第 34 卷第 4 期
2014 年 8 月
振动、测试与诊断
Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis
Vol. 34 No. 4
Aug. 2014

基于灰色线性回归组合模型的故障率预测*

邵延君[1]， 潘宏侠[1]， 马春茂[2]， 刘永姜[1]
(1. 中北大学机械工程与自动化学院 太原，030051) (2. 西北机电工程研究所 咸阳，712099)

摘要 针对武器装备在使用过程中故障率变化的复杂性，提出了灰色线性回归组合模型的故障率预测方法。该模型用线性回归方程和指数方程的和来拟合故障率曲线，它可以改善线性回归模型中没有指数增长趋势和GM(1,1)模型中没有线性因素的不足。通过对装备备件故障率的预测分析表明，灰色线性回归组合模型在故障率预测精度上优于单一的灰色模型和线性回归模型，且不要求对所提供的历史数据具有典型的分布规律。该模型的预测结果可以为装备的维修工作提供决策依据。

关键词 GM(1,1)模型；线性回归模型；灰色线性回归组合模型；故障率
中图分类号 TH318

1 问题的引出

通过对大量使用和试验中得到的故障数据进行统计分析，得到故障率随时间变化的典型故障率曲线，人们形象地把它称为“浴盆曲线”[1]。根据该曲线可将产品的寿命分为早期故障期、偶然故障期和耗损故障期 3 个阶段。由于装备复杂程度和使用环境的不同，故障规律存在较大差别，因此“浴盆曲线”并不适用于所有装备。近几年，美军对装备的故障率曲线作了大量研究，总结出 6 种基本类型的故障率曲线，其故障率 $\lambda(t)$ 的曲线[2-3]如图 1 所示。

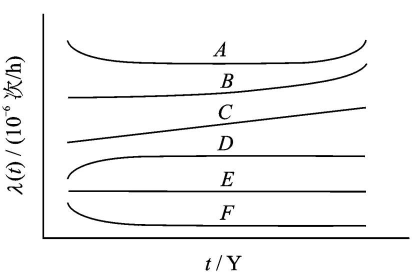

图 1 故障率曲线

Fig. 1 Failure rate curve

通过对故障率曲线进行分析，发现故障率在不同的阶段基本服从于指数分布和线性分布。针对故障率原始数据比较少的问题，考虑利用灰色系统模型对其进行预测。灰色理论为“少数据”、“贫信息”、“不确定性”故障率预测提供了一种新的途径和方法，它一般只需 4 个以上的数据即可，且不要求数据有典型的分布规律，计算简便，易于掌握，模型的拟合精度较高[4]。但是，灰色系统模型是用指数函数来模拟生成数据的，一般只适用于呈指数变化的情况，难以描述序列数据出现异常变化趋势。因此，为了预测既有线性趋势又有指数趋势的故障率，用灰色线性回归组合模型来预测武器备件的故障率，这样可以改善线性回归模型中没有指数增长趋势和灰色 GM(1,1)模型中没有线性因素的不足。用线性回归方程和指数方程的和来拟合故障率曲线，能充分发挥灰色系统少数据建模和回归模型因素相关的优势，提高预测精度。对故障率的准确预测可以有效指导备件贮存，降低维修保障费用，在提高战备完好率、任务成功率及避免因故障造成巨大损失等方面具有重大意义[5-14]。

2 模型的建立

2.1 灰色 GM(1.1)模型

设 $X^{(0)}$ 为非负原始序列，$X^{(0)}=(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \cdots, x^{(0)}(n))$，对原始序列 $X^{(0)}$ 进行一次累加生成，得到新的数据列 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n))$。其中：$x^{(1)}(t)=\sum_{i=1}^{t} x^{(0)}(i)$，$(t=1,2,\cdots,n)$。

* 国家自然科学基金资助项目(51175480)；山西省自然科学基金资助项目(2012011046-12)
收稿日期：2012-09-17；修回日期：2012-12-03

