

含摩擦的汇流传动齿轮非线性动力学分析*

郜浩冬^{1,2}, 张以都^{1,2}

(1. 北京航空航天大学虚拟现实技术与系统国家重点实验室 北京, 100191)

(2. 北京航空航天大学机械工程及自动化学院 北京, 100191)

摘要 针对齿轮系统运行过程中具有非线性动力学特性, 为研究齿面摩擦因数对系统动力学的影响, 建立了一种考虑齿侧间隙, 齿面摩擦力和时变啮合刚度等因素的三齿轮扭转振动模型。分析了布局参数对齿面摩擦力和时变啮合刚度的影响, 研究了不同摩擦因数对系统动态响应的影响以及有无摩擦因数对系统混沌运动的影响, 通过幅频曲线研究了系统的跳跃滞后现象和齿轮碰撞运动并分析了摩擦因数对它们的影响。结果表明, 随着摩擦因数的变化, 系统表现出同周期运动并存、不同周期并存和混沌等动力学现象, 摩擦能导致混沌运动和跳跃现象提前并加大齿轮之间的碰撞运动。该结果可为汇流传动齿轮系统的非线性动态设计提供准确合理的理论参考。

关键词 布局参数; 摩擦; 混沌; 跳跃现象; 碰撞运动

中图分类号 TH113

引言

齿轮系统是工业设备中主要的传动系统, 它包含间隙, 摩擦和时变啮合刚度等非线性因素。国内外学者针对其非线性振动特性进行了大量的理论分析和实验研究^[1-9]。Vaishya 等^[10-11]建立了包含时变刚度、粘性阻尼以及滑动摩擦的齿轮动力学模型, 采用分段积分求解, 利用 Floquet 理论进行稳定性分析并研究了滑动摩擦等系统参数对系统响应的影响。Vaishya 等^[12]考虑了弹流润滑和边界润滑影响下的摩擦力, 建立了啮合刚度为线性时变, 线性时不变和非线性时变情况下的模型, 并进行了比较。Parker^[13]研究了行星齿轮系统中行星轮之间的相位对整个齿轮系统振动特性的影响, 分析了相位配置对系统振动的影响。文献^[14]考虑了齿轮修形影响下的时变啮合刚度, 通过两个直齿轮模型研究了滑动摩擦因数对齿轮啮合力和动态传动误差等系统响应的影响。文献^[15]通过直齿轮模型建立了不同形式的摩擦力, 通过实验测试了摩擦力, 实验结果与理论预测的结果较吻合。王基等^[16]针对含摩擦的单对齿轮传动系统的时变非线性模型, 利用胞映射法计算了摩擦因数、时变刚度等参数变化下的齿轮系统吸引域。

在以往对齿轮系统非线性振动研究中, 一般都以单对齿轮副的研究为主要对象, 而对于两级或多级齿轮副的研究则相对不多, 而在工程实践中齿轮传动多以多级传动为主。本研究对象是由三齿轮系统组成的汇流传动系统, 它含有与布局参数相关的两对齿轮啮合副和两对不同的摩擦力臂等参数, 在一定程度上属于多级传动, 多级传动齿轮动力学相对来讲就变得复杂一些。笔者考虑了齿侧间隙, 布局参数影响下的齿面摩擦力和时变啮合刚度等非线性因素, 建立了含有 3 个齿轮的汇流传动系统扭转振动模型, 讨论了摩擦因数等因素共同作用下系统的动态响应及其对幅频曲线的影响, 为研究工程实践中齿轮振动和噪声问题提供了理论依据。

