

# 基于 FE-ERSM 航空发动机叶盘结构可靠性研究\*

白 斌, 白广忱, 李 超

(北京航空航天大学能源与动力工程学院 北京, 100191)

**摘要** 为了更准确地描述航空发动机叶盘结构的变形以及控制的合理性, 提出了一种高效高精度的概率分析方法, 即有限元-极值响应面法 (finite element-extremum response surface method, 简称 FE-ERSM)。该方法与响应面法 (response surface method, 简称 RSM) 和蒙特卡罗法 (Monte Carlo method, 简称 MCM) 相比, 在不降低精度的情况下, 效率显著提高, 具有非常重要的工程应用价值。在分析中考虑了典型载荷, 选取输入变量且考虑了参数的不确定性等因素。通过概率分析, 不仅获得了其径向变形可靠度和径向变形以及应力场模拟样本、极值响应面、相对概率分布, 而且对其径向变形和应力场进行灵敏度分析, 得到了影响叶盘结构径向变形以及应力场分布的主要影响因素。最后, 将 FE-ERSM 与 RSM 和 MCM 比较分析, 验证了该方法在航空发动机叶盘结构分析中的合理性。

**关键词** 航空发动机; 叶盘结构; 概率分析; 有限元-极值响应面法; 灵敏度分析

**中图分类号** V231.9

## 引 言

在航空发动机工作时, 叶盘的变形除了受到机械载荷, 离心力等的影响外, 同时温度载荷也是影响其发生形变的重要因素; 叶盘结构发生的事故约占总故障以及事故的 25%, 严重影响着发动机的安全性、可靠性、稳健性、效率等各种性能及发动机的失谐结构识别和预测<sup>[1-8]</sup>。文献[1-2]分析了错频叶盘结构刚度随机失谐的概率固有特性, 并提出了一个定量表征模态振型局部化程度的指标——模态局部化因子。文献[3-4]通过多项式混沌法研究了失谐叶盘结构的受迫响应的统计特性以及随机因素对叶盘结构的影响。Lee 等<sup>[5]</sup>采用不同的概率分析方法对叶盘结构振动特性进行了研究。Yao 等<sup>[6]</sup>在大量概率统计特性研究的基础上采用奇异值边界法对叶盘结构进行了稳健性分析, 研究了某些随机影响因素对叶盘结构的不敏感程度, 对提高叶盘结构的可靠性有一定的意义。Holland 等<sup>[7]</sup>对叶盘结构进行了识别研究, 从相反方向研究了叶盘结构变形, 从而更有利于提高叶盘结构的可靠性和稳健性设计。以上研究虽然对叶盘结构进行了不同程度的研究, 但都只研究叶盘结构在机械力, 如谐波周期激振力、气

动力等作用下的振动情况, 没有考虑影响叶盘结构变形的变量的不确定性, 或者采用非有限元模型进行研究, 没有考虑温度载荷这个非常重要的因素。实际上航空发动机叶盘在工作中受到多个复杂因素的共同作用, 尤其是转速 (即离心力), 温度, Coriolis Forces, 机械力的影响尤为突出, 而且这些因素都具有不确定性且随着工作状态的不同而变化, 因此需要考虑随机性, 进行概率分析非常必要。

基于以上研究不足, 文中考虑输入变量的不确定性, 对叶盘结构的应力分布和径向变形进行了概率分析。概率分析已在水利、土木建筑、地质等领域<sup>[9-10]</sup>广泛应用, 近年来也开始应用于机械结构的灵敏度分析、不稳定性分析和风险评估<sup>[11-12]</sup>等领域, 出现了以 RSM<sup>[13-16]</sup>为基础的概率分析方法。航空发动机叶盘结构变形的概率分析是一种复杂的动态概率分析, 实际上是一个随机过程问题, 因此用传统的 RSM 方法进行空发动机叶盘结构动态可靠性分析计算量仍然非常大且计算效率不高, 不能有效地满足其精度和效率的需要, 于是笔者提出了一种有限元-极值响应面法 (FE-ERSM), 进行航空发动机叶盘结构的动态概率分析, 该方法能在不降低计算精度前提下显著提高计算效率。

\* 国家自然科学基金资助项目 (51375032, 51335003)  
收稿日期: 2013-01-01; 修回日期: 2013-12-02

# 1 极值响应面法基本原理

## 1.1 极值响应面法的基本原理

首先,用MCM小批量抽取输入参数随机样本,得到系统在分析时域 $[0, T]$ 内的动态输出响应;然后将全部抽样输入样本对应的动态输出响应在分析时域 $[0, T]$ 内的极值作为新的输出响应(称为极值输出响应),构造分析时域 $[0, T]$ 内反映输入参数与极值输出之间关系的函数——极值响应函数,选取 $s$ 组输入随机变量及对应的输出极值响应面数据,代入极值响应函数,确定极值响应面函数的系数,这种方法称为极值响应面法;最后进行大量抽样,将抽样数据代入极值响应函数,计算系统的动态极值输出响应,从而求得系统的可靠性。笔者对每个抽样样本在分析时域 $[0, T]$ 内求解有限元模型,获取动态极值输出响应,因此把该方法称之为FE-ERSM动态概率分析。计算流程图如图1所示。可以看出,FE-ERSM是将原来复杂动态系统概率分析的随机过程问题转化为随机变量问题,不但能全面考虑随机输入参数对输出参数的动态影响,而且不必计算系统每一时刻的输出响应,只需计算分析时域内不同输入随机变量对应输出响应的极值,极大地提高了计算效率,同时也能保证计算精度。