对生成的序列 $X^{(1)}(t)$ 有一阶线性白化微分方程 $\mathrm{d}x^{(1)}/\mathrm{d}t+ax^{(1)}=b$，当 t 取单位时间时，一阶微分方程的差分形式等于微分形式，$\mathrm{d}x^{(1)}/\mathrm{d}t=x^{(1)}(t+1)-x^{(1)}(t)=x^{(0)}(t)$，所以 GM(1,1)模型的微分方程可以表示为 $x^{(0)}(t)+ax^{(1)}(t)=b$，称为 GM(1,1)模型的原始形式。

为了使一次累加生成序列更平滑，对 $X^{(1)}$ 作紧邻均值生成，$Z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),z^{(1)}(4),\cdots,z^{(1)}(n))$。其中：$z^{(1)}(t)=0.5(x^{(1)}(t)+x^{(1)}(t-1))$，$x^{(0)}(t)+aZ^{(1)}(t)=b$ 为 GM(1,1)模型的基本形式；a 为发展系数；b 为灰作用量；$Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列。

对 GM(1,1)模型基本形式的参数 a，b 进行求解。a 和 b 的数值通过最小二乘法估计得到

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & 1 \\ -Z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -Z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$；$\boldsymbol{Y}=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n))^{\mathrm{T}}$。

将 a 和 b 的数值代入 GM(1,1)模型白化方程 $\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b$，得到 GM(1,1)模型的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(t+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})\mathrm{e}^{-at}+\frac{b}{a} \quad (t=1,2,\cdots,n-1) \tag{2}$$

其形式可记为 $\hat{x}^{(1)}(t+1)=c_1\mathrm{e}^{-ut}+c_2$，进行累减还原得到

$$\hat{x}^{(0)}(t+1)=\hat{x}^{(1)}(t+1)-\hat{x}^{(1)}(t) \quad (t=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

2.2　线性回归模型

回归分析（regression analysis，简称 RA）是研究一个随机变量 Y 对另一个随机变量 X 或一组 $(X_1,X_2,\cdots,X_k)$ 变量的相依关系的统计分析方法。寻找并建立武器备件的故障率因变量与工作年份自变量之间的相关关系模型，根据工作年份这个自变量的未来值来预测武器备件的故障率，建立回归模型为

$$X(t)=at+b \tag{4}$$

其中：t 为备件的工作年份；$X(t)$ 为备件故障率。

2.3　灰色线性回归组合模型

用线性回归方程及指数方程的和来拟合累加生成序列 $x^{(1)}(t)$，可将生成序列写成

$$\hat{x}^{(1)}(t+1)=c_1e^{-ut}+c_2t+c_3 \tag{5}$$

其中：u，C_1，C_2，C_3 为待定参数。

设　$$Z(t)=\hat{x}^{(1)}(t+1)-\hat{x}^{(1)}(t) \quad (t=1,2,\cdots,n-1) \tag{6}$$

设　$$Y_m(t)=Z(t+m)-Z(t) \quad (m=1,2,\cdots,n-3;t=1,2,\cdots,n-m-2) \tag{7}$$

可得 $u=\ln[Y_{(m)}(t+1)/Y_{(m)}(t)]$，将式(5)中的 $\hat{x}^{(1)}$ 换成 $x^{(1)}$，得到 u 的近似解 $\tilde{V}$，取不同的 m 值可以得到不同的 $\tilde{V}$，以它们的平均值作为 u 的估值。

计算 $\tilde{V}_m(t)$：$\tilde{V}_{(m)}(t)=\ln[Y_{(m)}(t+1)/Y_{(m)}(t)]$，计算 $\tilde{V}$ 的个数为 $(n-2)(n-3)/2$，即

$$\hat{V}=\frac{\sum_{m=1}^{n-3}\sum_{t=1}^{n-m-2}\tilde{V}_m(t)}{(n-2)(n-3)/2} \tag{8}$$