1 齿轮系统动力学模型

1.1 汇流传动示意图

齿轮传动示意图如图 1 所示, 由两根输入轴上的齿轮 1 和齿轮 2 驱动一根输出轴上的齿轮 3 构成。3 个齿轮的几何参数、材料均一致。

1.2 布局参数影响下的摩擦力臂和时变啮合刚度

3 个齿轮的啮合传动示意图如图 2 所示。图

* 国家自然科学基金资助项目(51105025)
收稿日期: 2012-07-08; 修回日期: 2012-12-17

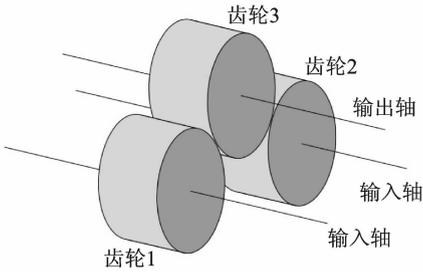


图1 汇流传动示意图

Fig. 1 Diagram of confluence transmission

中: A, B 和 C 分别为 3 根轴的轴心; r, r_g 分别为齿轮的基圆半径和齿顶圆半径; ω 为齿轮转动角速度; α 为分度圆压力角。

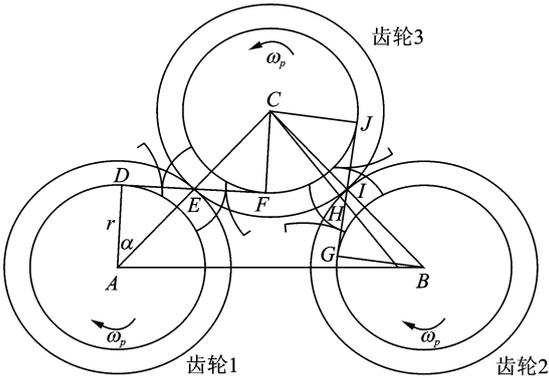


图2 齿轮啮合示意图

Fig. 2 Diagram of gear meshing

由于齿轮系统含有两个齿轮副,所以存在着左右齿轮副啮合点在各自啮合线上位置同步与否的问题。假设在某时刻左齿轮副在点 E 啮合,若左右齿轮副啮合完全同步,则右齿轮副应在点 I 啮合,但一般情况下是不能达到完全同步。左右齿轮副啮合是否同步与 3 个齿轮的布局有关。在齿轮传动过程中,输出轴上的齿轮与两个输入轴上的齿轮同时啮合,此时 $\angle ACB$ 之间的齿数可能不是整数,其中包含的分数齿数决定了左右齿轮副啮合的不同步,从而决定了左右齿轮副的啮合刚度和摩擦力臂有所不同。该齿轮系统的 3 个齿轮齿数均为 41, $\angle ACB$ 的大小为 91.3° , $\angle ACB$ 之间的齿数为 10.4, 则 $\angle HCB$ 包含的就是分数齿部分即 0.4 齿。

对于摩擦力臂而言,由于左右齿轮副啮合不同步,假设某时刻左齿轮副在点 E 啮合时,则右齿轮副在点 H 啮合,此时两者的摩擦力臂就有所不同。由于该齿轮系统的重合度系数大于 2,为了简化摩擦力的表达方式,采用一当量齿对代替所有啮合齿对。如图 2 所示, DE 为齿轮 1 与齿轮 3 啮合时摩擦力作用

齿轮 1 的力臂, EF 为齿轮 1 与齿轮 3 啮合时摩擦力作用齿轮 3 的力臂, GH 为齿轮 2 与齿轮 3 啮合时摩擦力作用齿轮 2 的力臂, HJ 为齿轮 2 与齿轮 3 啮合时摩擦力作用齿轮 3 的力臂。设 t_0 为左右齿轮副啮合不同步的时间差, τ 为单个当量齿对啮合时间,则左右齿轮副 4 个摩擦力的力臂分别为

$$l_1 = DE = 2r \tan \alpha - \sqrt{r_g^2 - r^2} + r\omega\tau$$

$$l_{13} = EF = \sqrt{r_g^2 - r^2} - r\omega\tau$$

$$l_2 = GH = 2r \tan \alpha - \sqrt{r_g^2 - r^2} + r\omega(\tau - t_0)$$

$$l_{23} = HJ = \sqrt{r_g^2 - r^2} - r\omega(\tau - t_0)$$

对于时变啮合刚度,左右齿轮副啮合刚度 k_1 和 k_2 用四阶谐波的形式表示(GB/T3480-1997),将左右齿轮副不同步的时间差变换为啮合刚度之间的相位差 β 。由于相位差的存在,同一时刻左右齿轮啮合副受到的啮合激励将变得不一样。左右齿轮副啮合刚度为

$$k_1 = k_0 + k_p \sum_{j=1}^4 k_{pj} \cos(j\omega_m t + \varphi_j)$$

$$k_2 = k_0 + k_p \sum_{j=1}^4 k_{pj} \cos(j\omega_m t + \varphi_j - \beta)$$

其中: k_p 为单对齿啮合刚度; k_0 为平均啮合刚度。

1.3 系统动力学方程

齿轮系统的动力学模型如图 3 所示。假设传动轴和轴承均为刚性;粘弹性阻尼系数为 c_1 和 c_2 ;齿侧间隙为 $2b$;3 个齿轮的转动惯量为 J_1, J_2, J_3 ; μ 为齿面摩擦因数;输入齿轮上的扭矩为 T ; l_1, l_2, l_{13}, l_{23} 为摩擦力臂; γ_1 和 γ_2 分别为左右齿轮副摩擦力的方向系数; f 为具有齿侧间隙时轮齿啮合力的非线性函数。齿轮副的扭转振动模型为

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = T - F_1 r - \mu \gamma_1 F_1 l_1 \quad (1)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = T - F_2 r - \mu \gamma_2 F_2 l_2 \quad (2)$$

$$J_3 \ddot{\theta}_3 = F_1 r + \mu \gamma_1 F_1 l_{13} + F_2 r + \mu \gamma_2 F_2 l_{23} - 2T \quad (3)$$