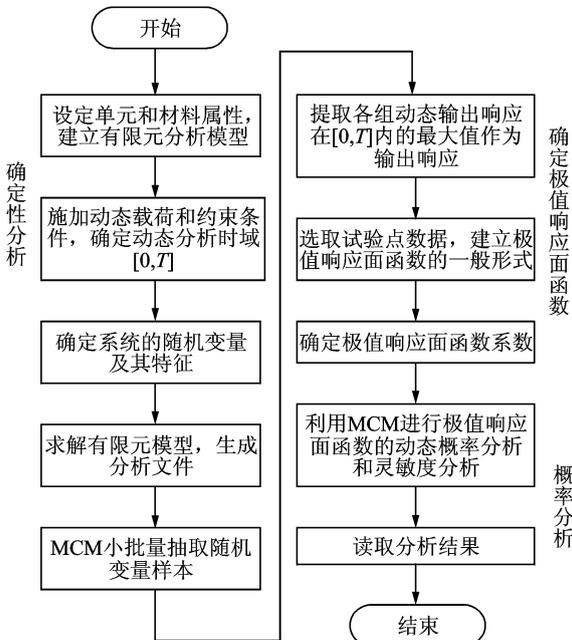


图1 FE-ERSM 动态概率分析流程图

Fig.1 Flow chart of the dynamic probabilistic analysis of FE-ERSM

## 1.2 极值响应面法数学模型

设某有限元模型第 $j$ 组输入样本为 $X^{(j)}$ ,在 $[0, T]$ 时域内的输出响应为 $Y^j(t, X^{(j)})$ ,该响应在 $[0, T]$ 时域内的最大值为 $Y_{\max}^j(X^{(j)})$ ,将不同输入样本在 $[0, T]$ 内输出响应的最大值 $Y_{\max}^j(X^{(j)})$ 构成的集合 $\{Y_{\max}^j(X^{(j)}) : j \in Z_+\}$ 的全部数值点拟合的曲线作为新的输出响应曲线 $Y$ ,则 $X^{(j)}$ 与 $Y$ 的函数关系可以表示为

$$Y = f(X) = \{Y_{\max}^j(X^{(j)}) : j \in Z_+\} \quad (1)$$

将式(1)写成响应面函数形式

$$Y_{\max} = A + \mathbf{B}Y_{\max}^j + (\mathbf{Y}_{\max}^j)^T \mathbf{C}Y_{\max}^j \quad (2)$$

令 $X = Y_{\max}^j$ ,则式(2)变为

$$Y_{\max}(X) = A + \mathbf{B}X + X^T \mathbf{C}X \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_r] \quad (4)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & & & & \\ c_{21} & c_{22} & & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ c_{r1} & c_{r2} & c_{r3} & \cdots & c_{rr} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{X}^{(j)} = [x_1^{(j)} \quad x_2^{(j)} \quad \cdots \quad x_r^{(j)}]^T \quad (6)$$

其中: $j=1, 2, 3, \dots, M, M$ 为样本点数; $r$ 为输入变量数。

在极值输出响应中选取足够数量的试验点,将试验点的数据代入式(2)或式(3)中,确定极值响应面函数的系数 $A, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ,得到极值响应面函数的表达式。用该极值响应面函数代替有限元模型进行相应的概率分析。图2为FE-ERSM示意图。

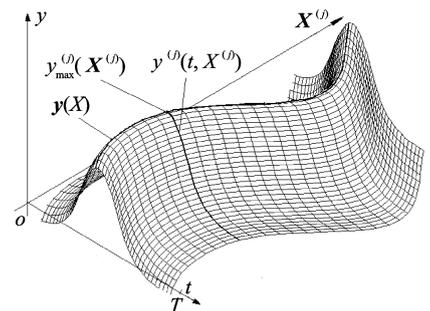


图2 FE-ERSM 原理图

Fig.2 Principle diagram of FE-ERSM

## 2 概率分析方法

### 2.1 可靠度计算

概率分析是用来评估模型的输入参数或假设条件对于输出结果的影响,进而确定结果的分布情况,

这样避免了过设计,可对零部件在工作情况下的可靠性给出定量结果,以保证其安全性。确定响应面函数(response surface function, 简称 RSF)后,若系统真实输出为  $Y(\mathbf{X})$ ,则系统的极限状态函数为

$$g(\mathbf{X}) = Y(\mathbf{X}) - \hat{Y}(\mathbf{X}) \quad (7)$$

即 
$$g(\mathbf{X}) = Y(\mathbf{X}) - A - \mathbf{B}\mathbf{X} - \mathbf{X}^T\mathbf{C}\mathbf{X} \quad (8)$$

从式(8)可见,在极限状态函数中不仅包括一次项、二次项信息,而且含有二次交叉项信息,从而使可靠度和灵敏度的计算精度得到保证,当  $g(\mathbf{X}) > 0$  为安全模式,若  $g(\mathbf{X}) < 0$ ,则系统失效。若各随机变量相互独立,其均值和方差矩阵分别为  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r]$ ,  $\mathbf{D} = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2]$ ,则系统极限状态函数  $g(\mathbf{X})$  的均值和方差为

$$E[g(\mathbf{X})] = \mu_g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \mu_\delta, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, \sigma_\delta^2) \quad (9)$$

$$D[g(\mathbf{X})] = D_g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \mu_\delta, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, \sigma_\delta^2) \quad (10)$$

由于各随机变量相互独立,因此极限状态函数  $g(\mathbf{X})$  服从高斯分布,则可靠性指标和可靠度分别为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sqrt{D_g}} \quad (11)$$

$$R = \Phi(\beta) \quad (12)$$

其中:  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布。

## 2.2 灵敏度分析

可靠性灵敏度一般定义为失效概率对基本变量分布参数的偏导数,若令失效概率为  $P_F$ ,所以

$$P_F = 1 - R \quad (13)$$

失效概率的灵敏度为

$$\begin{cases} \frac{\partial P_F}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{\partial P_{f_i}}{\partial \mu_{xi}} = \frac{\partial(1-R)}{\partial \boldsymbol{\mu}} \\ \frac{\partial P_F}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{\partial P_{f_i}}{\partial \sigma_{xi}} = \frac{\partial(1-R)}{\partial \sigma_x} \end{cases} \quad (14)$$