令 $L(t)=e^{\hat{V}t}$，则 $\hat{x}^{(1)}(t)=c_1L(t)+c_2t+c_3$。

利用最小二乘法解得

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(1)} \tag{9}$$

其中：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} L(1) & 1 & 1 \\ L(2) & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L(n) & n & 1 \end{bmatrix}$；$\boldsymbol{X}^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))^{\mathrm{T}}$。

得到生成序列的预测值为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=c_1e^{\hat{V}t}+c_2t+c_3$$

可以看出，若 $c_1=0$，则一次累加生产序列为线性回归模型，若 $c_2=0$，则累加生成序列为GM(1,1)，新模型使线性回归模型中不含指数增长趋势及GM(1,1)模型中不含线性因素的情形得到改善。

进行累减还原

$$\hat{x}^{(0)}(t+1)=\hat{x}^{(1)}(t+1)-\hat{x}^{(1)}(t) \quad (t=1,2,\cdots,n) \tag{10}$$

3　实例分析

某装备修复性的维修任务均由某军械维修保障中心负责，所有备件的维修和更换均通过该维修保障中心，军械维修保障中心的数据可以客观准确地反映备件更换和损耗量情况。通过对某武器备件的资料查阅可知某武器备件损耗期的故障率。表 1 为近 9 年某武器备件在正常使用情况下损耗期的故障率。从表 1 可以看出，备件的故障率随使用年限的增加呈现出增加的趋势，但有明显的波动性。这里利用上述 3 种模型对故障率进行预测，其中：t 为某武器备件的工作时间（单位：年）；$\lambda(t)$ 为某武器备件

的故障率(单位:10^{-6}次/h)。

表 1 某武器备件在正常使用情况下损耗期的故障率

Tab. 1 A weapon of spare parts of wear out period failure rate be used in normal circumstances

备件使用年份(t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
备件故障率 $\lambda(t)$/(10^{-6}次·h^{-1})	3.5	3.6	3.9	4	4.1	4.3	4.7	5.4	5.9

3.1 线性回归模型预测

利用表 1 数据,用最小二乘法解得线性回归方程参数 a 和 b 的值为:$a=0.286$;$b=2.938$。将参数代入式(3)得到线性回归方程为 $X(t)=0.286t+2.938$,得到预测值 $X^{(0)}=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),x^{(0)}(4),x^{(0)}(5),x^{(0)}(6),x^{(0)}(7),x^{(0)}(8),x^{(0)}(9))=(3.51,3.80,4.08,4.37,4.65,4.94,5.23,5.51)$。

3.2 灰色模型预测

取表 1 中的数据做模拟,建立 GM(1,1)模型,则原始序列为 $X^{(0)}=(3.5,3.6,3.9,4,4.1,4.3,4.7,5.4,5.9)$,将原始数据进行一次累加生成和紧邻均值生成,得到 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的值为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-5.3 & -9.05 & -13 & -17.05 & -21.25 & -25.75 & -30.8 & -36.45\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Y}=(3.6,3.9,4,4.1,4.3,4.7,5.4,5.9)^{\mathrm{T}}$$

利用 Matlab 软件,带入 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 计算得到 a 和 b 的值为 $a=-0.078$,$b=2.7596$。将 a 和 b 代入时间响应函数(2),得到

$$\hat{x}^{(1)}(t+1)=38.88\mathrm{e}^{0.078t}-35.38$$

利用式(3)做累减还原得到 GM(1,1)模型对原始序列的模拟值为

$$\hat{x}^{(0)}(t)=(3.41,3.69,3.99,4.31,4.67,5.04,5.45,5.89)$$

3.3 灰色线性回归组合模型预测

根据建立的线性回归方程及指数方程来建立灰色线性回归组合模型,利用式(6)~(8)及 Matlab 软件计算 $\hat{V}$ 的值为

$$\hat{V}=\frac{\sum_{m=1}^{n-3}\sum_{t=1}^{n-m-2}\tilde{V}_m}{(n-2)(n-3)/2}=0.208$$

