连接界面不定性对筋板结构中频振动的影响*

纪　琳[1]，　黄震宇[2]
（1. 山东大学机械学院　济南，250061）（2. 上海交通大学信息与自动化学院　上海，210014）

摘要　以一个具有典型中频振动特征的简单梁板组合结构为例，讨论了连接界面不定性对于工程中常用的筋板类结构振动响应的主要影响特征以及对于中频混合模型法（hybrid FE/SEA method）的计算有效性与准确性的一般影响规律。分析表明：连接界面自由度数目不确定性的影响比连接界面位置的不确定性的影响更为显著，尤其是当界面自由度数目较少的情况下，随着筋板间的动态特性差异的增大，连接界面不定性的影响逐渐增强。采用中频混合模型法进行计算时应尽量减小连接界面自由度数目的不确定性，这对于梁板间具有较大动态特性差异的筋板组合结构的中频振动响应的准确预测来说显得尤为重要。

关键词　中频振动；长波子系统；短波子系统；筋板组合结构；混合模型法
中图分类号　TB53；O32；TH11

1　问题的引出

筋板组合结构作为工程中的常用结构，其动态响应通常由筋所引起的长波变形和板所产生的短波变形共同组成。其中，长波变形对于组合系统的整体运动形式有着主导性的影响，而短波变形仅对于系统的局部运动产生影响。由于此类运动形式的复杂性，使得传统的低频确定性分析方法，如有限元法（finite element analysis，简称 FEA）和高频统计性分析方法，如统计能量法（statistical energy analysis，简称 SEA）均不能够有效适用。因此，学术界将有着显著长、短波变形共存的振动定义为中频振动[1]。同时，由于系统的中频振动往往是由于系统中含有动态特性差异悬殊的子系统造成的，因此又将这类系统泛称为复杂组合系统[1]。

复杂组合系统的中频振动问题引起了越来越多的关注[2]。目前，解决中频振动问题较为广泛使用的是混合模型法[3-8]，主要原理是将不同类型的子系统采用不同的分析方法分别进行描述。混合模型法中理论发展最为完善、影响力最广的是将 FEA 方法与 SEA 方法通过扩散场互逆性关系[9]而建立的 hybrid FE/SEA 法[10]，其计算有效性和实用性获得学术界和工程界的广泛认知[11-12]。值得一提的是，该混合模型法将所有子系统间的连接边界均视为确定性子系统的一个组成部分，没有考虑连接边界的不确定问题。在实际工程中，由于制造、安装、装配、磨损和老化等因素存在，子系统间连接边界的参数不定性是不可避免的[13]。显然，连接界面的参数不定性将会在某种程度上对组合系统的长波和短波变形部分均产生一定的影响。

为了探讨连接边界的参数不定性对于筋板类结构中频振动响应的主要影响规律，笔者建立起一个简单的梁-板模型，如图 1 所示。从连接点数目的不确定性和连接边界位置的不确定性两个方面，量化分析连接界面不定性对于梁的动态响应和板的能量响应的影响特性，并结合 hybrid FE/SEA 的计算结果，讨论该混合模型法计算的有效性受界面不定性影响的关系。

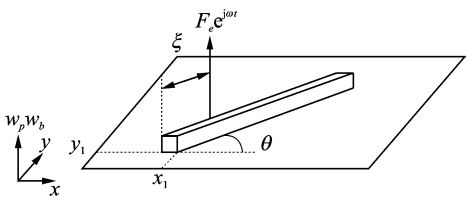


图 1　简单梁板组合模型
Fig. 1　A simple beam-plate model

* 国家自然科学基金资助项目（51175300）；山东省自然科学基金资助项目（ZR2011EEM009）
收稿日期：2013-01-02；修回日期：2013-03-28

笔者首先对 hybrid FE/SEA 的主要理论结果进行了简要介绍；然后分别改变图 1 中梁板间连接点的数量和位置，采用子模态解析法[6]和 hybrid FE/SEA 方法[10]计算梁在激励点处的速度响应和板的统计能量响应；最后，对比分析这两种计算方法所得出的计算结果，探讨连接界面不定性对于系统中频响应以及 hybrid FE/SEA 计算有效性的一般影响规律。

