不同自由度耦合斜齿轮转子系统的振动特性*

马 辉[1,2]， 王奇斌[1]， 黄 婧[1]， 张义民[1]
（1. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳，110819） （2. 重庆大学机械传动国家重点实验室 重庆，400044）

摘要 以一个两对斜齿轮耦合的三平行轴转子系统为研究对象，考虑静态传递误差和齿轮几何偏心等因素的影响，建立了全自由度通用齿轮啮合动力学模型。将其与转子系统有限元模型进行耦合，建立了平行轴系齿轮转子系统有限元模型。转子系统采用梁单元模拟，齿轮之间的啮合通过啮合刚度矩阵和阻尼矩阵模拟，并分析了不同自由度耦合下系统的固有特性和振动响应特性。研究结果表明，考虑弯扭耦合和弯扭轴摆耦合会产生较多的弯扭耦合频率，响应计算结果出现的峰值点均对应系统的固有频率，而考虑弯扭轴摆耦合可以更好地表征系统的不同自由度的耦合振动情况。此研究结果可为齿轮耦合转子系统设计提供参考。

关键词 斜齿轮；转子系统；不同自由度耦合；振动特性
中图分类号 TH113.1

引 言

齿轮转子系统是旋转机械中应用最广泛的动力和运动传递装置，其力学性能和工作性能对整个机器有重要影响[1]。由于齿轮的啮合作用，齿轮轴系的振动特性与简单转子系统有着根本的区别，突出特征为系统各轴间的弯扭耦合振动，对于斜齿轮还存在弯扭轴摆耦合振动，因此对含有齿轮的转子系统应该从系统的角度进行研究。如果不考虑转子间耦合振动的影响，则会造成计算精度低且容易丢失一些重要信息，如模态耦合派生的新频率和扭转激励激发的横向响应等。可见，考虑齿轮啮合影响，建立正确的齿轮啮合动力学模型，对于分析齿轮耦合转子系统动力学特性是至关重要的。近 20 年来，国内外学者针对齿轮转子系统动力学特性做了大量研究工作。齿轮转子系统的建模主要有集中质量模型和有限元模型[2-8]，研究对象多为（等效）直齿轮[2,4-6,9-16]和斜齿轮[3,7,8,17-20]，研究内容主要包括弯扭耦合固有特性[2,4,7]、考虑质量不平衡、静态传递误差、扭转激励导致的强迫振动响应[2-3,5-6,8-10,15-16,20]。

现有的齿轮动力学模型多考虑齿轮的基本参数，考虑多个斜齿轮参数的耦合影响，如压力角和安装方位角等，建立斜齿轮全自由度弯-扭-轴-摆耦合模型还比较少。笔者以文献[17]提供的一个三平行轴转子系统为研究对象，考虑静态传递误差、齿轮几何偏心的影响，建立了全自由度通用齿轮啮合动力学模型，以此确定齿轮啮合刚度矩阵、阻尼矩阵和外激励载荷向量。利用转子系统有限元模型和三维斜齿轮集中质量模型相耦合，建立平行轴系齿轮转子系统有限元模型。考虑不同自由度耦合，分析了斜齿轮转子系统动力学特性。该研究结果为齿轮耦合转子系统设计提供参考。

1 齿轮-转子系统有限元模型的建立

1.1 转子系统有限元模型

文献[17]提供的三平行轴两对斜齿轮副啮合转子系统结构形式如图 1 所示。图中箭头方向为转速方向，轴 1 为主动轴。由于原文未能提供集中质量 1 和集中质量 2 的计算参数，因此笔者对其进行假定：集中质量 1 的质量为 0.996 9 kg；直径转动惯量为 956 kg·mm²；极转动惯量为 1 850 kg·mm²；集中质量 2 的质量为 0.518 5 kg；直径转动惯量为 372 kg·mm²；极转动惯量为 709 kg·mm²；其他有关齿轮、轴承和转子参数详见文献[17]。

* 机械传动国家重点实验室开放基金资助项目（SKLMT-KFKT-200903）；国家自然科学基金资助项目（51105065）；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目（N100403008）
收稿日期：2012-08-19；修回日期：2012-11-23

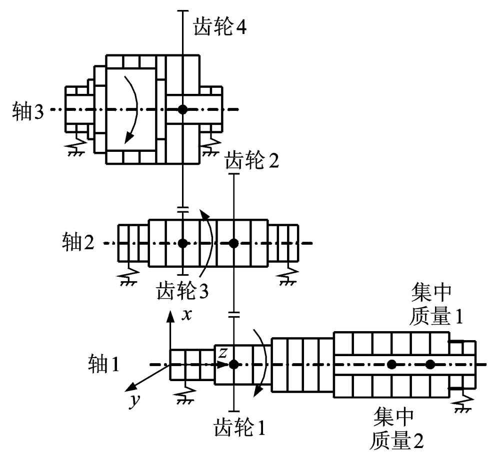


图 1　齿轮-转子-轴承系统模型示意图

Fig. 1　Dynamic model of a geared rotor bearing system

为了更好地模拟转子系统动力学特性，对转子系统做如下假定：a. 转子系统采用 Timoshenko 梁来模拟，轴段单元如图 2 所示；b. 轴承被理想地视为线性，无交叉刚度和阻尼，左右两个轴承采用相同的刚度和阻尼。

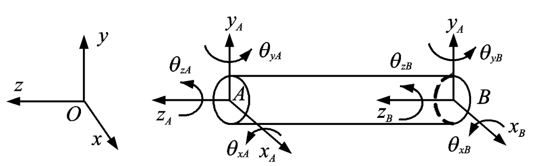


图 2　轴段单元有限元模型

Fig. 2　The finite element model of a shaft element

考虑转子系统的轴向、横向和扭转变形，转子系统的 Timoshenko 梁单元的自由度为

$$\boldsymbol{u}^e = [x_A\ y_A\ z_A\ \theta_{xA}\theta_{yA}\theta_{zA}x_B\ y_B\ z_B\ \theta_{xB}\ \theta_{yB}\ \theta_{zB}]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

