

# 基于扭摆振动的转动惯量识别方法\*

赵 岩<sup>1,2</sup>, 唐文彦<sup>1</sup>, 张晓琳<sup>1</sup>, 王 军<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院 哈尔滨, 150001) (2. 天津理工大学自动化学院 天津, 300384)

**摘要** 为了准确识别物体的转动惯量值, 考虑了非线性空气阻尼和非线性恢复力对转动惯量识别的影响, 建立了基于非线性动力学系统的扭摆振动模型, 提出了基于 Hilbert 变换的转动惯量识别方法。首先, 利用扭摆振动获得物体的角位移信号, 通过对角位移信号进行 Hilbert 变换计算角位移信号的包络信号和瞬时相位; 然后, 利用包络信号和瞬时相位计算扭摆振动的瞬时无阻尼固有频率; 最后, 根据瞬时无阻尼固有频率识别物体的转动惯量。通过气浮转台实现物体的扭摆振动, 利用基于 Hilbert 变换的算法识别试验样件的转动惯量。试验结果表明, 试验样件转动惯量估计值的相对误差小于 1%, 从而验证了该识别方法的有效性。

**关键词** 转动惯量; 非线性系统; 扭摆振动; Hilbert 变换

**中图分类号** TB123; TH11

## 引 言

转动惯量是表示刚体转动过程中惯性大小的物理量, 它与刚体的形状、质量分布和转轴位置有关。在装备制造领域, 转台的转动惯量是影响转台稳定性、定位精度和动态响应的关键因素之一<sup>[1-2]</sup>。在航天航空领域, 转动惯量影响飞行器的运行姿态和飞行稳定性, 转动惯量为飞行器的外形设计及优化提供了重要依据<sup>[3-4]</sup>。扭摆振动是指系统转轴发生扭曲的扭角摆动<sup>[5]</sup>。扭摆振动模型主要考虑 3 种因素: 物体的转动惯量、外部阻尼力和扭杆的恢复力。由于扭摆振动模型包含物体的转动惯量, 因此可以根据扭摆振动的特性识别物体转动惯量。当识别对象为外形复杂的大型物体时, 系统的空气阻尼力可以等效为非线性力<sup>[6]</sup>。当扭摆振动系统的扭杆为合金或复合材料时, 系统的恢复力可以等效为非线性力<sup>[7]</sup>。

非线性扭摆振动系统的特性不同于线性系统的特性。如果扭摆振动系统为线性系统, 那么物体的扭摆振动周期为固定值, 系统的固有频率为常数。在线性系统条件下, 利用物体的扭摆振动周期可以计算物体的转动惯量值。如果扭摆振动系统为非线性系统, 那么物体的扭摆振动周期可能会随着振幅发生变化, 即系统呈现出幅频特性。可见, 在非线性和

系统条件下, 可以利用扭摆振动的幅频特性识别物体的转动惯量。Feldman<sup>[8]</sup>提出了基于 Hilbert 变换的非线性振动系统参数识别方法, 利用位移信号的 Hilbert 变换构造解析信号, 再利用振动系统的瞬时无阻尼固有频率估计非线性振动系统的参数值。王丽丽等<sup>[9]</sup>利用时频滤波的方法给出了瞬时无阻尼固有频率与振动系统参数之间的确切关系。

笔者利用分析动力学的方法建立了基于非线性动力学系统的扭摆振动模型, 提出了基于 Hilbert 变换的转动惯量识别方法, 并利用仿真信号和试验信号验证了该识别方法的有效性。

## 1 基本原理

### 1.1 扭摆振动模型

图 1 为扭摆振动测量系统示意图。被测物体安装在转台上, 转台与扭杆相连。如果给扭杆施加一个初始角度, 则被测物体和转台会在扭杆恢复力的作用下, 以转轴为中心做自由扭摆振动。光栅位移传感器用来测量转台的弧线位移, 如果已知转台半径, 就可以得到相应的角位移信号。