2　hybrid FE/SEA 方法理论

2.1　理论原理简介

hybrid FE/SEA 混合模型法是由中频振动研究领域的先锋人物 Robin Langley 及其研究小组专门针对复杂组合系统的中频振动而提出的[9-10]。它的建模特点是：将复杂组合系统划分为确定性子系统（deterministic subsystems）和非确定性子系统（un-deterministic subsystems），对于不同类型的子系统进行相应的动态描述。其中，确定性子系统的结构、材料属性以及边界条件均具有确定性，而非确定性子系统的结构、材料属性及边界条件等具有相当程度的随机不定性。确定性子系统中还包括子系统间（包括非确定性子系统与确定性子系统间和非确定性子系统与非确定性子系统间）相连接的边界部分（称为“确定性边界”）及外部激振力的作用位置，而非确定性子系统的其他边界部分被定义为回响边界或随机边界。对于确定性子系统采用有限元模型来描述，对于系统其余的组成部分（即非确定性子系统）均描述为统计能量法模型。

该方法的求解过程具有鲜明的特点[11]：对于每个 SEA 子系统建立能量平衡方程，通过联立求解获得各 SEA 子系统的统计能量响应后，再利用 SEA 子系统的回响场在其确定性边界处所产生的力载荷与子系统的能量响应在均体平均意义上的比例关系（即扩散场互逆性关系），将组合系统的 FE 子系统的位移响应与 SEA 子系统的能量响应从统计的角度建立起联系，最终求得 FE 子系统的平均位移响应。

2.2　主要理论结果

根据 hybrid FE/SEA 理论，第 j 个 SEA 子系统的能量平衡方程可表达为

$$\omega(\eta_j+\eta_{d,j})E_j+\sum_{k=1}^{N}\omega\eta_{jk}n_j\left(\frac{E_j}{n_j}-\frac{E_k}{n_k}\right)=P_{\mathrm{in},j}^{\mathrm{ext}} \tag{1}$$

其中：n_j，η_j 和 E_j 分别为第 j 个 SEA 子系统的模态密度、阻尼损耗因子和统计能量响应；$\eta_{d,j}$ 为 SEA 子系统 j 的回响场与 FE 子系统间的功率流耦合损耗因子；η_{jk} 为 SEA 子系统 j 与 SEA 子系统 k 之间的功率流耦合损耗因子；$P_{\mathrm{in},j}^{\mathrm{ext}}$ 表示由外部激振力输入到 SEA 子系统 j 直接场中的功率流。

相应的计算表达式分别为

$$\eta_{d,j}=\frac{2}{\pi\omega n_j}\sum_{rs}\mathrm{Im}\{D_{d,rs}\}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1}\mathrm{Im}\{\boldsymbol{D}_{\mathrm{dir}}^{(j)}\}\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1^H})_{rs} \tag{2}$$

$$\eta_{jk}=\frac{2}{\pi\omega n_j}\sum_{rs}[\mathrm{Im}\{D_{\mathrm{dir},rs}^{(j)}\}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1}\mathrm{Im}\{\boldsymbol{D}_{\mathrm{dir}}^{(k)}\}\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1^H})_{rs}] \tag{3}$$

$$P_{\mathrm{in},j}^{\mathrm{ext}}=\frac{\omega}{2}\sum_{rs}[\mathrm{Im}\{D_{\mathrm{dir},rs}^{(j)}\}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1}\boldsymbol{S}_{ff}\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1^H})_{rs}] \tag{4}$$

其中：r 和 s 为 SEA 子系统 j 在确定性边界处的自由度；$\boldsymbol{D}_{\mathrm{dir}}^{(j)}$ 为第 j 个 SEA 子系统的直场动刚度矩阵；$\boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}$ 为连接边界处 FE 子系统自身的动刚度矩阵；$\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}$ 为 FE 子系统的总动刚度矩阵，且

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{D}_{\mathrm{d}}+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{D}_{\mathrm{dir}}^{(k)} \tag{5}$$

$\boldsymbol{S}_{ff}$ 为外部激振力 $\boldsymbol{f}$ 的均体平均的互谱矩阵，有

$$\boldsymbol{S}_{ff}=\mathrm{E}[\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^{\mathrm{H}}] \tag{6}$$