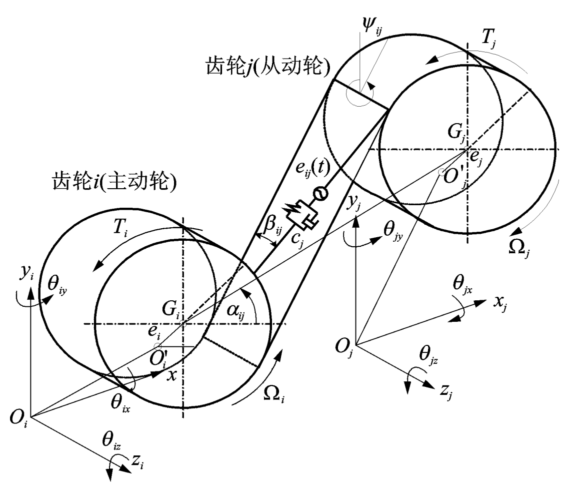
其中：$\boldsymbol{u}$ 的上标 $\boldsymbol{e}$ 代表单元。

1.2　齿轮副的弯-扭-轴-摆有限元模型

建立斜齿轮副全自由度啮合模型如图 3 所示。该系统由两个斜齿轮副 i，j 构成，其中：O_i，O_j 为齿轮静止中心；G_i，G_j 为齿轮几何中心；O'_i，O'_j 为齿轮重心；e_i，e_j 为偏心距（齿轮质心 O' 到形心 G 的距离）；Ω_i，Ω_j 为齿轮转动角速度，取逆时针为正，顺时针为负；r_i，r_j 为齿轮基圆半径；T_i，T_j 为作用在齿轮上的扭矩。

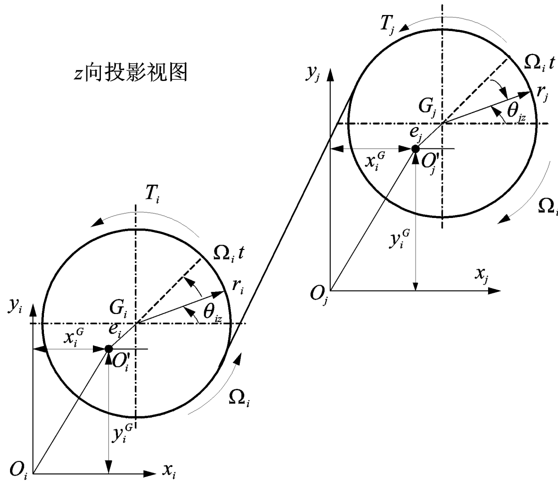
将啮合齿轮视为一对通过弹簧和阻尼器联接的刚性圆盘，采用一个弹簧-阻尼单元来模拟，考虑到斜齿轮传动比直齿轮传动的重合度大，单对齿和双对齿交替啮合刚度波动幅度较小，假定啮合刚度为常值，取其平均啮合刚度。设沿着啮合力作用线方向的刚度和阻尼分别为 k_{ij} 和 c_{ij}，啮合线与啮合面边线的夹角为螺旋角 β_{ij}，其定义为

$$\beta_{ij} = \begin{cases} >0 & （主动轮左旋） \\ <0 & （主动轮右旋） \end{cases} \tag{2}$$



(a) 三维模型

(a) Three-dimensional model



(b) z向投影视图

(b) Projection drawing in z-direction

图 3　一个斜齿轮副三维动力学模型

Fig. 3　Three-dimensional dynamic model of a gear pair

齿轮 i 和齿轮 j 之间的相对位置可以采用方位角 α_{ij} 表示，α_{ij}（$0\leqslant\alpha_{ij}<2\pi$）定义为主动轮 i 的 x 轴逆时针旋转至中心线的夹角，定义 y 轴正向与啮合面的夹角为

$$\psi_{ij} = \begin{cases} -\varphi_{ij} + \alpha_{ij} & （主动轮逆时针） \\ \varphi_{ij} + \alpha_{ij} - \pi & （主动轮顺时针） \end{cases} \tag{3}$$

$e_{ij}(t)$为齿轮静态传递误差，表示为

$$e_{ij}(t) = e_0 + e_{ij}\sin(N_i\Omega_i t + \varphi) \tag{4}$$

其中：e_0，e_{ij} 为轮齿误差的常值和幅值，取 $e_0=0$；N_i 为齿轮齿数；φ 为相位角，取 $\varphi=0$。

任一时刻的静态传递误差可表示为 $e_{ij}(t)=e_{ij}\sin(N_i\Omega_i t)$。

定义此齿轮副质心的广义坐标为

$$\boldsymbol{X}_{ij}^G=[x_i^G\ y_i^G\ z_i^G\ \theta_{xi}^G\ \theta_{yi}^G\ \theta_{zi}^G\ x_j^G\ y_j^G\ z_j^G\ \theta_{xj}^G\ \theta_{yj}^G\ \theta_{zj}^G]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