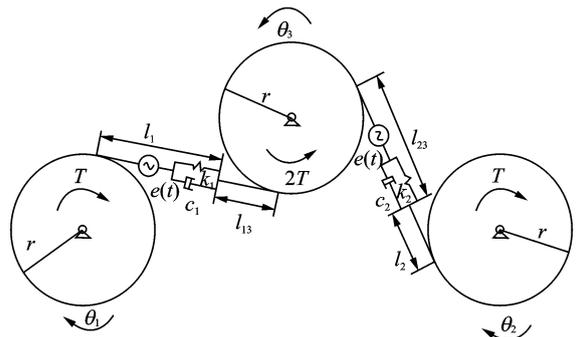


图3 齿轮系统动力学模型

Fig. 3 Dynamic model of gear system

其中:

$$F_1 = k_1 f(\theta_1 r - \theta_3 r - e(\bar{t})) + c_1 (\dot{\theta}_1 r - \dot{\theta}_3 r - \dot{e}(\bar{t}));$$

$$F_2 = k_2 f(\theta_2 r - \theta_3 r - e(\bar{t})) + c_2 (\dot{\theta}_2 r - \dot{\theta}_3 r - \dot{e}(\bar{t}));$$

$$\gamma_1 = \text{sgn}[(\omega + \dot{\theta}_1)l_1 - (\omega + \dot{\theta}_3)l_{13}]; \gamma_2 = \text{sgn}[(\omega + \dot{\theta}_2)l_2 - (\omega + \dot{\theta}_3)l_{23}];$$

$$f(x) = \begin{cases} x-b & (x > b) \\ 0 & (-b \leq x \leq b) \\ x+b & (x < -b) \end{cases}.$$

考虑齿轮副啮合线上的振动,设齿轮静态误差 $e(\bar{t}) = e \sin(\omega_m \bar{t})$, 根据 $\bar{x}_1 = \theta_1 r_1 - \theta_3 r_3 - e(\bar{t})$ 和 $\bar{x}_2 = \theta_2 r_2 - \theta_3 r_3 - e(\bar{t})$ 将角位移转换为啮合线上的线位移。为了研究方便,对式(1~3)进行无量纲变换,令 $x_i = \bar{x}_i / b (i = 1, 2); \omega_n = \sqrt{k_0 / m_e}; t = \omega_n \bar{t}; \Omega = \omega_m / \omega_n; 2\epsilon = c_i / m_e \omega_n (i = 1, 2); \eta_i = m_e / m_i (i = 1, 2, 3); h_i = l_i / r (i = 1, 2, 13, 23); p_a = e / b; q_1 = k_1 / k_0; q_2 = k_2 / k_0 = 1 + \lambda \sum_{j=1}^4 k_j \cos(j\omega t + \varphi_j - 2\pi\alpha); m_e = \frac{J_3 J_2}{J_2 r^2 + J_3 r^2} = \frac{J_3 J_1}{J_1 r^2 + J_3 r^2}; p_m = \frac{m_e}{b k_0} (\frac{T}{m_1 r} + \frac{2T}{m_3 r})$ 。其中: x 为无量纲线位移; ω_m 为啮合频率; ω_n 为固有频率; Ω 为无量纲频率; ϵ 为阻尼比; m_e 为等效质量; q 为无量纲啮合刚度; p_m 和 p_a 分别为无量纲平均激励和交变激励的幅值。

式(1)~(3)可以简化为

$$\ddot{x}_1 + 2\epsilon \dot{x}_1 + 2\eta_3 \dot{x}_2 + q_1 f(x_1) + \eta_3 q_2 f(x_2) + g_1 + g_3 = p_m - p_a \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (4)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\epsilon \dot{x}_2 + 2\eta_3 \dot{x}_1 + q_2 f(x_2) + \eta_3 q_1 f(x_1) + g_2 + g_3 = p_m - p_a \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (5)$$

其中: $g_i = \mu \gamma_i \eta_i h_i (q_i f(x_i) + 2\epsilon \dot{x}_i) (i = 1, 2); g_3 = \mu \gamma_1 \eta_3 h_{13} (q_1 f(x_1) + 2\epsilon \dot{x}_1) + \mu \gamma_2 \eta_3 h_{23} (q_2 f(x_2) + 2\epsilon \dot{x}_2)$ 。