所求得的可靠性灵敏度估计值只是近似的,在样本容量很小时可靠性灵敏度估计时有很大的随机性。为了清楚地了解可靠性灵敏度的收敛性和精度,需要对式(14)中所列的可靠性灵敏度的数学期望和方差进行分析,则

$$\begin{cases} E\left(\frac{\partial P_F}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) = E\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{\partial P_{f_i}}{\partial \mu_{xi}}\right) = E\left(\frac{\partial(1-R)}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) \\ \text{Var}\left(\frac{\partial P_F}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{\partial P_{f_i}}{\partial \mu_{xi}}\right) = \text{Var}\left(\frac{\partial(1-R)}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) \\ E\left(\frac{\partial P_F}{\partial \sigma_x}\right) = E\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{\partial P_{f_i}}{\partial \sigma_{xi}}\right) = E\left(\frac{\partial(1-R)}{\partial \sigma_x}\right) \\ \text{Var}\left(\frac{\partial P_F}{\partial \sigma_x}\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{\partial P_{f_i}}{\partial \sigma_{xi}}\right) = \text{Var}\left(\frac{\partial(1-R)}{\partial \sigma_x}\right) \end{cases} \quad (15)$$

即

$$\begin{cases} E\left(\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) = E\left[\frac{\partial R}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \frac{\partial \beta}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right)\right] = \\ \varphi(\beta) \frac{1}{\sigma_g} E\left(\frac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) + \varphi^2(\beta) \left(-\frac{\mu_g}{2} D_g^{-\frac{3}{2}}\right) E\left(\frac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) \\ \text{Var}\left(\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) = \text{Var}\left[\frac{\partial R}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \frac{\partial \beta}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right)\right] = \\ \varphi^2(\beta) \sigma_g^{-2} \text{Var}\left(\frac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) + \varphi^2(\beta) \left(-\frac{1}{4} \mu_g^2 D_g^{-3}\right) \\ \text{Var}\left(\frac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right) \\ E\left(\frac{\partial R}{\partial \mathbf{D}}\right) = E\left[\frac{\partial R}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial \beta}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \mathbf{D}}\right)\right] = \\ \varphi(\beta) \frac{1}{\sigma_g} E\left(\frac{\partial \mu_g}{\partial \mathbf{D}}\right) + \varphi(\beta) \left(-\frac{\mu_g}{2} D_g^{-\frac{3}{2}}\right) E\left(\frac{\partial D_g}{\partial \mathbf{D}}\right) \\ \text{Var}\left(\frac{\partial R}{\partial \mathbf{D}}\right) = \left[\frac{\partial R}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial \beta}{\partial D_g} \frac{\partial D_g}{\partial \mathbf{D}}\right)\right] = \\ \varphi^2(\beta) \sigma_g^{-2} \left(\frac{\partial \mu_g}{\partial \mathbf{D}}\right) + \varphi^2(\beta) \left(-\frac{1}{4} \mu_g^2 D_g^{-3}\right) \left(\frac{\partial D_g}{\partial \mathbf{D}}\right) \end{cases} \quad (16)$$

## 3 盘结构热传递分析

航空发动机涡轮叶盘结构变形除了受离心载荷、机械载荷、气动力载荷等作用外,燃气温度对其作用也不能忽略,主要从热传导和换热以及热边界条件等对其进行分析<sup>[17-18]</sup>。

### 3.1 热传导分析

航空发动机叶盘结构内部存在温度差,即存在温度梯度,热量从叶盘的高温部分传到低温部分且叶盘与传动轴等相互接触,热量也会从高温部件传到低温部件,因此满足热传导方程

$$\frac{Q}{t} = \frac{KA(T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})}{d} \quad (17)$$

其中:  $Q$  为时间  $t$  内的传热量或者热流量;  $K$  为热传导系数;  $T_{\text{hot}}$  为叶盘高温部分(或者高温部件)温度;  $T_{\text{cold}}$  为叶盘低温部分(或者低温部件)温度;  $d$  为叶盘厚度;  $A$  为叶盘侧面积。

### 3.2 热对流分析

航空发动机叶盘结构表面和与其接触的气流之间由于温差的存在引起了热量的交换,因而航空发动机叶盘结构表面发生对流现象,用牛顿冷却方程描述为

$$q'' = \alpha |T_s - T_B| \quad (18)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = \frac{Nu\lambda_c}{r} \\ Nu = 0.45\beta Re^{0.80} \\ \beta = 0.1313(1+\epsilon^2)^{0.30}(0.08547\frac{V_a}{V_0} + 0.3131\epsilon)^{0.20} \\ Re = \frac{V_0 r}{\nu} = \frac{\omega r^2}{\nu} \\ \epsilon = \sqrt{0.0262 + 0.4399(\frac{V_a}{V_0})^2 - 0.009362\frac{V_a}{V_0}} \end{cases} \quad (19)$$

其中: $\alpha$ 为对流换热系数; $T_s$ 为叶盘表面温度; $T_B$ 为周围气流温度; $Re$ 为雷诺数; $\omega$ 为为轮盘旋转角速度; $r$ 为计算半径,即计算区域的平均半径; $\nu$ 为冷却空气的动粘性系数; $V_a$ 为有轴向吹风冷却时,冷却空气的轴向速度; $V_0$ 为计算半径处的圆周速度。