其中：x，y 为横向自由度；z 为轴向自由度；θ_x，θ_y 为摆动自由度；θ_z 为扭转自由度。

考虑主动轮转向方向的影响，引入 sgn 函数

$$\mathrm{sgn}=\begin{cases}1 & （主动轮逆时针）\\ -1 & （主动轮顺时针）\end{cases} \tag{6}$$

假设齿轮在啮合力作用线方向上所产生的相对位移完全转变为接触齿面的弹性变形，以保证齿面在啮合过程中的相互接触。设两齿轮在啮合线方向上的相对位移和相对速度分别为 p_{ij} 和 $\dot{p}_{ij}$，对于相对位移在这里假定压为正、拉为负，则有

$$\begin{aligned}p_{ij}(t)=&[-(x_i^G-e_i(1-\cos(\Omega_i t)))\sin\psi_{ij}+(x_j^G-\\&e_j(1-\cos(\Omega_i t)))\sin\psi_{ij}+(y_i^G+\\&e_i\sin(\Omega_i t))\cos\psi_{ij}-(y_j^G+e_j\sin(\Omega_j t))\cos\psi_{ij}+\\&\mathrm{sgn}r_i\theta_{zi}^G+\mathrm{sgn}r_j\theta_{zj}^G]\cos\beta_{ij}+[\mathrm{sgn}z_i^G-\\&\mathrm{sgn}z_j^G+(r_i\sin\psi_{ij}+\mathrm{sgn}e_i\sin(\Omega_i t))\theta_{xi}^G+\\&(r_j\sin\psi_{ij}-\mathrm{sgn}e_j\sin(\Omega_j t))\theta_{xj}^G-\\&(r_i\cos\psi_{ij}+\mathrm{sgn}e_i\cos(\Omega_i t))\theta_{yi}^G-(r_j\cos\psi_{ij}-\\&\mathrm{sgn}e_j\cos(\Omega_j t))\theta_{yj}^G]\sin\beta_{ij}-e_{ij}(t)\end{aligned} \tag{7}$$

建立齿轮转子系统运动微分方程时作以下简化：不考虑啮合齿侧隙、啮合摩擦力的变化，考虑齿轮偏心、传递误差、输入输出扭矩等，建立齿轮在六个自由度方向上的运动方程为

$$m_i\ddot{x}_i^G-k_{ij}p_{ij}(t)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}-c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}=m_ie_i\Omega_i^2\cos(\Omega_i t) \tag{8a}$$

$$m_i\ddot{y}_i^G+k_{ij}p_{ij}(t)\cos\beta_{ij}\cos\psi_{ij}+c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\cos\beta_{ij}\cos\psi_{ij}=m_ie_i\Omega_i^2\sin(\Omega_i t) \tag{8b}$$

$$m_i\ddot{z}_i^G+\mathrm{sgn}k_{ij}p_{ij}(t)\sin\beta_{ij}+\mathrm{sgn}c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\sin\beta_{ij}=0 \tag{8c}$$

$$\begin{aligned}&I_{ix}\ddot{\theta}_{xi}^G+k_{ij}p_{ij}(t)\sin\beta_{ij}(r_i\sin\psi_{ij}+\mathrm{sgn}e_i\sin(\Omega_i t))+\\&\quad c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\sin\beta_{ij}(r_i\sin\psi_{ij}+\mathrm{sgn}e_i\sin(\Omega_i t))+\\&\quad I_{iz}\Omega_i\dot{\theta}_{yi}^G=0\end{aligned} \tag{8d}$$

$$\begin{aligned}&I_{iy}\ddot{\theta}_{yi}^G-k_{ij}p_{ij}(t)\sin\beta_{ij}(r_i\cos\psi_{ij}+\mathrm{sgn}e_i\sin(\Omega_i t))-\\&\quad c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\sin\beta_{ij}(r_i\cos\psi_{ij}+\mathrm{sgn}e_i\sin(\Omega_i t))-\\&\quad I_{iz}\Omega_i\dot{\theta}_{xi}^G=0\end{aligned} \tag{8e}$$

$$\begin{aligned}&I_{iz}\ddot{\theta}_{zi}^G+\mathrm{sgn}k_{ij}p_{ij}(t)\cos\beta_{ij}(r_i+\mathrm{sgn}e_i\cos(\Omega_i t-\psi_{ij}))+\\&\quad \mathrm{sgn}c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\cos\beta_{ij}(r_i+\mathrm{sgn}e_i\cos(\Omega_i t-\psi_{ij}))=\\&\quad \mathrm{sgn}T_i\end{aligned} \tag{8f}$$

$$m_j\ddot{x}_j^G+k_{ij}p_{ij}(t)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}+c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}=m_je_j\Omega_j^2\cos(\Omega_j t) \tag{8g}$$

$$m_j\ddot{y}_j^G-k_{ij}p_{ij}(t)\cos\beta_{ij}\cos\psi_{ij}-c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\cos\beta_{ij}\cos\psi_{ij}=m_je_j\Omega_j^2\sin(\Omega_j t) \tag{8h}$$

$$m_j\ddot{z}_j^G-\mathrm{sgn}k_{ij}p_{ij}(t)\sin\beta_{ij}-\mathrm{sgn}c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\sin\beta_{ij}=0 \tag{8i}$$

$$\begin{aligned}&I_{jx}\ddot{\theta}_{xj}^G+k_{ij}p_{ij}(t)\sin\beta_{ij}(r_j\sin\psi_{ij}-\mathrm{sgn}e_j\sin(\Omega_j t))+\\&\quad c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\sin\beta_{ij}(r_j\sin\psi_{ij}-\mathrm{sgn}e_j\sin(\Omega_j t))+\\&\quad I_{jz}\Omega_j\dot{\theta}_{yj}^G=0\end{aligned} \tag{8j}$$

$$\begin{aligned}&I_{jy}\ddot{\theta}_{yj}^G-k_{ij}p_{ij}(t)\sin\beta_{ij}(r_j\cos\psi_{ij}-\mathrm{sgn}e_j\cos(\Omega_j t))-\\&\quad c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\sin\beta_{ij}(r_j\cos\psi_{ij}-\mathrm{sgn}e_j\cos(\Omega_j t))-\\&\quad I_{jz}\Omega_j\dot{\theta}_{xj}^G=0\end{aligned} \tag{8k}$$

$$\begin{aligned}&I_{jz}\ddot{\theta}_{zj}^G+\mathrm{sgn}k_{ij}p_{ij}(t)\cos\beta_{ij}(r_j-\mathrm{sgn}e_j\cos(\Omega_j t-\\&\quad \psi_{ij}))+\mathrm{sgn}c_{ij}\dot{p}_{ij}(t)\cos\beta_{ij}(r_j-\mathrm{sgn}e_j\cos(\Omega_j t-\\&\quad \psi_{ij}))=\mathrm{sgn}T_j\end{aligned} \tag{8l}$$