2 数值结果及分析

针对无量纲化后的式(4~5),通过变步长四阶 Runge-Kutta 数值仿真方法对该系统的动力学方程

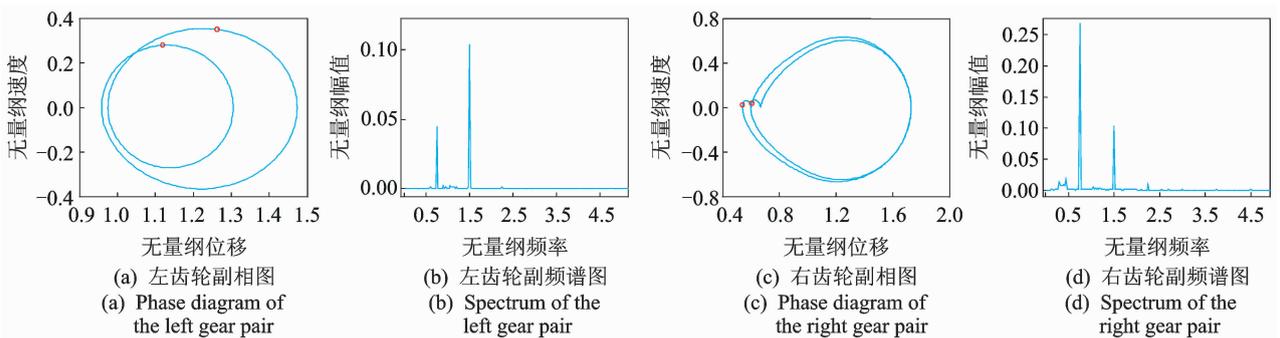


图 4 周期二运动并存($\mu=0$)

Fig. 4 Coexistence of periodic two($\mu=0$)

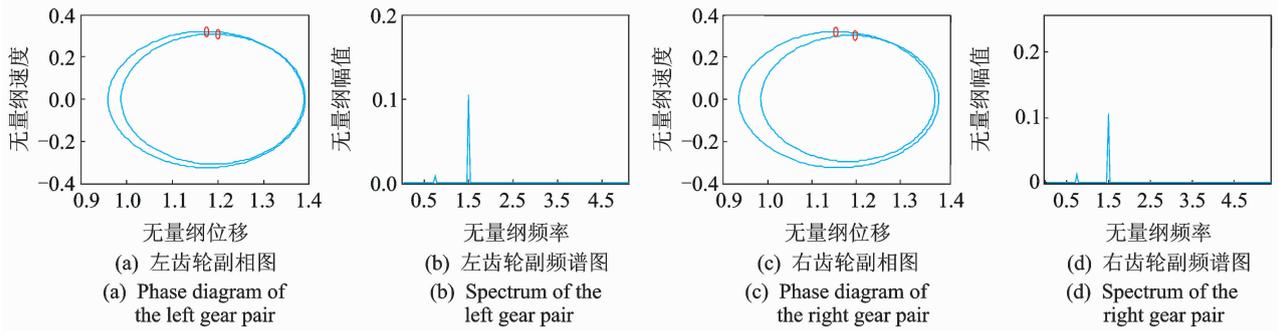
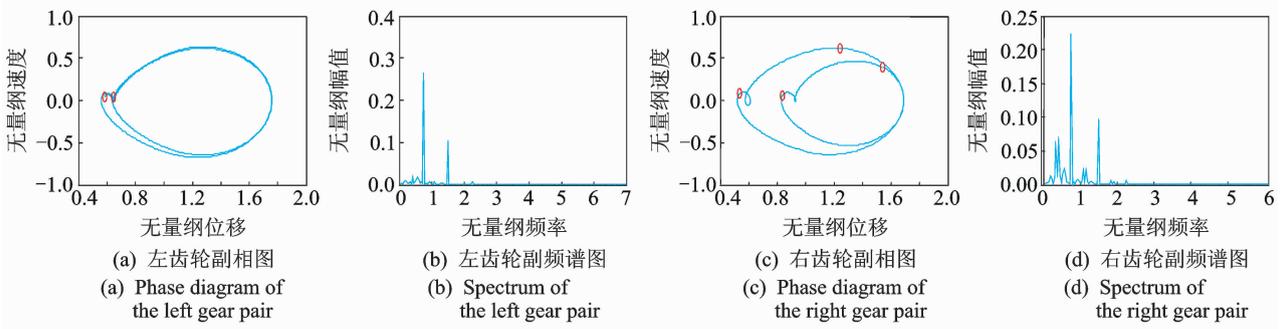
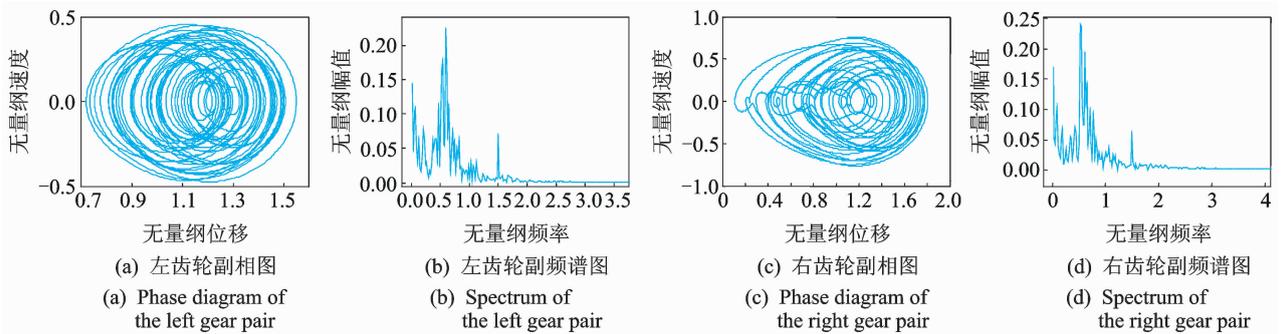
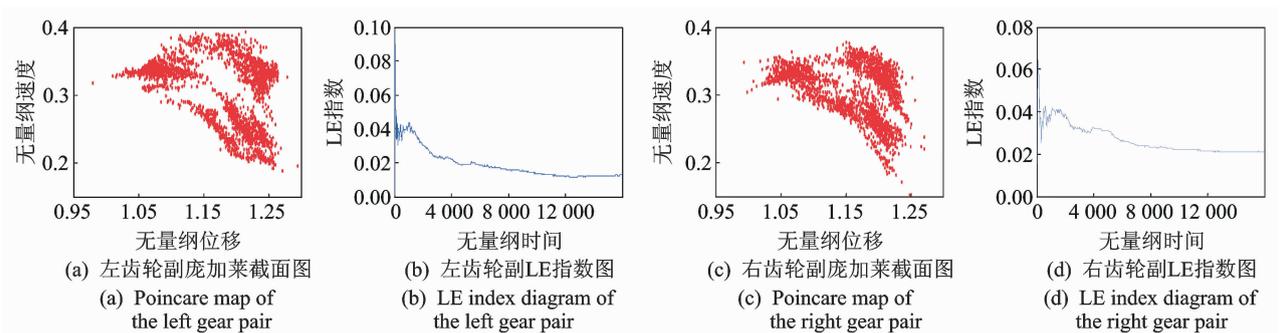
进行数值求解,该系统的主要参数为 $\lambda = 0.2, \epsilon = 0.02, \alpha = 0.4, \Omega = 1.5, p_m = 0.2, p_a = 0.1$ 。