### 3.3 热边界条件

为了使得每个节点的热平衡方程具有唯一解,必须附加热边界条件和初始条件,因此边界条件的加载是热分析的重要条件,航空发动机叶盘结构温度场的计算属于传热学中的导热问题,计算的边界条件有3类。

1) 给定叶盘表面温度分布情况,即

$$T|_{\Gamma} = f(x, y, z) \quad (20)$$

其中: $\Gamma$ 为物体边界; $f(\cdot)$ 为已知温度函数。

2) 给定叶盘边界上通过叶盘表面的热流密度,即

$$-k \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma} = g(x, y, z, t) \quad (21)$$

其中: $g(\cdot)$ 为热流密度函数; $\frac{\partial T}{\partial n}$ 为接触面上法向的温度梯度; $k$ 为叶盘材料的导热系数。

3) 给定叶盘对流换热边界条件,即

$$-k \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma} = h(T_w - T_f) \quad (22)$$

其中: $h$ 为叶盘边界与周围气流之间的换热系数; $T_f$ 为周围流体的温度; $T_w$ 为结构体边界表面温度。

初始条件表示为

$$T|_{t=0}(r, \varphi, z) = T_0(r, \varphi, z) \quad (23)$$

其中: $T_0$ 为结构体初始温度。

对于叶盘结构的某些部位,如轮盘的外缘、中心或轮毂内径处的温度,通常可以在技术文件中找到或者用试验方法确定,所以可以当作第1类边界条件处理。一般情况下轮盘传给主轴的热量很小,可忽略不计,因此可以将轮盘与主轴的连接处考虑为绝热边界。由于边界上无热量传递,热流密度为零,可以视作第2类边界条件的特殊情况。轮盘侧表面

以及叶片,若已知气流的压力、温度、流量等,则可根据传热学公式分区计算出换热系数,作为第3类边界条件处理。

## 4 叶盘结构确定性分析

### 4.1 载荷谱计算

为了更符合实际,选取发动机从地面启动-慢车-起飞-爬升-巡航作为计算范围,取几个关键点作为计算点<sup>[19]</sup>,计算载荷谱如图3所示。考虑动态温度的影响、叶盘材料的随机性、导热系数和非线性膨胀系数、比热、对流换热以及离心力、陀螺效应等影响,对其进行动态热与结构的耦合分析。

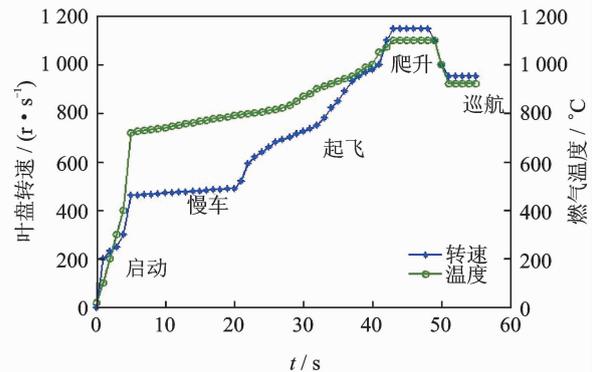


图3 载荷谱随时间变化图

Fig. 3 Load spectrum of input variable

### 4.2 叶盘结构的有限元模型

选取某型发动机某级压气机叶盘作为研究对象,简化其叶片的冷却孔,轮盘的倒圆角,凸台等,材料选取某种镍合金,有限元模型如图4所示。由于叶盘结构为理想的周期对称结构,因此选取一个扇区作为研究对象,其有限元模型如图5所示。

### 4.3 叶盘结构的确定性分析

根据图3的载荷谱,对如图5的扇区叶盘结构进行瞬态动力计算分析,得到其在离心载荷、温度载荷以及 Coriolis Forces 的共同作用下叶尖各向变形随时间的变化规律,如图6所示。

从图中可以看出,当飞机在爬升过程中,燃气温度和发动机叶盘转速基本达到最大值时,此时发动机的变形也达到最大值且在切向的变形大于径向和轴向变形,原因在于离心力和 Coriolis Forces 的作用,当  $t=48$  s 时叶盘结构各个方向的变形均达到最

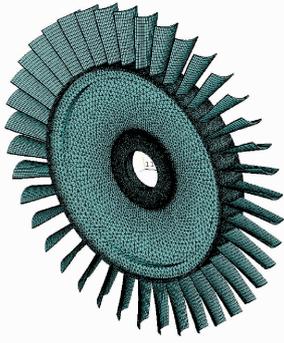


图 4 整体有限元模型图

Fig. 4 FEM of integral bladed disk assemblies

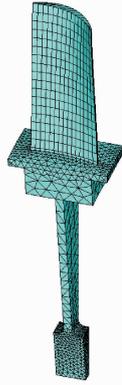


图 5 单扇区有限元模型

Fig. 5 FEM for single sector of bladed disk assemblies

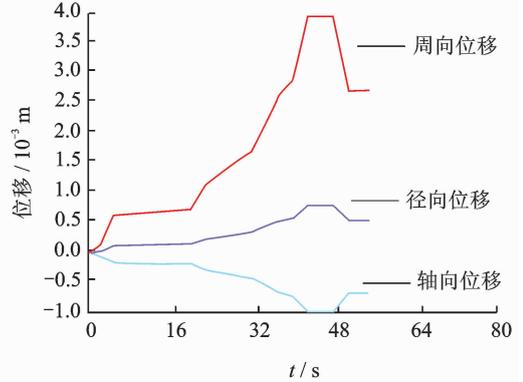


图 6 叶盘结构叶尖各向变形随时间变化曲线  
Fig. 6 Changing curve of bladed tip deformation with time

