 10 Multiple damage identification (50% noise level)

5 结 论

1）笔者提出了基于Duffing振子和响应灵敏度相结合的结构损伤检测方法用于强噪声背景下的结构损伤定位，该方法避开了传统的Duffing振子参数选择的繁琐性，仅用一组特定的参数实现了噪声背景下信号的提取，通过尺度变换，随机共振反演技术以及响应灵敏度分析实现了强噪声背景下工程结构损伤定位。

2）采用三维桥梁结构模型作为算例，避免了单自由度体系与实际工程结构的脱节性，表明了此方法用于工程结构损伤检测的适用性。

3）传统的基于时域响应灵敏度方法仅讨论了无外在噪声干扰和10%噪声水平干扰下的结构损伤定位问题，笔者通过运用基于Duffing振子和时域响应灵敏度相结合的方法实现了50%噪声水平下的结构损伤定位，数值算例表明该方法能够适用于更强的噪声背景，且同等噪声环境下运用Duffing振子系统处理后所需计算的迭代次数相应减少，节约了计算时间。

参 考 文 献

[1] Hu Niaoqing, Wen Xisen. The application of Duffing oscillator in characteristic signal detection of early fault[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 268: 91-93.

[2] Wu Xiaojing, Guo Weiming, Cai Wensheng, et al. A method based on stochastic resonance for the detection of weak analytical signal.[J]. Talanta, 2003, 61: 863-869.

[3] Li Chongsheng, Qu Liangsheng. Applications of chaotic oscillator in machinery fault diagnosis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21: 257-269.

[4] 赖志慧，冷永刚，孙建桥，等. 基于Duffing振子的变尺度微弱特征信号检测方法研究[J]. 物理学报，2012,61(5): 1-9.
Lai Zhihui, Leng Yonggang, Sun Jianqiao, et al. Weak characteristic signal detection based on scale transformation of Duffing oscillator[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(5): 1-9. (in Chinese)

[5] Lü Zhongrong, Law S S. Features of dynamic response sensitivity and its application in damage detection[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 303: 305-329.

[6] 杨秋伟，梁超锋. 环境激励下检测结构损伤的柔度灵敏度方法[J]. 振动、测试与诊断，2011,31(3):305-308.
Yang Weiqiu, Liang Chaofeng. A flexibility-based sensitivity approach for structural damage detection under ambient vibration[J]. Journal of Vibration, Mesurement & Diagnosis, 2011,31(3):305-308. (in Chinese)

[7] Bathe K J. Finite element procedures in engineering analysis[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1982: 36-38.

[8] Tikhonov A M. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization[J]. Soviet Mathematics, 1963, 4: 1035-1038.

[9] 谭继勇，陈雪峰，何正嘉. 采用余弦拟合的随机共振反演技术研究[J]. 西安交通大学学报，2010,44(1):41-45.
Tang Jiyong, Chen Xuefeng, He Zhengjia. Study of stochastic resonance recovery based on cosine fitting [J]. Journal of Xi 'an Jiaotong University, 2010,44(1): 41-45. (in Chinese)

[10] Soyoz S. Health monitoring of existing structure[D]. Irvine: University of California, 2007.

[11] 曹晖，林秀萍. 结构损伤识别中的噪声模拟[J]. 振动与冲击，2010,29(5):106-109.
Cao Hui, Lin Xiuping. Noise simulation in structural damage identification[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010,29(5): 106-109. (in Chinese)

[12] 李华锋，徐博侯. 随机共振系统输出的一种新的反演方法[J]. 力学学报，2003,35(2): 194-198.
Li Huafeng, Xu Bohou. A new method to recover the signals obtained by stochastic resonance[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(2):194-198. (in Chinese)

第一作者简介：刘鎏，男，1986年3月生，博士研究生。主要研究方向为结构损伤检测及弱信号处理。曾发表《随机共振与响应灵敏度相结合的结构损伤检测方法》(《西南交通大学学报》2013年第48卷第5期)等论文。
E-mail: aliu268@mail.nwpu.edu.cn