2.1 不同摩擦因数对系统响应的影响

在齿轮运转过程中,轮齿处于不同的啮合位置。轮齿上载荷和转速的变化以及润滑油黏度的不同都会造成啮合齿廓各处油膜厚度的变化,啮合点润滑状态的变化决定了摩擦因数会有所不同。当摩擦因数 $\mu=0$ 时,左右齿轮副的相图、庞加莱点和频谱曲线如图 4 所示,可以看出有两个庞加莱点在相图中,此时两者都是周期二运动。当摩擦因数 $\mu=0.005$ 时,左右齿轮副的相图、庞加莱点和频谱曲线如图 5 所示,此时两者是周期二运动,但运动状态与无摩擦时刻的有所不同。当摩擦因数 $\mu=0.085$ 时,左右齿轮副的相图、庞加莱点和频谱曲线如图 6 所示。此时左右齿轮副的周期运动状态有所不同,左齿轮副为周期二运动,右齿轮副为周期四运动,两者不同的周期运动将使系统的响应变得复杂。当摩擦因数 $\mu=0.12$ 时,左右齿轮副的相图、频谱曲线,庞加莱截面和最大 Lyapunov 指数图分别如图 7,8 所示。此时系统的相同混沌且频谱曲线具有遍历性,左右齿轮副的李指数都大于 0,由此判断此时左右齿轮副均为混沌运动,最大李指数分别为 0.018 和 0.021。

2.2 摩擦对混沌运动的影响

图 9 为 $\mu=0$ 和 $\mu=0.1$ 时随着载荷比变化的系统分岔图。通过比较可以看出,当考虑摩擦因数之后,左右齿轮副的啮合振动均提前进入混沌状态。图 10 为 $\mu=0$ 和 $\mu=0.1$ 时随着激励频率变化的系统分岔图。无摩擦因统通过倍周期分岔进入混沌,当考虑摩擦因数之后,进入混沌的倍周期道路变的模糊,相比无摩擦时刻,系统进入混沌状态的时间有所提前。摩擦的存在导致系统在随着不同参数变化下的动态特性变得复杂起来。

图5 周期二运动并存($\mu=0.005$)Fig. 5 Coexistence of periodic two($\mu=0.005$)图6 周期二运动周期四运动并存($\mu=0.085$)Fig. 6 Coexistence of periodic two and periodic four ($\mu=0.085$)图7 混沌运动并存($\mu=0.12$)Fig. 7 Coexistence of chaos ($\mu=0.12$)图8 混沌运动并存($\mu=0.12$)Fig. 8 Coexistence of chaos($\mu=0.12$)