大值,但是一般影响发动机叶盘与机匣之间碰撞主要是径向变形,因此取叶盘结构的应力和径向变形最大值的点作为研究对象,如图 7,8 所示。

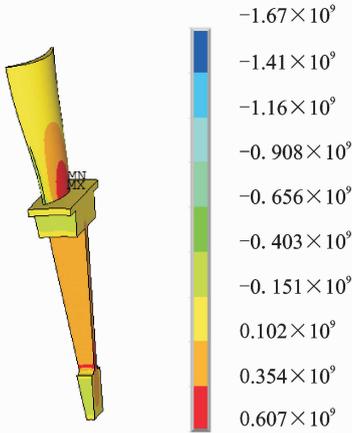


图 7 叶盘结构应力分布

Fig. 7 Stress distribution of bladed disk assemblies

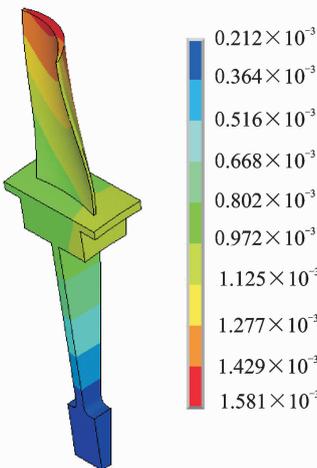


图 8 叶盘结构径向变形

Fig. 8 Radial deformation of bladed disk assemblies

研究发现应力主要集中在叶片根部,而变形极值发生在叶尖处,原因在于离心力、温度以及 Coriolis Forces 共同作用在叶片上,使得叶盘在高速旋转时根部应力最大,而叶尖处的扭转变形最大从而出现上述结果。可见,叶根部为叶片危险截面,容易发生疲劳断裂,叶尖部振动显著。

## 5 叶盘结构变形的动态概率分析

### 5.1 随机变量的选取

航空发动机叶盘在加工和实际使用中其材料参数和工作条件都存在不确定性,在动态概率分析时随机变量的选取较稳态概率分析复杂,输入变量  $X$  对系统输出响应的影响,传统的做法是先分析各个输入变量的元素  $x_i (i=1,2,\dots,k)$  对系统输出的影响,再对其进行综合分析判断。该方法需要对每个变量的元素进行考虑和计算,过程繁琐,效率低且对每个元素进行综合分析时,没有统一有效的规则,不能保证计算的准确性和精度。

基于有限元的概率分析为参数化建模分析,因此输入变量的选取非常重要,在此采用最值先取法,其选取过程如下:

1) 选取输入变量  $X$  中某个变量  $X_i$  中元素的最大值,记作  $x_{i\max}$ ,  $X_i$  中所有元素均除以  $x_{i\max}$ ,即

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (x_1, x_2, \dots, x_k) / x_{i\max} \quad (24)$$

则

$$X_i = (x_1, x_2, \dots, x_k) = \alpha x_{i\max} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \cdot x_{i\max} \quad (25)$$

2) 将输入变量  $X$  中的所有变量,即  $X =$

$(X_1, X_2, \dots, X_r)$ 中每个变量中元素的最大值形成数组集合  $\tilde{X} = \{x_{1\max}, x_{2\max}, \dots, x_{r\max}\}$ , 若用  $Y$  表示  $\tilde{X}$ , 即  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ , 则  $X$  与  $Y$  各个元素之间仍然存在对应关系, 即  $X = (X_1, X_2, \dots, X_r) \leftrightarrow Y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ 。

3) 用  $x_{i\max}$  代替  $X_i$  中各个元素来分析对输出响应影响, 再根据  $X_i$  中各个元素与  $x_{i\max}$  之间的相关性确定  $X_i$  中各个元素对系统输出的影响。

该方法只需考虑一类变量的最大值对输出响应的影响, 大大减少了随机输入变量的个数, 为动态概率分析提供了方便, 能大大节约计算时间和提高计算效率与精度。

根据该方法选取航空发动机叶盘结构的随机输入变量, 包括叶盘转速  $\omega$ , 燃气温度  $t$ , 膨胀系数  $a$ , 导热系数  $k$ , 对流换热系数  $f$ , 比热容  $c$ , 材料密度  $d$ , 弹性模量  $e$ , 泊松比  $p$ 。假设各个变量均服从高斯分布且相互独立, 如表 1 所示。

表 1 叶盘结构随机输入变量及其数字特征

Tab. 1 Random input variables and numerical characteristics for bladed disk assemblies

随机变量	均值 $\mu$	标准差 $\delta$
$\omega / (\text{r} \cdot \text{s}^{-1})$	1 046	20.92
$t / ^\circ\text{C}$	1 200	24
$a / (10^{-5} \text{C}^{-1})$	1.441	0.028 82
$k / (\text{W} \cdot (\text{m} \cdot ^\circ\text{C})^{-1})$	27.21	0.544 2
$f / (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C})$	6 320	126.4
$c / \text{J} \cdot (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})^{-1}$	500	10
$e / (10^{11} \text{Pa})$	1.48	0.029 6
$p$	0.314 3	0.006 27
$d / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	8 560	171.2