其中：I_{ix}，I_{iy}，I_{iz}，I_{jx}，I_{jy}，I_{jz} 分别为齿轮 i 和 j 绕 x 轴、y 轴和 z 轴的转动惯量。

利用两个齿轮质心和形心坐标的关系

$$\begin{cases}x_i^G=x_i-e_i\cos(\Omega_i t)\\x_j^G=x_j-e_j\cos(-\Omega_j t)\\y_i^G=y_i-e_i\sin(\Omega_i t)\\y_j^G=y_j-e_j\sin(-\Omega_j t)\\z_i^G=z_i\\z_j^G=z_j\\\theta_{xi}^G=\theta_{xi}\\\theta_{xj}^G=\theta_{xj}\\\theta_{yi}^G=\theta_{yi}\\\theta_{yj}^G=\theta_{yj}\\\theta_{zi}^G=\theta_{zi}+\Omega_i t\\\theta_{zj}^G=\theta_{zj}-\Omega_j t\end{cases} \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)，忽略一些非线性项，将其简化成矩阵形式，得到齿轮副运动耦合方程为

$$\boldsymbol{M}_{ij}\ddot{\boldsymbol{X}}_{ij}+(\boldsymbol{C}_{ij}+\boldsymbol{G}_{ij})\dot{\boldsymbol{X}}_{ij}+\boldsymbol{K}_{ij}\boldsymbol{X}_{ij}=\boldsymbol{F}_{ij}^1+\boldsymbol{F}_{ij}^s+\boldsymbol{F}_w \tag{10}$$

其中：$\boldsymbol{M}_{ij}$ 为质量矩阵；$\boldsymbol{K}_{ij}$ 为啮合刚度矩阵；$\boldsymbol{C}_{ij}$ 为啮合阻尼矩阵；$\boldsymbol{G}_{ij}$ 为陀螺矩阵。

$$\boldsymbol{M}_{ij}=\mathrm{diag}(m_i,m_i,m_i,I_{ix},I_{iy},I_{iz},m_j,m_j,m_j,I_{jx},I_{jy},I_{jz}) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{X}_{ij}=[x_i,y_i,z_i,\theta_{xi},\theta_{yi},\theta_{zi},x_j,y_j,z_j,\theta_{xj},\theta_{yj},\theta_{zj}]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}=k_{ij}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{ij} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{C}_{ij}=c_{ij}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{ij} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{ij}=[&-\sin\psi_{ij}\cos\beta_{ij},\cos\psi_{ij}\cos\beta_{ij},\mathrm{sgn}\sin\beta_{ij},\\&r_i\sin\psi_{ij}\sin\beta_{ij},-r_i\cos\psi_{ij}\sin\beta_{ij},\mathrm{sgn}r_i\cos\beta_{ij},\\&\sin\psi_{ij}\cos\beta_{ij},-\cos\psi_{ij}\cos\beta_{ij},-\mathrm{sgn}\sin\beta_{ij},\\&r_j\sin\psi_{ij}\sin\beta_{ij},-r_j\cos\psi_{ij}\sin\beta_{ij},\mathrm{sgn}r_j\cos\beta_{ij}]\end{aligned} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{G}_{ij}=$$
$$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&I_{iz}\Omega_i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-I_{iz}\Omega_i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I_{jz}\Omega_j&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-I_{jz}\Omega_j&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{1}=k_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{\mathrm{T}}[(-e_i+e_j)\sin\psi_{ij}\cos\beta_{ij}+ e_{ij}\sin(N_i\Omega_i t)]+c_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ij}^{\mathrm{T}}e_{ij}N_i\Omega_i\cos(N_i\Omega_i t) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{F}_{w}=[0,0,0,0,0,\mathrm{sgn}T_i,0,0,0,0,0,\mathrm{sgn}T_j]^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{ij}^{s}=[&0,0,0,e_i\,\mathrm{sgn}\sin\beta_{ij}\sin(\Omega_i t)\cdot\\
&(k_{ij}(-e_i+e_j)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}+e_{ij}k_{ij}\sin(N_i\Omega_i t)+\\
&e_{ij}c_{ij}N_i\Omega_i\cos(N_i\Omega_i t)),e_i\,\mathrm{sgn}\sin\beta_{ij}\cos\Omega_i t\cdot\\
&(k_{ij}(e_i-e_j)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}-e_{ij}k_{ij}\sin(N_i\Omega_i t)-\\
&e_{ij}c_{ij}N_i\Omega_i\cos(N_i\Omega_i t)),e_i\cos\beta_{ij}\cos(\psi_{ij}-\Omega_i t)\cdot\\
&(k_{ij}(-e_i+e_j)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}+e_{ij}k_{ij}\sin(N_i\Omega_i t)+\\
&e_{ij}c_{ij}N_i\Omega_i\cos(N_i\Omega_i t)),0,0,0,\\
&e_j\,\mathrm{sgn}\sin\beta_{ij}\sin(\Omega_j t)(k_{ij}(-e_i+e_j)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}+\\
&e_{ij}k_{ij}\sin(N_i\Omega_i t)+e_{ij}c_{ij}N_i\Omega_i\cos(N_i\Omega_i t))\cdot\\
&e_j\,\mathrm{sgn}\sin\beta_{ij}\cos(\Omega_j t)(k_{ij}(-e_i+e_j)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}+\\
&e_{ij}k_{ij}\sin(N_i\Omega_i t)+e_{ij}c_{ij}N_i\Omega_i\cos(N_i\Omega_i t)),\\
&e_j\cos\beta_{ij}\cos(\psi_{ij}+\Omega_j t)(k_{ij}(e_i-e_j)\cos\beta_{ij}\sin\psi_{ij}-\\
&e_{ij}k_{ij}\sin(N_i\Omega_i t)-e_{ij}c_{ij}N_i\Omega_i\cos(N_i\Omega_i t))]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{19}$$