笔者考虑了非线性阻尼和非线性恢复力对扭摆振动的影响, 利用分析动力学的原理建立了扭摆振动的微分方程

\* 哈尔滨工业大学科研创新基金资助项目(FEQQ5750008012)  
收稿日期: 2012-06-22; 修回日期: 2012-09-10

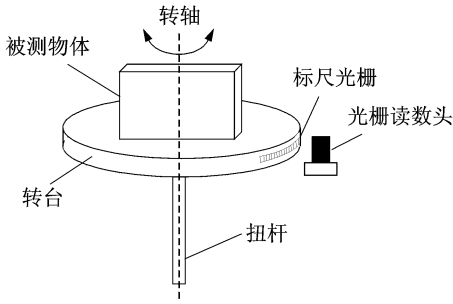


图1 扭摆振动测量系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram of torsion pendulum system

$$J\ddot{\theta} + C_1\dot{\theta} + C_2\dot{\theta}|\dot{\theta}| + K_1\theta + K_3\theta^3 = 0 \quad (1)$$

其中:  $J$  为被测物体和转台关于转轴的转动惯量;  $\theta$  为转台的角位移;  $C_1$  和  $C_2$  为阻尼力矩的系数;  $K_1$  和  $K_3$  为扭杆的刚度系数。

式(1)两边同时除以  $J$ , 得到转动惯量归一化的扭摆振动微分方程为

$$\ddot{\theta} + c_1\dot{\theta} + c_2\dot{\theta}|\dot{\theta}| + k_1\theta + k_3\theta^3 = 0 \quad (2)$$

其中:  $c_1 = \frac{C_1}{J}$ ;  $c_2 = \frac{C_2}{J}$ ;  $k_1 = \frac{K_1}{J}$ ;  $k_3 = \frac{K_3}{J}$ 。

## 1.2 基于 Hilbert 变换的转动惯量识别方法

假设角位移信号为  $\theta(t)$ , 则信号  $\theta(t)$  的 Hilbert 变换定义为

$$\tilde{\theta}(t) = H[\theta(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

利用 Hilbert 变换构造  $\theta(t)$  的解析信号为

$$\beta(t) = \theta(t) + j\tilde{\theta}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \quad (3)$$

其中:  $\varphi(t) = \arctan\left[\frac{\tilde{\theta}(t)}{\theta(t)}\right]$  为瞬时相位;  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  为瞬时角频率;  $A = \sqrt{\theta^2(t) + \tilde{\theta}^2(t)}$  为包络信号。

为了分析方便, 式(2)也可以表示为

$$\ddot{\theta} + 2h_0(t)\dot{\theta} + \omega_0^2(t)\theta = 0 \quad (4)$$

其中:  $h_0(t)$  为瞬时阻尼系数;  $\omega_0(t)$  为瞬时无阻尼固有频率。

假设  $h_0(t)$  和  $\omega_0(t)$  为低通信号,  $\theta(t)$  为高通信号, 且  $h_0(t)$ ,  $\omega_0(t)$  与  $\theta(t)$  的频谱在频带上不重合。

对式(4)的两边进行 Hilbert 变换, 并乘以  $j$ , 然后与式(4)相加得到

$$j\ddot{\beta} + 2h_0(t)j\dot{\beta} + \omega_0^2(t)\beta = 0 \quad (5)$$

把式(3)代入式(5), 经计算整理后可得

$$\beta \left[ \frac{\dot{A}}{A} - \omega^2 + \omega_0^2 + 2h_0 \frac{\dot{A}}{A} + j \left( 2 \frac{\dot{A}}{A} \omega + \dot{\omega} + 2h_0 \omega \right) \right] = 0$$

令上式的实部和虚部为零, 得到扭摆振动的瞬时无阻尼固有频率<sup>[8]</sup>为

$$\omega_0 = \left[ \omega^2 - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{2\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{A}\dot{\omega}}{A\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

根据文献[9]的结论, 瞬时无阻尼固有频率与式(2)的关系可以表示为

$$\omega_0(A) = \left[ \sum_{i=1}^m \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{i}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{i+1}{2} + 1)} k_i A^{i-1}(t) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

对瞬时无阻尼固有频率进行多项式拟合, 根据式(7)可以估计式(2)的参数值。当已知扭杆刚度系数  $K_1$  时, 根据公式  $J = K_1/k_1$  可以求出物体的转动惯量。