## 5.2 动态概率分析

建立叶盘结构的径向变形量和应力场与随机输入变量的极限状态方程, 如式(26)和式(27)所示。可以得到径向变形和应力场的极值响应面, 如图 9 和图 10 所示。

$$Y_d = 1.537 29 \times 10^{-3} - 1.086 88 \times 10^{-5} c - 1.510 30 \times 10^{-5} e + 1.780 44 \times 10^{-5} t + 3.018 80 \times 10^{-5} \omega + 8.458 78 \times 10^{-6} a + 4.228 29 \times 10^{-6} d + 8.187 77 \times 10^{-6} f + 2.678 83 \times 10^{-6} k - 2.308 61 \times 10^{-6} p + 1.348 61 \times 10^{-6} c^2 + 1.334 99 \times 10^{-6} d^2 + 2.319 17 \times 10^{-6} e^2 + 1.713 49 \times 10^{-6} t^2 + 2.313 04 \times 10^{-6} \omega^2 - 1.656 12 \times 10^{-7} ac - 1.651 101 \times 10^{-7} ad + 1.240 3 \times 10^{-7} af + 2.696 66 \times 10^{-7} at + 1.036 44 \times 10^{-7} cd - 3.476 31 \times 10^{-7} ct - 2.295 85 \times 10^{-7} de -$$

$$3.443 58 \times 10^{-7} dt + 4.537 78 \times 10^{-7} d\omega - 4.620 45 \times 10^{-7} e\omega + 2.659 52 \times 10^{-7} ft \quad (26)$$

$$Y_s = 9.236 99 \times 10^8 + 2.153 57 \times 10^7 a - 1.167 44e \times 10^7 c + 9.765 06 \times 10^6 d + 2.155 16 \times 10^7 e + 1.191 57 \times 10^7 f \cdot p + 3.055 92 \times 10^6 p + 4.032 20 \times 10^7 t + 4.285 17 \times 10^7 \omega + 1.107 32 \times 10^6 \omega^2 + 1.065 28 \times 10^6 ae + 2.006 98 \times 10^6 ar + 2.171 71 \times 10^6 d\omega + 2.007 87 \times 10^6 et \quad (27)$$

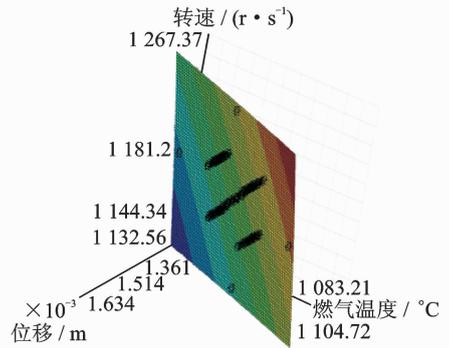


图 9 径向变形极值响应面

Fig. 9 ERS of radial deformation

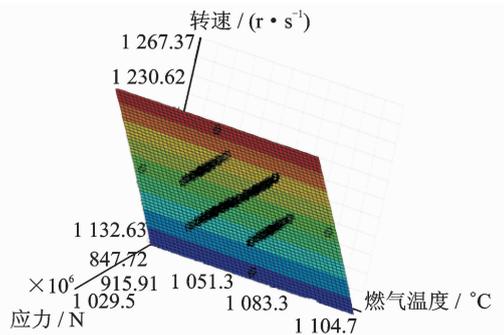


图 10 应力场极值响应面

Fig. 10 ERS of stress

可见任意的随机不确定因素, 如燃气温度和转速对叶盘结构的位移和应力有一定的影响, 随着转速和燃气温度的提高, 叶盘结构的位移和应力都有所提高。用极值响应面函数代替叶盘结构的有限元模型, 利用 Box-behnken 矩阵抽样法得到 147 组样本点, 利用 MCM 法进行 1 万次抽样, 得到径向变形量和应力场的模拟样本历史以及相对概率分布图, 如图 11~14 所示。

研究表明, 叶盘结构的位移和应力的样本历史计算只需几秒钟, 比确定性计算提高了上百倍, 而精度基本和确定性结果相当, 且位移和应力的相对概率在均值附近较高, 越靠近两端越低。