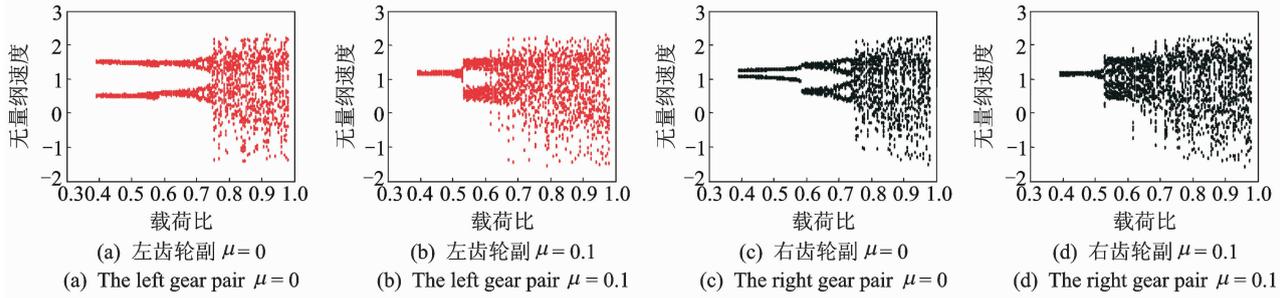


图 9 分岔图(载荷变化)

Fig. 9 Bifurcation diagram(load changes)

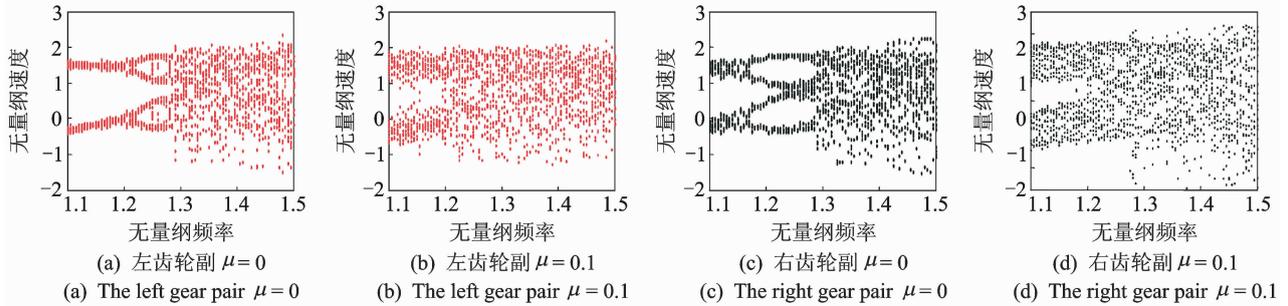


图 10 分岔图(频率改变)

Fig. 10 Bifurcation diagram(frequency changes)

2.3 摩擦对系统幅频特性的影响

如图 11 所示,在转速升高或降低的过程中系统出现了多次幅值跳跃,且在升速和降速过程中的跳跃转速也不相同,升速的跳跃转速一般高于降速的跳跃转速,这种现象存在于工程实践里两级传动的齿轮系统中,此时齿轮系统出现了滞后现象并表现出一定的“软特性”,这些现象都是非线性系统所特有的。

考虑摩擦因数对幅值跳跃现象的影响,如图 12 所示,可以看到随着摩擦因数从 0 增大到 0.25,系统的跳跃时间提前且跳跃的次数逐渐增多。由于摩擦因数的增大,系统变的相对不稳定起来。

齿轮之间的碰撞运动如图 13 所示。随着摩擦因数从 0 增大到 0.3,系统响应的最大值和最小值同时增大,同时部分无冲击状态变为单边冲击(如频率为 0.75 处),部分单边冲击变为双边冲击(如频率为 1.2 处),齿轮之间的碰撞运动变得严重。