## 1.3 端点效应的抑制

由于 Hilbert 变换的数字计算方法涉及离散傅里叶变换, 因此在对有限长度的信号进行 Hilbert 变换时, 在时频谱图上会出现端点效应<sup>[10]</sup>, 从而影响系统参数的估计精度。为了减弱端点效应的影响, 需要对原始信号进行延拓再进行 Hilbert 变换。原始信号  $\theta(t)$  如图 2 中的实线所示, 点 A 和点 B 为原始信号的两个端点。原始信号的延拓方法如下。

- 1) 从信号  $\theta(t)$  的左边往右, 找到端点 A 的对称点 A'; 从  $\theta(t)$  的右边往左, 找到端点 B 的对称点 B'。
- 2) 提取 A' 点与 B' 点之间信号并左右翻转, 如图 2 虚线所示, 然后与端点 B 相连组成延拓信号。

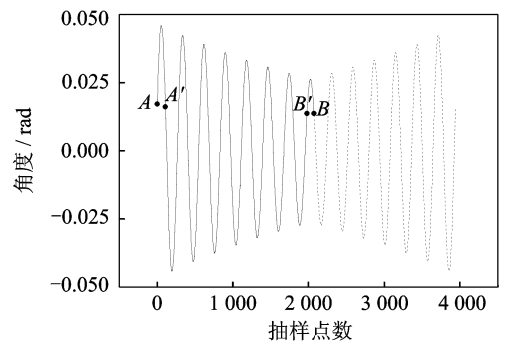


图2 信号的延拓

Fig. 2 Extension result of signal

## 2 数值仿真

为了验证基于 Hilbert 变换的转动惯量识别方法的正确性, 利用数值仿真对此算法进行了验证。假设归一化的扭摆振动方程为

$$\ddot{\theta} + 0.01\dot{\theta} + 0.1\dot{\theta}|\dot{\theta}| + 5\theta - 20\theta^3 = 0 \quad (8)$$

利用四阶 Runge-Kutta 法求解式(8), 得到角位移  $\theta(t)$  的仿真信号, 如图 3 所示。

首先, 对角位移信号  $\theta(t)$  进行延拓; 然后, 利用

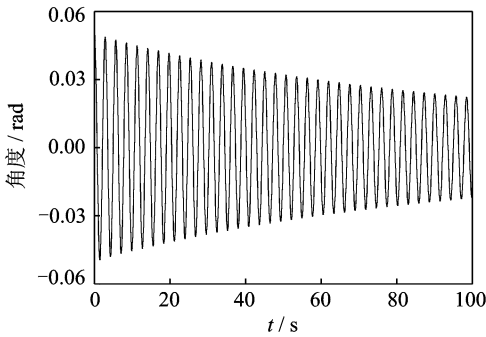


图 3 角位移仿真信号

Fig. 3 Simulation signal of angular displacement

Hilbert 变换构造角位移信号  $\theta(t)$  的解析信号, 求出相应的包络信号  $A(t)$  和瞬时角频率  $\omega(t)$ 。图 4 为由原始信号和延拓信号得到的包络信号。由于端点效应的影响, 由原始信号得到的包络信号的两端会出现很大的波动, 如图 4 中虚线所示。由延拓信号得到的包络信号波动较小, 如图 4 中实线所示。