根据表 1 提供的参数, 当置信度为 0.95, 叶盘

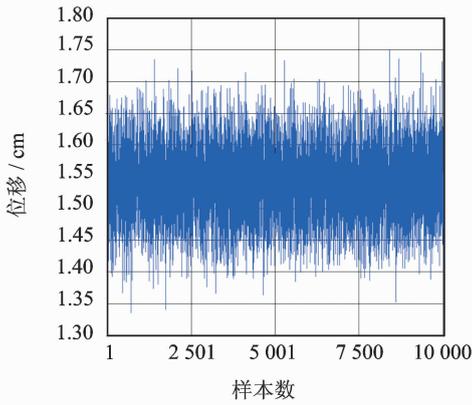


图 11 径向变形样本历史

Fig. 11 Simulation sample of radial deformation

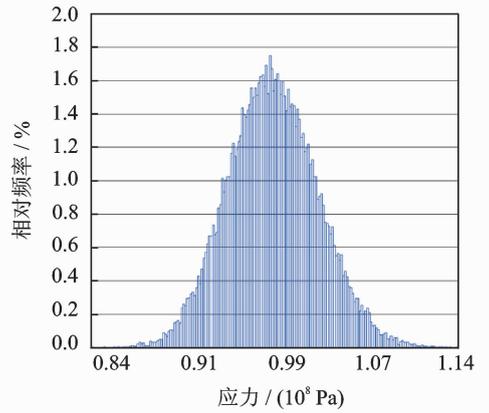


图 14 应力相对概率分布图

Fig. 14 Distribution histogram of stress

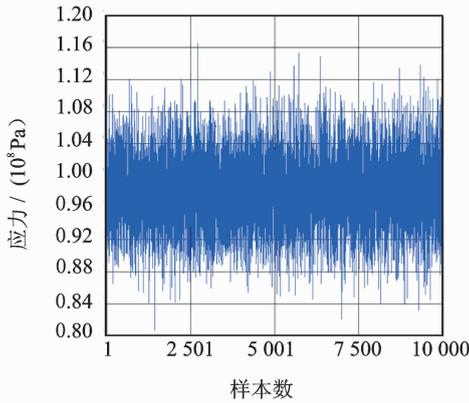


图 12 应力场的样本历史

Fig. 12 Simulation sample of stress

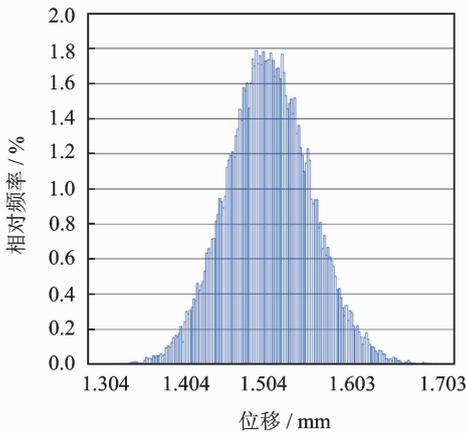


图 13 径向变形相对概率分布图

Fig. 13 Distribution histogram of radial deformation

盘结构径向变形的可靠度  $R$  约为 98.99%。

### 5.3 灵敏度分析

灵敏度 ( $L$ ) 是用来分析随机输入变量的变化对输出参量稳定性的影响程度,进而决定哪些参数对可靠性失效影响较大。由式(13),式(18)可以得到各随机变量的灵敏度和其对叶盘的影响概率 ( $P_x$ ),如图 15,16 和表 2 所示。可以看出,叶盘转速对叶盘结构径向变形和应力集中影响最大,其影响概率分别为 30.68%和 27.40%。可见:离心力是影响叶盘结构径向变形和应力集中的最主要因素,因此在进行监测时严格控制发动机的转速;其次为燃气温度,影响概率分别为 18.11%和 25.05%,在各个影响变量中有正负之分,正表示该变量与应力或者径向变形为正相关,而负则说明该变量可能有抑制应力或者径向变形增大的作用。比热容增大可能会抑制应力的增大,而弹性模量的增大会抑制变形的增大,因此需要综合考虑各个因素,采取适当的措施抑制应力和变形的增大。以上分析与实际经验相符,为实际工程设计提供理论依据。

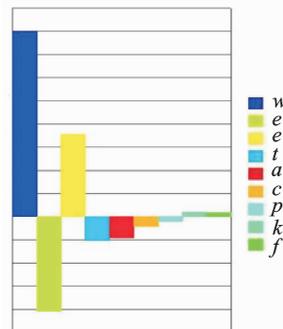


图 15 径向变形灵敏度分析图  
Fig. 15 Sensitivity of deformation

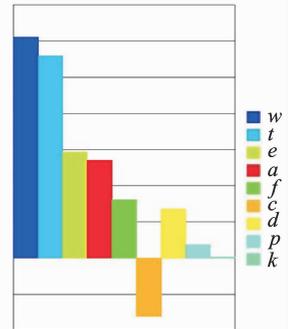


图 16 应力灵敏度分析图  
Fig. 16 Sensitivity of stress

结构的最大变形为 1.581 mm,最大应力为 607.24 MPa,而在不考虑温度场的影响时其最大变形量为 1.214 mm,最大应力为 537.43 MPa,可见热载荷对叶盘变形的影响不能忽略,则根据式(9~12)可得叶

表2 叶盘结构随机输入变量的灵敏度及其影响概率

Tab. 2 The sensitivity and effect probability of random input variables of blisk structure

随机变量	$t$	$f$	$c$	$d$	$p$	$a$	$k$	$e$	$w$
$L_1/\times 10^{-3}$	417.88	183.2	-245.89	93.325	-54.527	192.73	62.375	-349.56	707.95
$P_{x1}/\%$	18.11	7.94	10.66	4.04	2.36	8.35	2.70	15.15	30.68
$L_2/\times 10^{-3}$	558.77	160.84	-160.84	135.33	36.74	270.76	3.176	292.85	611.19
$P_{x2}/\%$	25.05	7.21	7.21	6.07	1.65	12.14	0.14	13.13	27.40

$L_1$  为输入变量对径向变形的灵敏度;  $P_{x1}$  为输入变量对径向变形的影响概率;  $L_2$  为输入变量对应力的灵敏度;  $P_{x2}$  为输入变量对应力的影响概率

#### 5.4 有效性验证

为了验证 FE-ERSM 的效率和精度,基于表 1 中的随机输入变量和统计特征及相同计算环境条件下,分别与 MCM 和 RSM 对叶盘结构的变形进行动态概率分析并比较计算结果。在计算过程中,3 种方法都是 1 万次模拟计算,其中 FE-ERSM 和

RSM 的抽样次数均为 147,以 MCM 计算为基准,比较结果如表 3 所示。由表 3 可以看出,文中提出的 FE-ERSM 的计算精度和效率与 MCM 相比均高于传统 RSM,但计算时间远少于其他 2 种方法,约为 MCM 计算时间的 1/68、传统响应面法的 1/3。可见,FE-ERSM 方法既能保证计算精度又可提高计算效率。

表3 3种方法概率分析结果比较

Tab. 3 The results of comparing three probabilistic analysis methods

方法	$t/h$	$Y_d/mm$		$S_{von}/MPa$		$R=0.95$		$t/^\circ C$	
		均值/mm	精度/%	均值/mm	精度/%	燃气温度 极限/ $^\circ C$	精度/%	影响概率/% ( $Y_d S_{von}$ )	精度/% ( $Y_d S_{von}$ )
FE-ERSM	2.25	1.538	100	597.58	100	1 267.35	99.95	18.11 25.05	99.34 99.24
MCM	153	1.538	100	597.58	100	1 267.89	100	18.23 25.24	100 100
RSM	6.75	1.527	99.28	601.87	99.28	1 266.45	99.88	19.22 25.89	94.84 97.48