1.3　齿轮-转子系统有限元模型

将齿轮副运动方程与转子-轴承系统方程进行耦合，得到整个系统的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}_u \tag{20}$$

其中：$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别为系统质量、阻尼和刚度矩阵；质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 包括转子质量和齿轮质量；阻尼矩阵 $\boldsymbol{D}$ 包括粘性阻尼、轴承阻尼和陀螺力矩；刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 包括转子刚度、啮合刚度和轴承刚度；$\boldsymbol{u}$ 为系统广义坐标（节点位移向量）；$\boldsymbol{F}_u$ 为外激励向量。

笔者采用瑞利阻尼形式来确定总阻尼矩阵中的粘性阻尼项 $\boldsymbol{C}_s$，其表达式为

$$\boldsymbol{C}_s=\alpha\boldsymbol{M}+\beta\boldsymbol{K} \tag{21}$$

$$\alpha=\frac{60(\omega_{n2}\xi_1-\omega_{n1}\xi_2)\omega_{n1}\omega_{n2}}{\pi(\omega_{n2}^2-\omega_{n1}^2)} \tag{22}$$

$$\beta=\frac{\pi(\omega_{n2}\xi_2-\omega_{n1}\xi_1)}{15(\omega_{n2}^2-\omega_{n1}^2)} \tag{23}$$

其中：ω_{n1} 和 ω_{n2} 分别为第 1 阶和第 2 阶临界转速；ξ_1 和 ξ_2 分别为对应的第 1 和第 2 阶模态阻尼比，这里取 $\xi_1=\xi_2=0.01$。

轴承采用弹簧单元来模拟，集中质量单元用来模拟转子上的几何不规则部件，共划分 57 个单元，有关弹簧刚度参数见文献[17]。

2　模型验证

为了更好地验证本研究所采用模型的正确性，将该模型的计算结果与文献[17]进行对比。文献中只考虑了齿轮在静态传递误差的激励下系统的动力学响应，静态传递误差等参数选用的幅值和文献一致，采用式(4)。笔者用 F_{12} 和 F_{34} 分别表示齿轮对 12 和齿轮对 34 之间的啮合力，其中：$F_{12}=k_{12}p_{12}$；$F_{34}=k_{34}p_{34}$；k_{12} 和 k_{34} 分别为齿轮对 12 和齿轮对 34 的啮合刚度，取值见文献[17]。

图 4 为本研究结果和采用文献结果得到的啮合力 F_{34} 的对比曲线。由图可知，齿轮动态啮合力的趋势和幅值基本一致，这证明了本研究齿轮啮合模型及转子系统有限元模型的正确性，但是仍存在一定的误差。产生误差的原因为：a. 文献中参数不全，本研究进行了假设；b. 文献没有说明具体工况。

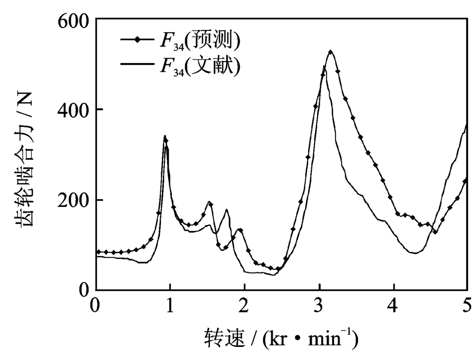


图 4　动态啮合力 F_{34} 变化曲线

Fig. 4　Comparison of the dynamic gear mesh forces F_{34}

3　考虑不同耦合自由度的系统固有特性分析

考虑转子系统通过啮合刚度矩阵实现耦联，因此可以通过修改啮合刚度矩阵各方向刚度的值来实

现不同自由度耦合分析，如图5所示。图中方框表示只考虑轴系弯弯耦合需要加载的矩阵元素，其中矩阵右上侧和左下侧的1/4矩阵为耦合项。为了考核不同模态耦合情况下系统的固有特性，笔者选取了5种耦合工况进行研究：工况1为无齿轮耦合，不添加齿轮啮合刚度矩阵，只计算单轴的固有频率；工况2为只考虑轴系弯弯耦合；工况3为只考虑轴系扭扭耦合；工况4为考虑轴系弯扭耦合；工况5考虑轴系弯扭轴摆耦合。为了对比方便，这里没有考虑陀螺效应的影响。在转速为零时计算了5种工况下轴系复模态，如表1所示，表中数值虚部为有阻尼的固有频率。对比各种工况下系统的复特征值可以看到，当存在模态耦合时均会出现一些新的耦合频率。考虑轴系弯弯和扭扭耦合时，与无耦合相比出现的耦合新频率最少。考虑轴系弯扭耦合和轴系弯扭轴摆耦合出现的耦合新频率较多，其中，轴系弯扭耦合和弯扭轴摆耦合除了第1阶差别较大外，其余结果均非常接近。对比无耦合和轴系弯扭轴摆耦合可以发现，考虑齿轮作用后系统模态耦合是非常强烈的，前6阶模态就存在3阶耦合模态。从上述分析可以看到，齿轮的耦合作用不仅造成传动轴本身的模态耦合，还会造成轴系之间的系统模态耦合，二者耦合的结果即为笔者最终讨论的轴系弯扭轴摆耦合。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} \overbrace{x_i \quad y_i \quad z_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}}^{i} & \overbrace{x_j \quad y_j \quad z_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}}^{j} \end{array} \\
\begin{array}{c} i\left\{\begin{array}{c} x_i \\ y_i \\ z_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{array}\right. \\ j\left\{\begin{array}{c} x_j \\ y_j \\ z_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{array}\right. \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 & C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\
C_2 & C_{13} & C_{14} & C_{15} & - & - & - & - & - & - & - & C_{23} \\
C_3 & C_{14} & C_{24} & C_{25} & - & - & - & - & - & - & - & C_{33} \\
C_4 & C_{15} & C_{25} & C_{34} & - & - & - & - & - & - & - & C_{42} \\
C_5 & - & - & - & C_{43} & - & - & - & - & - & - & C_{50} \\
C_6 & - & - & - & - & C_{51} & - & - & - & - & - & C_{57} \\
\hline
C_7 & - & - & - & - & - & C_{58} & - & - & - & - & C_{63} \\
C_8 & - & - & - & - & - & - & C_{64} & - & - & - & C_{68} \\
C_9 & - & - & - & - & - & - & - & C_{69} & - & - & C_{72} \\
C_{10} & - & - & - & - & - & - & - & - & C_{73} & - & C_{75} \\
C_{11} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & C_{76} & C_{77} \\
C_{12} & C_{23} & C_{33} & C_{42} & C_{50} & C_{57} & C_{63} & C_{68} & C_{72} & C_{75} & C_{77} & C_{78}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