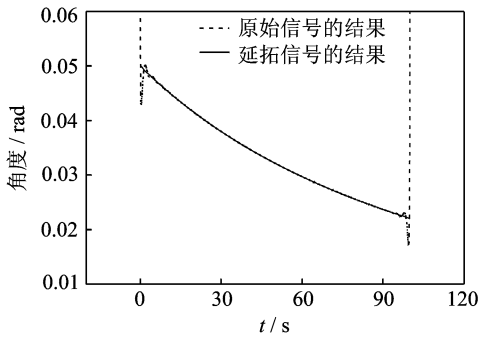


图 4 包络信号对比图

Fig. 4 Comparison of envelope signals

图 5 为由原始信号和延拓信号得到的瞬时无阻尼固有频率。由图 5 可知, 利用延拓信号得到的瞬时无阻尼固有频率的波动较小。

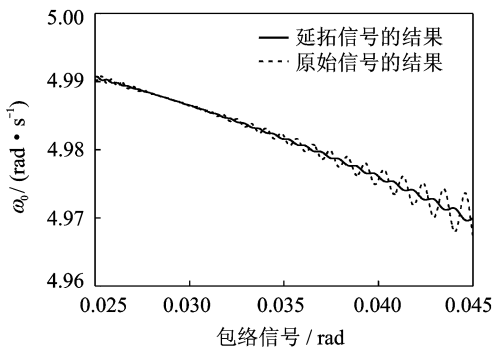


图 5 瞬时无阻尼固有频率的对比图

Fig. 5 Comparison of instantaneous undamped natural frequency

对图 5 中的特征曲线进行多项式拟合, 根据式 (7) 可以求出式 (2) 的参数值  $k_1$  和  $k_3$ , 如表 1 所示。由表 1 可知, 由延拓信号得到的参数估计值更加准确。如果已知扭杆刚度系数  $K_1$  的值, 那么根据公式  $J = K_1/k_1$  即可求出被测物体的转动惯量。

表 1 模型参数估计的仿真结果

Tab. 1 Simulation result of model parameters

参数	标准值	延拓信号的 原始信号的	
		估计结果	估计结果
$k_1/(\text{rad}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})$	5.000 0	5.000 1	4.986 0
$k_3/(\text{rad}^{-3} \cdot \text{s}^{-2})$	-20.000 0	-19.756 2	-22.688 3

### 3 试验验证

图 6 为基于气浮转台的扭摆振动系统。由于系统采用气浮转台, 因此避免了机械摩擦力对扭摆振动的影响。气浮转台的半径为 325 mm。扭摆振动的角位移信号可以由光栅位移传感器测量, 信号的采样频率为 300 Hz。两个相同的试验样件对称地放置在转轴的两侧, 从而防止转轴发生倾斜。试验样件的阻尼板可以增强空气阻尼的效果。通过理论计算, 两个试验样件关于转轴的转动惯量理论值为  $53.905 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。在空载条件下, 气浮转台的转动惯量为  $J_0 = 94.756 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。经过标准砝码标定, 扭杆的刚度系数为  $K_1 = 467.170 2 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ ,  $K_3 = -2 211.786 8 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}^3$ 。

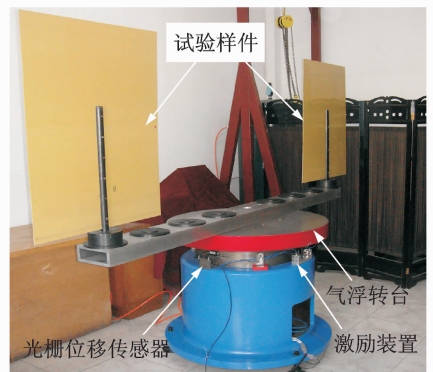


图 6 基于气浮转台的扭摆振动系统

Fig. 6 Torsion pendulum system based on air-hovered turntable

试验样件的角位移信号  $\theta(t)$  如图 7 所示。利用式 (6) 可以求出扭摆振动的瞬时无阻尼固有频率, 如图 8 所示。对图 8 中的曲线进行多项式拟合, 根据式 (7) 可以求出式 (2) 的参数值  $k_1 = 3.136 1 \text{ rad}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ 。由于已知刚度系数  $K_1$  和空载条件下的转动惯量

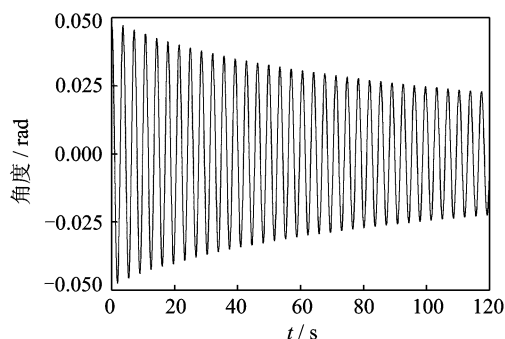


图7 角位移试验信号

Fig. 7 Experimental signal of angular displacement

$J_0$ ,那么两个试验样件关于转轴的转动惯量估计值为  $J = K_1/k_1 - J_0 = 54.2085 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 相对误差为 0.56%。