## 6 结论

1) 介绍了叶盘结构径向变形和应力场动态概率分析的 FE-ERSM 并且建立了数学模型,同时给出了可靠性计算和灵敏度分析的计算方法。

2) 考虑温度载荷和离心力的耦合作用,建立了有限元模型进行确定性分析并且计算了输出响应随时间的变化规律,分析了在最危险点处的应力场和叶盘径向变形。

3) 以某型发动机从地面启动-慢车-起飞-爬升-巡航这一过程作为计算范围,考虑了热载荷和转速的动态性和随机性,以及材料的随机性等因素的影响,采用 FE-ERSM 对叶盘结构的输出响应进行了概率分析,并且分析了叶盘结构应力集中和径向变形的主要影响因素以及影响程度。

4) 将 FE-ERSM 分别与 MCM 和 RSM 对叶盘结构的径向变形和应力分布的动态概率分析进行比较计算,验证了该方法在叶盘结构研究中的可行性。

## 参 考 文 献

- [1] 于长波,王建军,李其汉. 错频叶盘结构的概率模态局部化特性分析[J]. 航空动力学报, 2009, 24(9): 2040-2045.  
Yu Changbo, Wang Jianjun, Li Qihan. Probability characteristics for vibratory mode of distuned bladed disk assemblies [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(9): 2040-2045. (in Chinese)
- [2] 王建军,姚建尧,李其汉. 刚度随机失谐叶盘结构概率模态特性分析[J]. 航空动力学报, 2008, 23(2): 256-262.  
Wang Jianjun, Yao Jianyao, Li Qihan. Probability characteristics for vibratory mode of bladed disk assemblies with random stiffness mistuning [J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(2): 256-262. (in Chinese)
- [3] Sinha A. Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2006, 128(3): 449-457.

- [4] D'Souza K X, Epureanu B I. A statistical characterization of the effects of mistuning in multistage bladed disks [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2012, 134(1):012503.
- [5] Lee S Y, Castanier M P, Pierre C. Assessment of probabilistic methods for mistuned bladed disk vibration [C] // 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, Materials Confer. Austin, TX, United States; American Inst. Aeronautics and Astronautics Inc, 2005, 4:2375-2389.
- [6] Yao Jianyao, Wang Jianjun, Li Qihan. Robustness analysis of mistuned bladed disk using the upper bound of structured singular value[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2009, 131(3):032501.
- [7] Holland D E, Epureanu B I, Filippi S. Structural damping identification for mistuned bladed disks and blisks[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2012, 134(2):024504.
- [8] 冯松, 文立华, 周全. PVDF传感器在整体叶盘叶片模态试验中的应用[J]. *振动、测试与诊断*, 2011, 31(4):484-487.  
Feng Song, Wen Lihua, Zhou Quan. Application of PVDF sensor in mode test of turbine blade of blisk[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2011, 31(4):484-487. (in Chinese)
- [9] Pugh C E, Bass B R, Dickson T L. Role of probabilistic analysis in integrity assessments of reactor pressure vessels exposed to pressurized thermal shock conditions[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2007, 14(3):501-517.
- [10] Kartal M E, Basaga H B, Bayraktar A. Probabilistic nonlinear analysis of CFR dams by MCS using response surface method [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(6):2752-2770.
- [11] Fitzpatrick C K, Baldwin M A, Rullkoetter P J, et al. Combined probabilistic and principal component analysis approach for multivariate sensitivity evaluation and application to implanted patellofemoral mechanics[J]. *Journal of Biomechanics*, 2011, 44(1):13-21.
- [12] Tan Xiaohui, Bi Weihua, Hou Xiaoliang, et al. Reliability analysis using radial basis function networks and support vector machines[J]. *Computers and Geotechnics*, 2011, 38(2):178-186.
- [13] Mollon G, Dias D, Soubra A H. Probabilistic analysis of pressurized tunnels against face stability using collocation based stochastic response surface method [J]. *Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering*, 2011, 137(4):385-397.
- [14] Lu Q, Low B K. Probabilistic analysis of underground rock excavations using response surface method and sorm[J]. *Computers and Geotechnics*, 2011, 38(8):1008-1021.
- [15] Ren Yuan, Bai Guangchen. New neural network response surface methods for reliability analysis [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2011, 24(1):65-72.
- [16] Eom Y S, Yoo K S, Park J Y, et al. Reliability-based topology optimization using a standard response surface method for three-dimensional structures [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(2):287-295.
- [17] 李朝阳, 张艳春. 燃机涡轮盘三维瞬态温度及应力场计算分析[J]. *动力工程*, 2006, 26(2):211-214.  
Li Chaoyang, Zhang Yanchun. Calculation and analysis of the transient 3-dimensional temperature and stress field of a gas turbine's disk[J]. *Journal of Power Engineering*, 2006, 26(2):211-214. (in Chinese)
- [18] 关磊, 汪家道, 陈大融. 微小型发动机气缸温度场及热变形的三维有限元分析[J]. *清华大学学报:自然科学版*, 2003, 43(11):1487-1490.  
Guan Lei, Wang Jiadao, Chen Darong. 3-D finite element analysis of microengine cylinder temperature field and heat deformation[J]. *J Tsinghua Univ: Sci & Tech*, 2003, 43(11):1487-1490. (in Chinese)
- [19] Fei Chengwei, Bai Guangchen. Distributed collaborative response surface method for mechanical assembly reliability design [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 26(6):1160-1168.



**第一作者简介:**白斌,男,1984年1月生,博士研究生。主要研究方向为系统动力学,航空发动机振动与强度、可靠性稳健性以及结构优化。曾发表《基于FSVM改进隶属度的发动机振动性能分析》《《振动与冲击》2013年第32卷第20期》等论文。

E-mail: baibin@126.com