其中：E[·]表示均体平均；上标 H 表示矩阵的共轭转置。

根据式(1)，对于组合系统中的所有 N 个 SEA 子系统可以建立 N 个能量平衡方程，联立求解就可以得出每个 SEA 子系统的统计能量响应。

在得出各个 SEA 子系统的统计能量响应之后，FE 子系统的平均位移响应互谱矩阵可以表达为

$$\boldsymbol{S}_{qq}=\mathrm{E}[\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{\mathrm{H}}]=\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1}\left[\boldsymbol{S}_{ff}+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{4E_k}{\omega\pi n_k}\right)\mathrm{Im}\{\boldsymbol{D}_{\mathrm{dir}}^{(k)}\}\right]\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1\mathrm{H}} \tag{7}$$

值得注意的是，以上计算结果给出的是组合系统在群体平均意义上的响应值，因此混合模仿法的计算结果与某一个具体的模型的真实响应值之间是存在差异的。

3　梁-板数例模型

图 1 为一个简单的梁-板组合模型。其中，梁为矩形截面欧拉梁，边界条件为两端自由，而板为匀质矩形薄板，边界条件为四边简支，梁板间为刚性连

接，且在梁上 ξ 处作用一频率为 ω 的单位简谐激振力。梁与板的材料特性如表 1 所示，其结构与尺寸参数如表 2 所示。

由于工程实际中筋板结构的连接一般是通过不可拆卸的焊接、铆接或可拆卸的螺纹连接来实现的，因此对于图 1 中的梁-板连接界面采用一组刚性固接点进行模拟。显然，梁的位移响应和板的统计能量响应在某种程度上与连接点的数目和位置有关。

表 1 梁板模型的材料属性

Tab. 1 Material properties of the model

弹性模量/(GN·m^{-2})	质量密度/(kg·m^{-3})	泊松比	阻尼损耗系数
210	7 850	0.3	0.01

表 2 梁板模型的结构及连接尺寸

Tab. 2 Dimensional sizes and the interface locations

梁的结构尺寸/m	长度为 2.0；矩形截面宽度为0.03；矩形截面高度为 0.04
板的结构尺寸/m	长度为 2.0；宽度为 0.9；厚度为 0.002或 0.005
连接边界起始位置/m	$x_1=0.02$，$y_1=0.30$，$\theta=10°$
激振力/m	$\xi=0.73$

将梁板间连接边界处的连接点名义数目定义 20 个，连接点间的名义间距定义为均布。当连接点的实际数目/间距等假定与名义值之间有所变化时，通过对比子系统模态解析法[6]的精确计算结果和 hybrid FE/SEA 混合模型计算结果，演示说明连接边界的不确定性对于筋板类组合系统中频振动响应的影响特征。

这里应该指出的是：a. 尽管 θ 在数例模型中选定为 10°，但数例研究表明，θ 值的改变并不影响得出相同的数例分析结论；b. 对于图 1 中的梁和板的物理参数（材料、尺寸）和边界参数情况，所对应梁和板的子模态特性都可以表达为精确的解析式，此时由子系统模态法[6]得出的计算结果可作为该梁板组合结构动态响应的精确解。

4 计算结果分析

4.1 梁板间动态特性差异对于混合模型计算有效性的影响

图 2 和图 3 首先比较了连接点数目为名义值且沿连接边界均布条件下，板厚分别为 2 mm 和5 mm（梁板间的波长比 λ_b/λ_p 分别为 4.37 和 2.76）时，由子模态解析法和混合模型法计算得出的梁在激振力作用点处的速度响应和板的统计能量响应的对比情况。可见，板厚为 2 mm 时，混合模型法的计算精度显著优于板厚为 5 mm 的情况。这表明在 FE 子系统（梁）和连接边界条件完全相同的条件下，梁板间的动态特性差异愈大（表现为梁板的波长比越大），混合模型法的计算准确有效性越好。事实上，当梁板间的波长比小于 2.5 且连接边界的自由度数目较多时，应当谨慎采用混合模型法[1]。