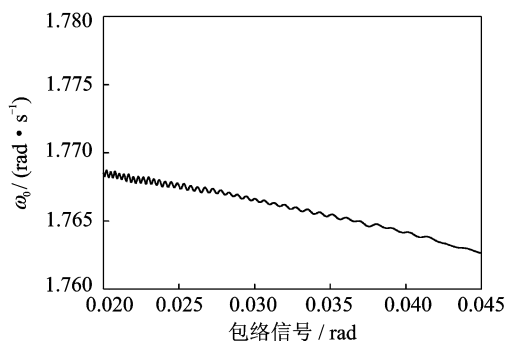


图8 瞬时无阻尼固有频率的试验结果

Fig. 8 Experimental result of instantaneous undamped natural frequency

## 4 结束语

笔者考虑了非线性阻尼和非线性刚度对扭摆振动的影响,建立了扭摆振动微分方程。利用 Hilbert 变换识别物体的转动惯量,利用数值仿真验证了转动惯量识别方法的正确性。最后,利用基于气浮转台的扭摆系统对试验样件的转动惯量进行识别,其转动惯量估计值的相对误差小于 1%,从而验证了该识别方法的有效性。

## 参 考 文 献

- [1] Andoh F. Moment of inertia identification using the time average of the product of torque reference input and motor position[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2007, 22(6): 2534-2542.
- [2] 于伟,马佳光,李锦英,等. 基于 LuGre 模型实现精密伺服转台摩擦参数辨识及补偿[J]. 光学精密工程, 2011, 19(11): 2736-2743.  
Yu Wei, Ma Jianguang, Li Jinying, et al. Friction pa-

rameter identification and friction compensation for precision servo turning table[J]. Optics and Precision Engineering, 2011, 19(11): 2736-2743. (in Chinese)

- [3] 张心明,王凌云,刘建河,等. 复摆法测量箭弹转动惯量和质偏及其误差分析[J]. 兵工学报, 2008, 29(4): 450-453.  
Zhang Xinming, Wang Lingyun, Liu Jianhe, et al. The measurement of inertia moment and centroidal deviation of rocket projectile with compound pendulum method and its error analysis[J]. Acta Armamentari, 2008, 29(4): 450-453. (in Chinese)
- [4] 杨云鹏,罗凯,汤浩,等. 大中型飞行器转动惯量测量系统的设计[J]. 机械与电子, 2011(6): 7-10.  
Yang Yunpeng, Luo Kai, Tang Hao, et al. Moment of inertia and medium-sized aircraft testing mechanism design[J]. Machinery & Electronics, 2011(6): 7-10. (in Chinese)
- [5] 孙萍,熊俊,曹慧贤,等. 扭摆振动实验[J]. 物理实验, 2006, 26(12): 3-7.  
Sun Ping, Xiong Jun, Cao Huixian, et al. Torsional pendulum experiment [J]. Physics Experimentation, 2006, 26 (12): 3-7. (in Chinese)
- [6] Jardin M R, Mueller E R. Optimized measurements of UAV mass moment of inertia with a bifilar pendulum [J]. Journal of Aircraft, 2009, 46(3): 763-775.
- [7] Tjahjowidodo T, Al-Bender F, Van Brussel H. Nonlinear modelling and identification of torsional behaviour in harmonic drives [C] // International Conference on Noise and Vibration Engineering. Leuven, Belgium: [s. n.], 2006: 2785-2796.
- [8] Feldman M. Non-linear free vibration identification via the Hilbert transform[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 208(3): 475-489.
- [9] Wang Lili, Zhang Jinghui, Wang Chao, et al. Time-frequency analysis of nonlinear systems: the skeleton linear model and the skeleton curves[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2003, 125(2): 170-177.
- [10] 王学敏,黄方林. EMD 端点效应抑制的一种实用方法 [J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32(3): 493-497.  
Wang Xuemin, Huang Fanglin. Practical method to restrain the end effect of EMD[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(3): 493-497. (in Chinese)



**第一作者简介:** 赵岩,男,1984年3月生,博士研究生。主要研究方向为物体惯性特性测试技术、非线性振动测试技术。曾发表《复杂形状物体转动惯量测量技术研究》(《航天制造技术》2011年第1期)等论文。

E-mail: hit\_eric@163.com