图5 啮合刚度矩阵形式

Fig.5 The form of the gear mesh stiffness matrix

表1 不同自由度耦合下各阶复模态

Tab.1 The natural frequencies of the system under different coupling

阶次	无耦合	轴系弯弯耦合	轴系扭扭耦合	轴系弯扭耦合	轴系弯扭轴摆耦合
1	−45.17±1 467.34i	−45.17±1 467.34i	−31.87±1 095.11i	−24.91±836.68i	−24.25±807.96i
2	−45.17±1 467.34i	−53.63±1 661.29i	−45.17±1 467.34i	−40.92±1 359.71i	−40.37±1 345.04i
3	−74.10±2 056.04i	−74.10±2 056.04i	−45.17±1 467.34i	−45.17±1 467.34i	−45.17±1 467.34i
4	−91.06±2 332.75i	−91.06±2 332.75i	−55.55±1 702.25i	−54.45±1 678.88i	−54.32±1 676.19i
5	−91.06±2 332.75i	−92.23±2 350.69i	−91.06±2 332.75i	−91.06±2 332.75i	−91.06±2 332.75i
6	−92.23±2 350.69i	−96.36±2 412.77i	−91.06±2 332.75i	−92.23±2 350.69i	−92.03±2 347.65i

4 考虑不同自由度耦合的系统振动响应分析

根据全自由度通用齿轮啮合动力学模型，考虑静态传递误差，转子质量不平衡和齿轮几何偏心3种因素耦合的影响，对系统进行了动力学响应分析。静态传递误差如式(4)所示，齿轮几何偏心根据推导的考虑齿轮几何偏心的公式加载，转子质量不平衡根据美国石油协会(API617)标准加载，加载参数如表2所示。静态传递误差和齿轮偏心根据推导模型式(17)，(19)均在齿轮处加载，转子质量不平衡的加载位置如图6所示。

考虑静态传递误差，转子质量不平衡和齿轮几何偏心3种因素耦合的影响，根据不同自由度耦合形式，对系统振动响应特性进行了分析，如图7所示。

表2 载荷参数表

Tab.2 The loading parameters

静态传递误差	
齿轮对12	$e_{12}=0.5\ \mu$m
齿轮对34	$e_{34}=0.5\ \mu$m
齿轮几何偏心	
齿轮1	$e_1=8\ \mu$m
齿轮2	$e_2=10\ \mu$m
齿轮3	$e_3=8\ \mu$m
齿轮4	$e_4=10\ \mu$m
转子质量不平衡	
载荷1	5 920 g·mm
载荷2	2 900 g·mm
载荷3	8 310 g·mm

通过与固有频率对比，在0～5 kr/min的转速范围内，不同自由度耦合下系统的响应特性曲线出现的峰值均对应于该耦合形式下的固有频率，且主

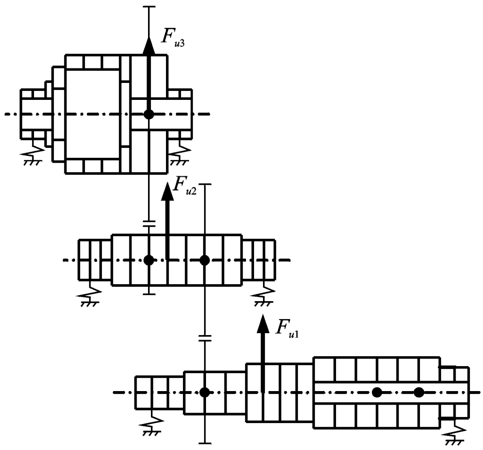
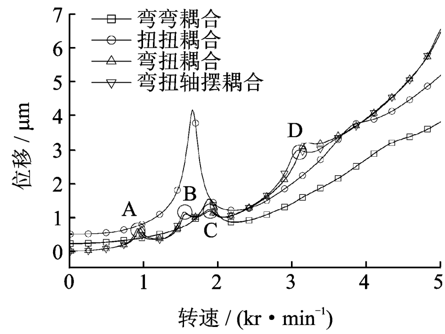