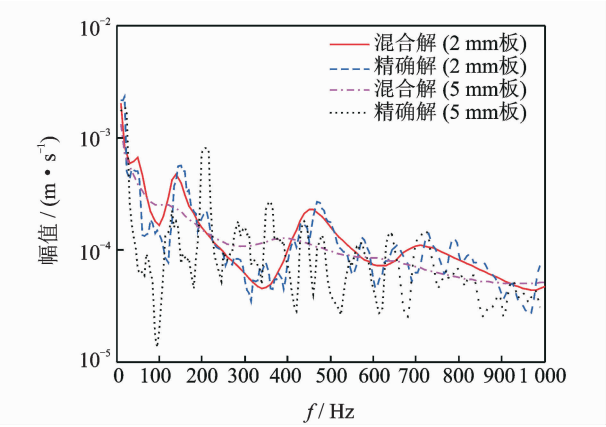


图 2 梁在激振力作用点处的速度响应幅值

Fig. 2 The velocity response of the beam at the forcing point

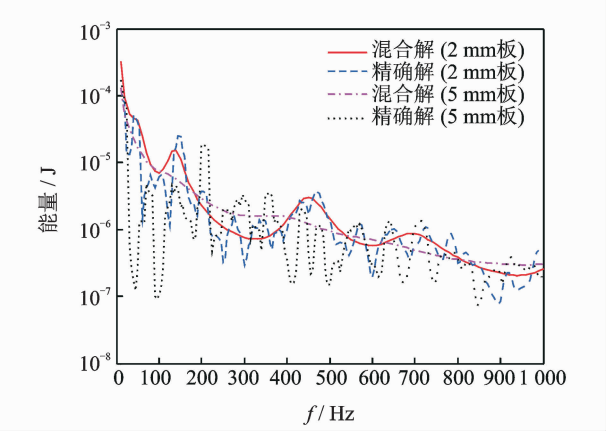


图 3 板的统计能量响应

Fig. 3 The statistical energy response of the plate

4.2 连接点数量对于中频振动响应的影响

图 4，5 是板厚为 2 mm 条件下，梁板间实际连接点数目围绕其名义值作较小范围（±4 mm）的上下浮动时，混合模型法的计算结果对比。可见：a. 随着频率的升高，混合模型法的计算结果受连接点数

量不定性的影响逐渐增强；b. 随着连接点数量的增多，混合模型法的计算结果受连接点数目变化的影响逐渐减小。这就意味着当梁板间具有较少的连接点数量，且间距相对于板波长较大时，采用混合模型法进行计算时应当确保连接点数目的准确性；反之，若梁板间连接点数目较大，使得连接点间的间距相对于板的波长较小时，混合模型法的计算结果受连接边界自由度数目的不定性的影响较弱。

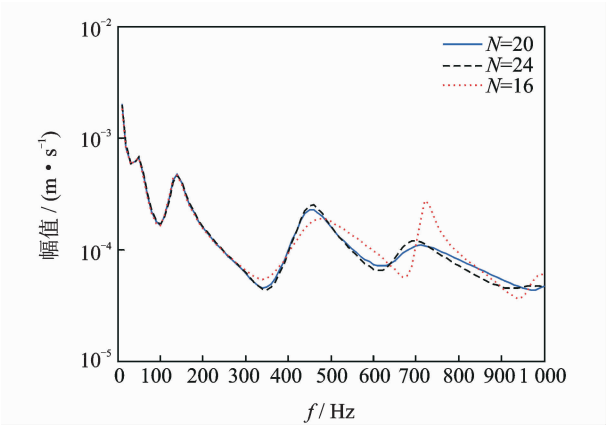


图 4　连接点数目对于梁的速度响应幅值的影响

Fig. 4　Influences of the number of interface points on the velocity response of the beam