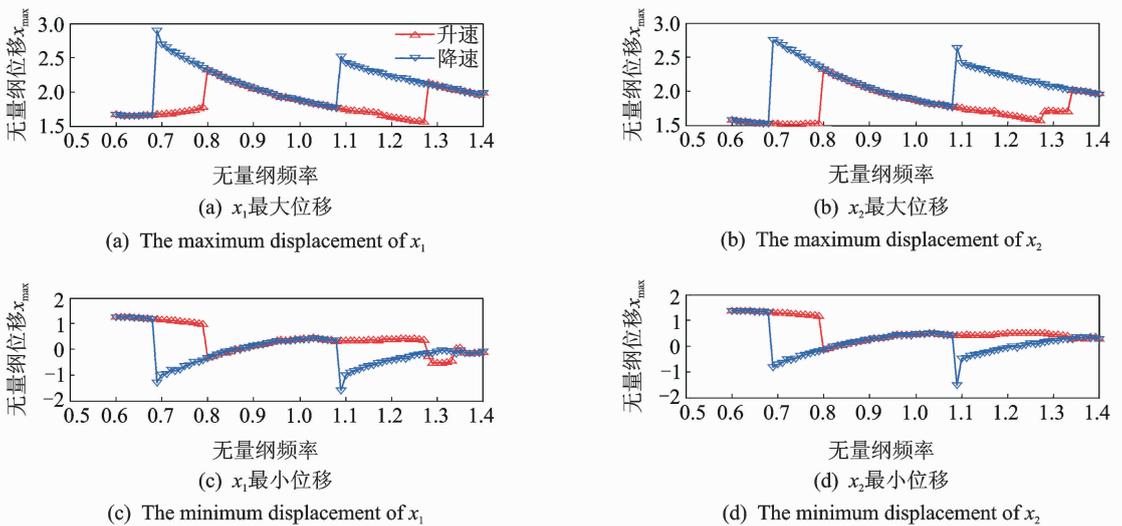


图 11 升降速下的幅频曲线

Fig. 11 Frequency-response curve under up-down speed

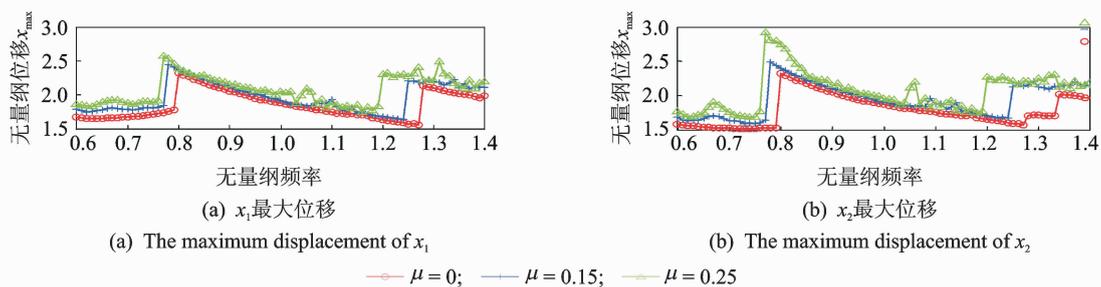


图 12 摩擦系数对幅频曲线的影响

Fig. 12 Effect of friction coefficient on response amplitude

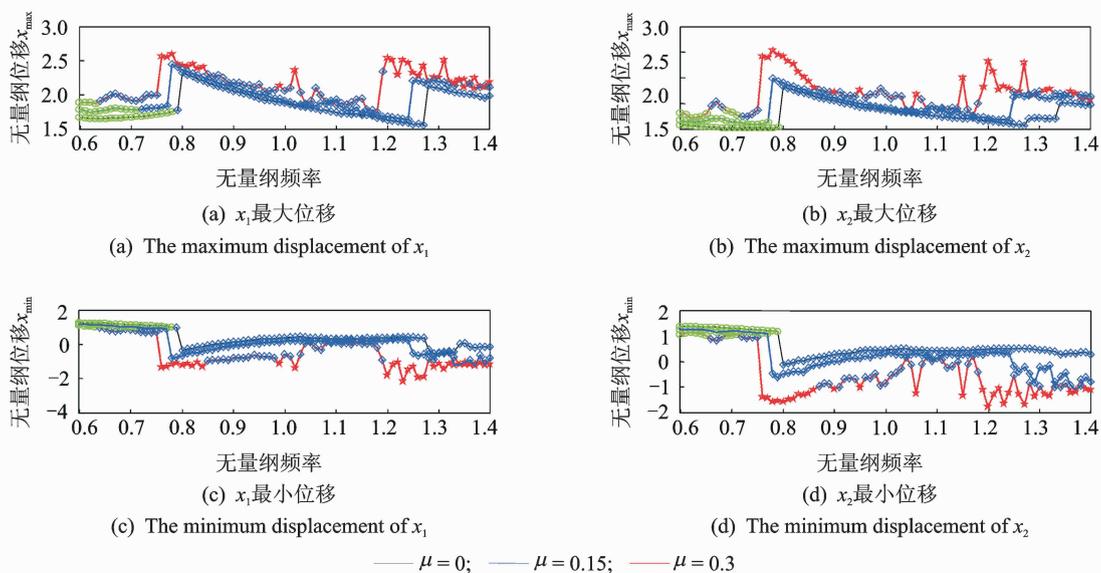


图 13 摩擦系数对碰撞运动的影响

Fig. 13 Effect of friction coefficient on impact motion

3 结论

1) 随着摩擦因数的变化,系统表现出丰富的动力学响应:同周期运动并存,不同周期运动并存和混沌响应。对于随着载荷比变化和激励频率变化的系统分岔图而言,由于摩擦因数的存在,进入混沌的倍周期道路变得模糊,系统进入混沌的时间相比无摩擦时有所提前。

2) 齿轮系统表现出非线性系统特有的跳跃现象和滞后现象,摩擦的存在使系统的跳跃时间提前,跳跃次数增多且齿轮之间的碰撞运动与无摩擦时刻相比变得严重。

参 考 文 献

[1] Wang Jianjun, Li Runfang, Peng Xianghe. Survey of

nonlinear vibration of gear transmission systems[J]. ASME Journal of Applied Mechanics Review, 2003, 56(3): 309-329.