图 6　转子质量不平衡载荷示意图

Fig. 6　Schematic of unbalance loads

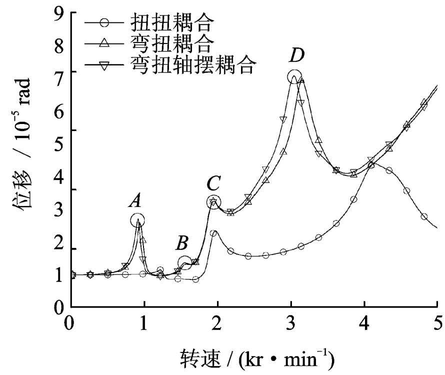
要通过齿轮的啮合频率激发共振。从图 7 可以看出，不同耦合形式响应曲线存在很大的差异：在 0～5 kr/min的转速范围内，弯弯耦合出现了一个峰值；扭扭耦合在不同方向上出现了几个不同的峰值，在弯曲方向上出现了一个峰值，在扭转方向上出现了 3 个峰值；弯扭耦合和弯扭轴摆耦合均出现了 4 个峰值，且大小比较接近。在低转速范围内，峰值所对应的频率差别不大，但随着转速的增高，可以明显地看出峰值所对应的频率存在比较大的差别。从以上分析可以看出：弯弯耦合不能准确预测共振点和共振点处的幅值；扭扭耦合能够准确预测部分共振点，但不能准确地预测全部共振点，且对幅值的预测存在很大的误差；弯扭耦合在低转速范围内能够很好地预测共振失效，但随着转速的增高，这种方法预测精度会下降，不能准确预测共振失效；弯扭轴摆耦合由于其考虑了所有的自由度，所以是一种最准确的预测模型，它反映了最真实的工作状况，适用于各种转速且具有很高的预测精度。

由图 7 看出，弯扭轴摆耦合形式的动态响应曲线存在 4 个峰值。通过与固有频率对比可知，4 个峰均是由齿轮啮合频率接近系统固有频率引起的。A 峰对应于轴 1 的转速为 $\Omega_1=920$ r/min，此时齿轮对 12 的啮合频率 $f_{12}=N_1\cdot\Omega_1=52\cdot 920/60=797.33$ Hz，N_1 为齿轮 1 的齿数。该频率接近于系统第 1 阶固有频率 808 Hz。B 峰对应于齿轮对 12 啮合频率，接近系统第 2 阶固有频率。C 峰对应于齿轮对 12 啮合频率接近系统第 4 阶固有频率。D 峰对应于齿轮对 34 啮合频率，接近系统第 1 阶固有频率。4 个峰值对应的振型图如图 8 所示。



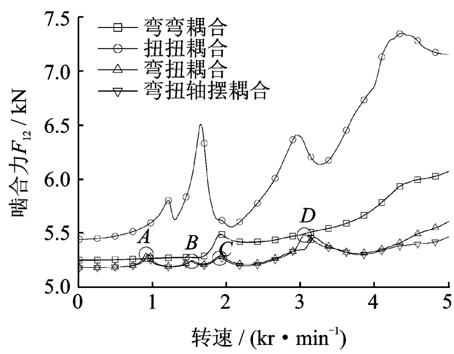
(a) y方向响应曲线

(a) The responses in y direction



(b) 扭转方向响应曲线

(b) The responses in θ_z direction



(c) 齿轮对12动态啮合力响应曲线

(c) The dynamic forces of gear pair 12

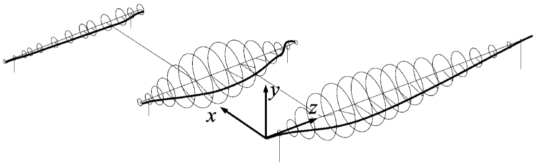
图 7　系统动力学响应曲线

Fig. 7　Dynamic responses of the system

5　结　论

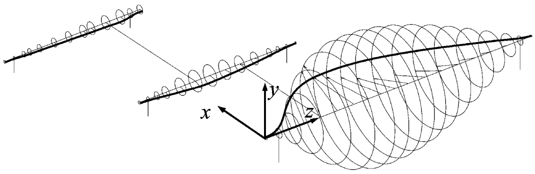
1）以三维斜齿轮副为研究对象，推导了全自由度通用齿轮啮合动力学模型。该模型综合考虑了静态传递误差、齿轮偏心、主动轮旋向、转向、螺旋角以及压力角等因素的影响，在动力学分析中具有较强的通用性。

2）通过修改啮合刚度矩阵形式，对比 4 种耦合



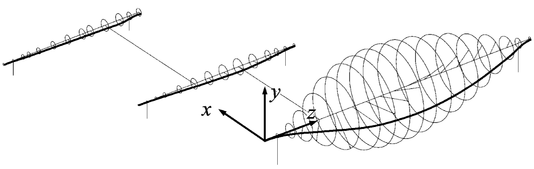
(a) 第1阶振型图

(a) The first mode shape



(b) 第2阶振型图

(b) The second mode shape



(c) 第4阶振型图

(c) The fourth mode shape

图 8 不同自由度耦合下系统振型图

Fig. 8 Typical mode shapes of the system

工况下系统的动力学特性的变化规律，可以发现齿轮的弯扭轴摆耦合模型最准确、全面地反映了齿轮系统的动力学特性。因此在实际分析中，应综合考虑弯扭轴摆耦合对系统进行动力学特性分析。

参 考 文 献

[1] 李润方，王建军. 齿轮系统动力学—振动、冲击、噪声[M]. 北京：科学出版社，1997：1-3.

[2] 庞辉，方宗德，欧卫林. 多平行齿轮耦合转子系统的振动特性分析[J]. 振动与冲击，2007，26(6)：21-25.
Pang Hui，Fang Zongde，Ou Weilin. Analysis on lateral torsional coupling vibration characteristics of multi-parallel gear-rotor system[J]. Journal of Vibration and Shock，2007，26(6)：21-25. (in Chinese).

[3] 张建云，丘大谋. 齿轮刚度及制造误差对多平行轴转子系统动力学特性的影响[J]. 机械科学与技术，1996，15(5)：749-753.
Zhang Jianyun，Qiu Damou. Effects of gear stiffness and manufacturing errors on the dynamical characteristics of parallel multi-stage gear-bearing-rotor system[J]. Mechanical Science and Technology，1996，15(5)：749-753. (in Chinese).