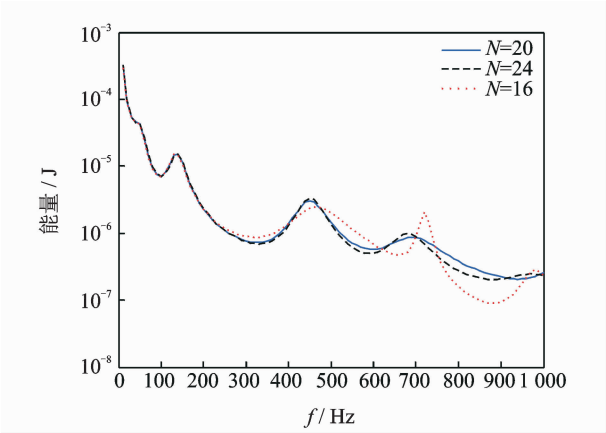


图 5　连接点数目对于板的统计能量响应的影响

Fig. 5　Influences of the number of interface points on the statistical energy response of the plate

4.3　连接点位置对于中频振动响应的影响

图 6，7 是板厚为 2 mm 且连接点数目为 20 的条件下，对应于连接点均布和非均布两种情况，混合模型法与精确计算法的计算结果对比。其中，在非均布情况下，点的间距围绕其名义间距（10 cm）在 ±5 mm 的范围内随机波动。可以看到：筋板结构的中频振动响应受连接点位置微小随机变化（波动量仅为名义间距的 5%左右）的影响不大。

图 6，7 表明，当筋板间存在着较大的连接界面自由度时，系统的中频振动响应受连接界面位置的微小随机不定性的影响很小。因此，采用混合模型法计算时可以忽略连接边界处连接位置的不确定性。

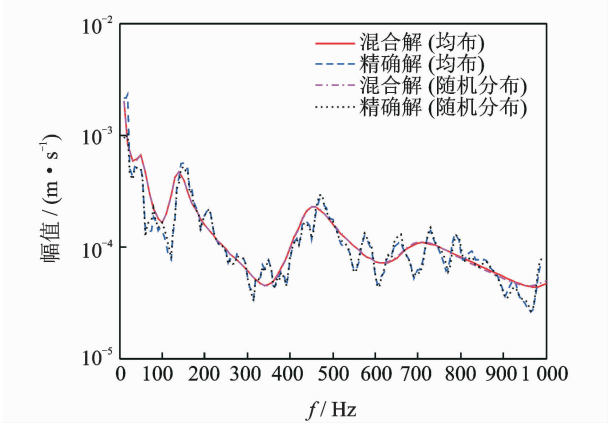


图 6　连接点位置对于梁的速度响应幅值的影响

Fig. 6　Influences of the interface locations on the statistical energy response of the plate