[2] Parey A, Tandon N. Spur gear dynamic model including defects: a review[J]. The Shock and Vibration Digest, 2003, 35(6): 465-478.

[3] 王彦刚, 郑海起, 李慧勇, 等. 齿轮全齿磨损的胞映射全局动力学分析[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32(1): 135-137.

Wang Yangang, Zheng Haiqi, Li Huiyong, et al. Cell mapping global dynamic analysis of gear wear fault [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(1): 135-137. (in Chinese)

[4] 张义民, 何永慧, 朱丽莎, 等. 多平行轴齿轮耦合转子系统的振动响应[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32(4): 527-531.

Zhang Yimin, He Yonghui, Zhu Lisha, et al. Vibration response of multi-shaft rotor system with coupled gear mesh[J]. Journal of Vibration, Measurement &

- Diagnosis, 2012, 32(4): 527-531. (in Chinese)
- [5] 王三民,沈允文,董海军. 含摩擦和间隙直齿轮副的混沌与分叉研究[J]. 机械工程学报, 2002, 38(9): 8-11.
Wang Sanmin, Shen Yunwen, Dong Haijun. Chaos and bifurcation analysis of a spur gear pair with combined friction and clearance[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(9): 8-11. (in Chinese)
- [6] Ding Huali, Kahraman A. Interactions between nonlinear spur gear dynamics and surface wear[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 307(3-5): 662-679.
- [7] Theodossiades S, Natsiavas S. Periodic and chaotic dynamics of motor-driven gear-pair systems with backlash[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12: 2427-2440.
- [8] Bonori G, Pellicano F. Non-smooth dynamics of spur gears with manufacturing errors[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 306(1-2): 271-283.
- [9] Cai Wan, Chang Jian. Nonlinear analysis for gear pair system supported by long journal bearings under nonlinear suspension[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(4): 569-583.
- [10] Vaishya M, Singh R. Analysis of periodically varying gear mesh systems with coulomb friction using Floquet theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(3): 525-545.
- [11] Vaishya M, Singh R. Sliding friction-induced non-linearity and parametric effects in gear dynamics[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 248(4): 671-694.
- [12] Vaishya M, Singh R. Strategies for modeling friction in gear dynamics[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2003, 125(2): 383-393.
- [13] Parker R G. Physical explanation for the effectiveness of planet phasing to suppress planetary gear vibration[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 236(4): 561-573.
- [14] He S, Gunda R, Singh R. Effect of sliding friction on the dynamics of spur gear pair with realistic time-varying stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301(3-5): 927-949.
- [15] He S, Cho S, Singh R. Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 309(3-5): 843-851.
- [16] 王基,郑建华. 用胞映射法计算摩擦对齿轮吸引域的影响[J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(3): 366-371.
Wang Ji, Zheng Jianhua. Basin of attraction of friction to gear dynamics by cell-to-cell mapping method[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011, 31(3): 366-371. (in Chinese)



第一作者简介:郜浩冬,男,1985年1月生,博士研究生。主要研究方向为齿轮系统动力学。曾发表《参激单摆非线性系统动力学的实验研究》(《石家庄铁道大学学报》2010年第23卷第3期)等论文。

E-mail: gaohdsjz@163.com

新书推荐:《现代机械设计师手册》

由陈定方教授主编,谭建荣院士担任主审的《现代机械设计师手册(精)》(上、下册)已由机械工业出版社出版发行。

《现代机械设计师手册》汇集了来自武汉理工大学、华中科技大学、浙江大学等高等院校、科研院所及企业的100余位机械工程领域的专家学者在产品的设计、教学、科研实践中的多年成果和经验。手册以实用、先进、准确、易用为特色,内容上引入了机械工程领域近年来出现的新材料、新的结构形式、新的设计理念和设计方法,注重传统设计与现代设计的有机结合,并力求贯彻最新的国际或国家技术标准与规范。

《现代机械设计师手册》面向通用机械零部件和控制元器件设计、选用,提供常用设计资料、常规和现代设计方法、常用零部件的规格尺寸、典型结构、技术参数和设计计算。手册根据机械设计人员需要,按照“基本、常用、重要、发展”的原则选取内容,兼顾了制造企业和设计院所、大专院校的使用特点。手册强调产品设计与工艺技术的紧密结合、结构设计与造型设计的合理协调统一、重视工艺技术与选用材料的合理搭配。

《现代机械设计师手册》针对企事业单位的工程技术人员产品设计查阅和大中专院校师生教学使用需求而编撰,是设计师在产品的设计过程中所必需的数据库和知识库,是设计工作者从事产品研究与开发时不可或缺的重要工具集。