根据式(5),得到灰色线性回归组合模型为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=c_1\mathrm{e}^{\hat{V}t}+c_2t+c_3=c_1\mathrm{e}^{0.208t}+c_2t+c_3$$

根据式(9),利用 Matlab 软件的矩阵运算工具得到参数 C 的值为

$$C_1=2.33,\ C_2=2.93,\ C_3=-2.23$$

得到灰色线性回归组合模型为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=2.33\mathrm{e}^{0.208t}+2.93t-2.23$$

得到灰色线性回归组合模型的预测值为

$$\hat{x}^{(0)}(t)=(3.59,3.85,3.97,4.14,4.43,4.74,5.44,5.88)$$

3.4 误差检验及拟合分析

对 3 种模型的预测值和实际值进行拟合,拟合图如图 2 所示。检验 3 种模型的预测精度,模型的误差检验如表 2 所示。

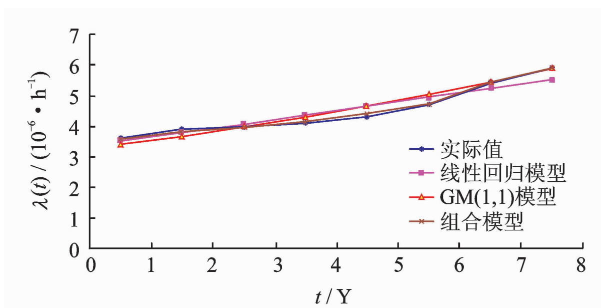

图 2 预测值和实际值的拟合图

Fig. 2 Fitting chart of predicted value and actual value

表 2 模型误差检验表

Tab. 2 Model error check list

年份	实际值	线性回归模型		GM(1,1)模型		组合模型	
		预测值	相对误差/%	预测值	相对误差/%	预测值	相对误差差/%
2	3.6	3.51	2.50	3.41	5.28	3.59	0.28
3	3.9	3.80	2.56	3.69	5.38	3.85	1.28
4	4.0	4.08	2.00	3.99	0.25	3.97	0.75
5	4.1	4.37	6.60	4.31	5.10	4.14	1.00
6	4.3	4.65	8.10	4.67	8.60	4.43	3.00
7	4.7	4.94	5.10	5.04	7.20	4.74	0.90
8	5.4	5.23	3.15	5.45	0.90	5.44	0.70
9	5.9	5.51	6.61	5.89	0.17	5.88	0.34
平均相对误差/%		4.58		4.11		1.03	

通过上述实例平均相对误差的结果比较和实际值与预测值的拟合情况分析可知，虽然 3 种模型都可以进行故障率的预测，但是组合模型较灰色 GM(1,1)模型和线性回归模型的故障率预测精度有所提高。

4　结束语

利用线性回归分析和灰色 GM(1,1)模型及灰色线性回归组合模型对装备备件的故障率进行预测，通过结果比较和分析可知，灰色线性回归组合模型是用线性回归方程和指数方程的和来拟合故障率曲线，能充分发挥灰色系统少数据建模和回归模型因素相关的优势，能够综合线性和指数等多种信息，且不要求数据有典型的分布规律，在预测精度上优于单一的灰色模型和线性回归模型。将该模型用于备件故障率预测具有一定的精确性和可行性，能够为装备的维修决策提供可靠依据。

参　考　文　献

[1]　甘茂治，康建设，高崎. 军用装备维修工程学[M]. 北京：国防工业出版社，2005：33-36.

[2]　陈凤腾，左洪福，倪现存. 基于广义更新过程的航空备件需求和应用[J]. 应用科学学报，2007，25(5)：526-530.
Chen Fengteng, Zuo Hongfu, Ni Xiancun. Demand and application of aero-spare parts based on generalized renewal process [J]. Journal of Applied Sciences, 2007，25(5)：526-530. (in Chinese)

[3]　莫布雷 J. 以可靠性为中心的维修[M]. 北京：机械工业出版社，1995：48-54.