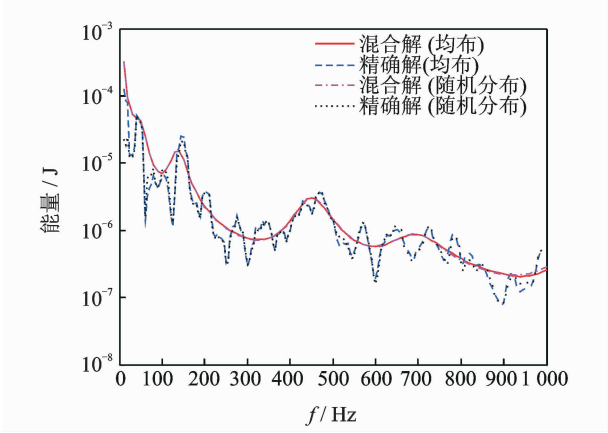


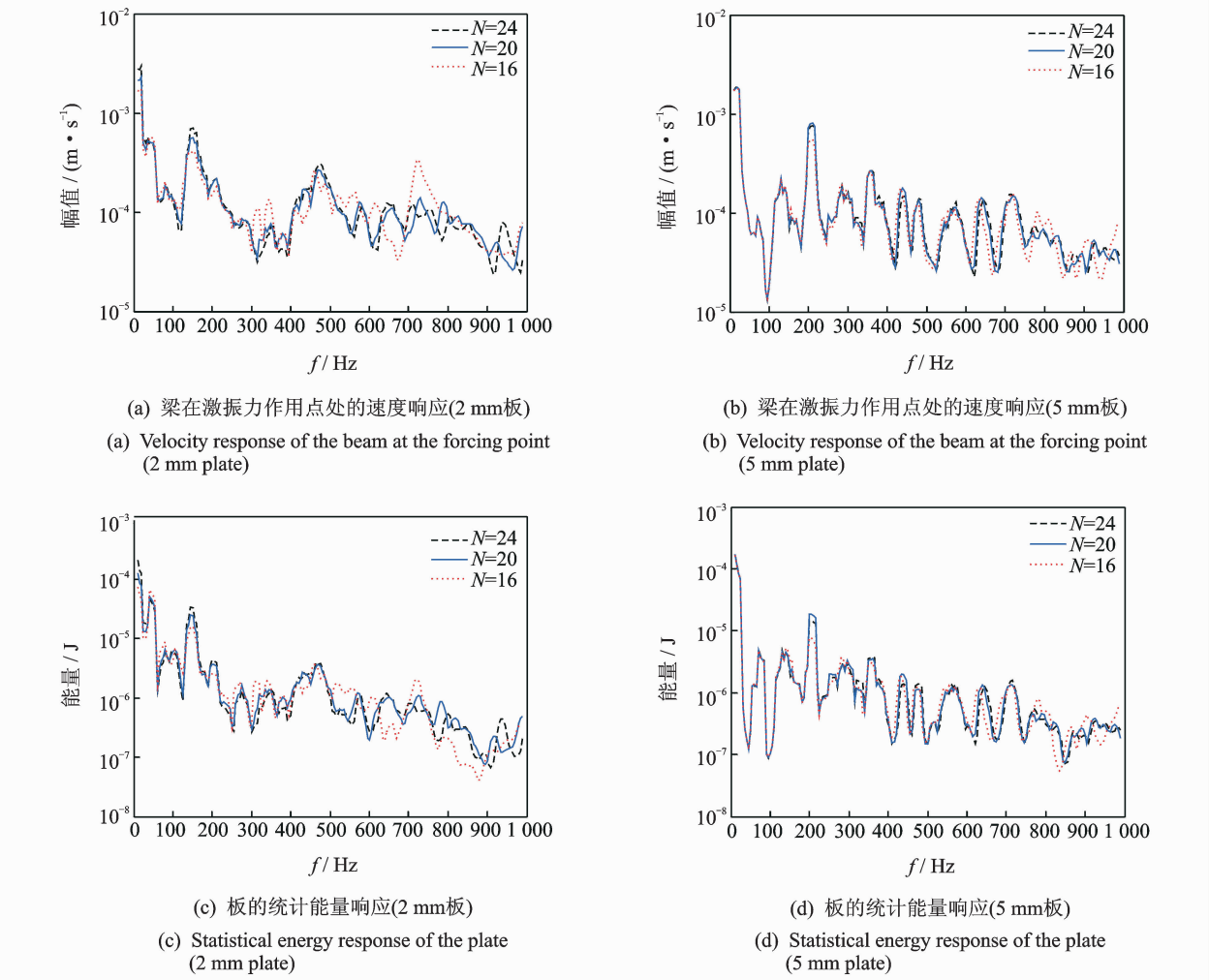
图 7　连接点位置对于板的统计能量响应的影响

Fig. 7　Influences of the interface locations on the statistical energy response of the plate

4.4　梁板间动态特性差异与界面不定性的影响

为了探讨梁板间动态特性差异与连接界面不定性的影响关系，图 8 比较了板厚为 2 mm 和 5 mm 时，连接点数目变化对于梁板动态响应的影响情况，这里采用的计算方法为子模态解析法。

图 8 中各小图均清晰地表明：随着梁板动态特性差异的增大，界面参数不定性对于梁板动态响应的影响逐渐增大。这就意味着，当梁板间具有较大动态特性差异（如 $\lambda_b/\lambda_p>3.5$），尤其是连接界面自由度数目较少时，连接界面不定性将对于混合模型法的计算结果产生显著影响。



(a) 梁在激振力作用点处的速度响应(2 mm板)

(a) Velocity response of the beam at the forcing point (2 mm plate)

(b) 梁在激振力作用点处的速度响应(5 mm板)

(b) Velocity response of the beam at the forcing point (5 mm plate)

(c) 板的统计能量响应(2 mm板)

(c) Statistical energy response of the plate (2 mm plate)

(d) 板的统计能量响应(5 mm板)

(d) Statistical energy response of the plate (5 mm plate)