[4] 夏伯乾，虞烈，谢友柏. DH 型压缩机齿轮-轴承-转子系统动力学分析[J]. 振动工程学报，2003，16(2)：251-255.
Xia Boqian，Yu Lie，Xie Youbo. Dynamics analysis of geared rotor-bearing system of DH type turbine compressor[J]. Journal of Vibration Engineering，2003，16(2)：251-255. (in Chinese).

[5] 李明，胡海岩. 完整约束下齿轮啮合转子系统的弯扭耦合振动稳态响应[J]. 振动工程学报，2003，16(1)：75-80.
Li Ming，Hu Haiyan. Steady state response of the coupled lateral-torsional vibrations of geared rotor system under a holonomic constraint[J]. Journal of Vibration Engineering，2003，16(1)：75-80. (in Chinese).

[6] 欧卫林，王三民，袁茹. 齿轮耦合复杂转子系统弯扭耦合振动分析的轴单元法[J]. 航空动力学报，2005，20(3)：434-439.
Ou Weilin，Wang Sanmin，Yuan Ru. Shaft element method for the analysis of lateral-torsional coupling vibration of a complex gear-rotor system[J]. Journal of Aerospace Power，2005，20(3)：434-439. (in Chinese).

[7] 林江，楼建勇. 斜齿圆柱齿轮传动系统动力学模型及动特性试验研究[J]. 机械工程学报，2003，39(7)：29-33.
Lin Jiang，Lou Jianyong. Study on dynamic models and behavior of power transmission helical gear[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering，2003，39(7)：29-33. (in Chinese).

[8] 窦唯，张楠，刘占生. 高速齿轮转子系统弯扭耦合振动研究[J]. 振动工程学报，2011，24(4)：386-393.
Dou Wei，Zhang Nan，Liu Zhansheng. The coupled bending and torsional vibrations of the high-speed geared rotor-bearing system[J]. Journal of Vibration Engineering，2011，24(4)：386-393. (in Chinese).

[9] Lee A S，Ha J W，Choi D H. A coupled lateral and torsional vibration characteristics of a speed increasing geared rotor-bearing system[J]. Journal of Sound and Vibration，2003，263(4)：725-742.

[10] Kahraman A，Ozguven H N，Houser D R，et al. Dynamic analysis of geared rotors by finite elements[J]. ASME Journal of Mechanical Design，1992，114(3)：507-514.

[11] Rao J S，Shiau T N，Chang J R. Theoretical analysis of lateral response due to torsional excitation of geared rotors[J]. Mechanism and Machine Theory，1998，33(6)：761-783.

[12] 蒋庆磊，吴大转，谭善光，等. 齿轮传动多转子耦合系统振动特性研究[J]. 振动工程学报，2010，23(3)：254-259.
Jiang Qinglei，Wu Dazhuan，Tan Shanguang，et al. Development and application of a model for coupling

geared rotors system[J]. Journal of Vibration Engineering, 2010, 23(3):254-259. (in Chinese).

[13] 宋雪萍，刘树英，闻邦椿．齿轮转子系统的振动特性分析[J]．机械科学与技术，2006，25(2)：153-157.
Song Xueping, Liu Shuying, Wen Bangchun. Vibration characteristics analysis of a gear rotor system[J]. Mechanical Science and Technology, 2006, 25(2): 153-157. (in Chinese).

[14] 刘辉，项昌乐，孙恬恬．车辆动力传动系统弯扭耦合振动模型的建立及复模态分析[J]．机械工程学报，2010，46(24)：67-74.
Liu Hui, Xiang Changle, Sun Tiantian. Construction of bending-torsional coupled vibration model and complex modal analysis of the vehicle powertrain[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(24): 67-74. (in Chinese)

[15] 王炎，马吉胜，郑海起，等．含柔性转子的齿轮-轴承系统动态特性分析[J]．振动、测试与诊断，2012，32(1)：51-55.
Wang Yan, Ma Jisheng, Zheng Haiqi, et al. Dynamic characteristics analysis of gear-bearing system with flexible rotor[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(1): 51-55. (in Chinese).

[16] 韩振南，孙文婷，高建新．含轮齿剥落的齿轮系统动力学故障模拟[J]．振动、测试与诊断，2012，32(1)：101-104.
Han Zhennan, Sun Wenting, Gao Jianxin. Dynamics fault simulation of gear transmission system including spalling[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(1): 101-104. (in Chinese).

[17] Kubur M, Kahraman A, Zini D M, et al. Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: model and experiment[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2004, 126: 398-406.

[18] 陈宏，王丽雅，郝伟，等．三轴斜齿轮传动转子系统的动力学特性分析[J]．矿山机械，2010，38(2)：29-33.
Chen Hong, Wang Liya, Hao Wei, et al. Dynamic analysis of a three-shaft helical gear transmission rotor system[J]. Mining & Processing Equipment, 2010, 38(2): 29-33. (in Chinese)

[19] 崔亚辉，刘占生，叶建槐，等．复杂多级齿轮转子轴承系统的动力学建模和数值仿真[J]．机械传动，2009，33(6)：44-48.
Cui Yahui, Liu Zhansheng, Ye Jianhuai, et al. Dynamic model and numerical simulation of multi-stage gear-rotor-bearing system[J]. Mechanical Power Transmission, 2009, 33(6): 44-48. (in Chinese)

[20] 张义民，何永慧，朱丽莎，等．多平行轴齿轮耦合转子系统的振动响应[J]．振动、测试与诊断，2012，32(4)：527-531.
Zhang Yimin, He Yonghui, Zhu Lisha, et al. Vibration response of multi-shaft rotor system with coupled gear mesh[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(4): 527-531. (in Chinese)

第一作者简介：马辉，男，1978 年 9 月生，博士、副教授。主要研究方向为旋转机械动力学与故障诊断两个相关领域的理论与技术应用的研究工作。曾发表《Time-frequency features of two types of coupled rub-impact faults in rotor systems》(《Journal of Sound and Vibration》2009, Vol. 321, No. 3-5)等论文。
E-mail：huima@me.neu.edu.cn