[4]　侯丽敏，马国峰. 基于灰色线性回归组合模型铁路客运量预测[J]. 计算机仿真，2011，28(7)：1-3.
Hou Limin, Ma Guofeng. Forecast of railway passenger traffic based on a grey linear regression combined model[J]. Computer Simulation, 2011，28(7)：1-3. (in Chinese)

[5]　马秀红，宋建社，董晟飞. 基于回归分析的备件故障率预测模型[J]. 计算机仿真，2003，20(11)：6-8.
Ma Xiuhong, Song Jianshe, Dong Yanfei. Model of spare parts failure rate based on linear regression[J]. Computer Simulation, 2003，20(11)：6-8. (in Chinese)

[6]　许绍杰，谭贤四. 基于多因素不等时距灰色模型的雷达故障预测[J]. 现代雷达，2011，33(8)：26-28.
Xu Shaojie, Tan Xiansi. A MUGM (1，m，w) model of radar fault prediction[J]. Modern Radar, 2011, 33(8)：26-28. (in Chinese)

[7]　董晟飞，马秀红. 基于回归分析的故障率预测模型[J]. 可靠性技术，2005(5)：28-29.
Dong Yanfei, Ma Xiuhong. Study on failure rate prediction model based on linear regression[J]. Reliability Technology, 2005(5)：28-29. (in Chinese)

[8]　刘思峰，郭天榜，党耀国，等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2010：182-187.

[9]　陈秀瑛，古浩. 灰色线性回归模型在港口吞吐量预测中的应用[J]. 水运工程，2010(5)：89-92.
Chen Xiuying, Gu Hao. Application of gray linear regression model for forecast of port throughput[J]. Port & Waterway Engineering, 2010(5)：89-92. (in Chinese)

[10]　张弦，王宏力. 基于支持向量经验模态分解的故障率时间序列预测[J]. 航空学报，2011，32(3)：480-487.
Zhang Xian, Wang Hongli. Failure rate time series prediction based on support vector empirical mode decomposition[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011，32(3)：480-487. (in Chinese)

[11]　任伟建，李永峰，韩生梅，等. 基于灰色线性回归模型的预测控制[J]. 系统仿真技术，2012，8(2)：144-147.
Ren Weijian, Li Yongfeng, Han Shengmei, et al. Predictive control based on the grey linear regression combined model [J]. System Simulation Technology, 2012，8(2)：144-147. (in Chinese)

[12]　鲍一丹，吴燕萍，何勇. 基于 GM(1,1)模型和线性回归的组合预测新方法[J]. 系统工程理论与实践，2004(3)：95-98.
Bao Yidan, Wu Yanping, He Yong. A new forecasting model based on the combination of GM (1，1) model and linear regression[J]. System Engineering Theory and Practice, 2004(3)：95-98. (in Chinese)

[13]　贾爱芹，陈建军. 模糊灰色关联法在制动系故障诊断中的应用[J]. 振动、测试与诊断，2011，31(6)：690-693.
Jia Aiqin, Chen Jianjun. Application of improved fuzzy gray relational method to fault diagnosis of braking system[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011，31(6)：690-693. (in Chinese)

[14]　秦海勤，徐可君，隋育松，等. 基于系统信息融合的滚动轴承故障模式识别[J]. 振动、测试与诊断，2011，31(3)：372-376.
Qin Haiqin, Xu Kejun, Sui Yusong, et al. Rolling bearing fault pattern recognition based on fusing random, gray and fuzzy information[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011，31(3)：372-376. (in Chinese)

第一作者简介：邵延君，男，1972 年 11 月生，博士、讲师。主要研究方向为装备保障与维修。曾发表《装备维修备件存储对策》(《兵工自动化》2013 年第 32 卷第 5 期)等论文。
E-mail：syjbkd@163.com