图 8 梁板间动态特性差异与连接界面不定性影响的关系

Fig. 8 Co-influences of the dynamic mismatch and the interface uncertainty

5 结束语

笔者以一个简单的梁板组合结构为例，从连接点位置的不确定性和连接界面自由度数目的不确定性两个方面，探讨了连接界面不定性对于具有典型中频振动特征的筋板类组合结构振动响应的影响特征及连接界面不定性对于 hybrid FE/SEA 混合模型法计算可靠性与准确性的一般影响规律。分析计算表明：a. 连接界面不定性的影响首先表现为连接界面自由度数目不定性的影响，尤其是当界面自由度数目较少，并使得各自由度间的间距大于板的波长时，界面自由度不定性的影响不可忽略；b. 连接界面位置的不确定性的影响相对较小，在采用混合模型法计算时一般可忽略；c. 随着筋板子系统间动态特性差异的增大，连接边界处的不定性对于系统中频响应的影响逐渐增大。

可以得出以下推论：当筋板类组合结构的子系统间具有较大动态特性差异（如 $\lambda_b/\lambda_p>3.5$），尤其是连接界面自由度数目较少时，连接界面不定性将对于混合模型法的计算结果产生显著影响。由于混合模型法尤其适用于子系统间动态特性差异较大的场合，因此要提高混合模型法的计算可靠性与准确性，需要能够准确模拟子系统间的连接界面自由度数目，以大大降低连接界面不定性的影响。

参 考 文 献

[1] 纪琳. 中频振动分析方法—混合模型解析[M]. 北京：机械工业出版社，2013：7-21.

[2] Desmet W. Mid-frequency vibro-acoustic modelling: challenges and potential solutions[C]// Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration

Engineering. Leuven, Belgium: KU Leuven, 2002, 2: 835-862.

[3] Langley R S, Bremner P. A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems [J]. Journal of Acoustic Society of America, 1999 (105): 1657-1671.

[4] Grice R M, Pinnington R J. A method for the vibration analysis of built-up structures, part II: analysis of the plate-stiffened beam using a combination of finite element analysis and analytical impedances[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000(230): 851-875.

[5] Zhao X, Vlahopoulos N. A basic hybrid finite element formulation for mid-frequency analysis of beams connected at an arbitrary angle[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004(269): 135-164.

[6] Ji L, Mace B R, Pinnington R J. A mode-based approach for the mid-frequency vibration analysis of coupled long-and short-wavelength structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006(289): 148-170.

[7] Hong S B, Wang A, Vlahopoulos N. A hybrid finite element formulation for a beam-plate system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006(298): 233-256.

[8] Pratellesi A, Viktorovitch M, Baldanzini N, et al. A hybrid formulation for mid-frequency analysis of assembled structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008(309): 545-568.

[9] Shorter P J, Langley R S. On the reciprocity relationship between direct field radiation and diffuse reverberant loading[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2005(117): 85-95.

[10] Shorter P J, Langley R S. Vibro-acoustic analysis of complex systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005(288): 669-700.

[11] Langley R S, Shorter P J, Cotoni V. A hybrid FE/SEA method for the analysis of complex vibro-acoustic systems[C]// Proceedings of Noise and Vibration: Emerging Method. Saint-Raphael, France: [s. n.], 2005.

[12] Charpentier A, Cotoni V, Fukui K. Using the hybrid FE-SEA method to predict structure-borne noise in a car body-in-white [C] // Proceedings of Inter-Noise. Hawaii: International Institute of Noise Control Engineering, 2006.

[13] Mace B R, Worden K, Manson G. Uncertainty in structural dynamics[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005(288): 423-429.

第一作者简介：纪琳，女，1967 年 9 月生，副教授。主要研究方向为机械设计与理论、复杂系统的中高频振动与噪声的预测及控制。曾发表《A mode-based approach for the dynamic analysis of built-up structures》(《Journal of Sound and Vibration》2006，No. 289)等论文。
E-mail：jilin@sdu.edu.cn

通信作者简介：黄震宇，男，1975 年 1 月生，副教授。主要研究方向为结构动力学、声振耦合计算、智能结构和器件等。
E-mail：bighuang@sjtu.edu.cn