

考虑结构参数不确定性的随机模型修正方法*

方圣恩, 林友勤, 夏樟华

(福州大学土木工程学院 福州, 350108)

摘要 提出了一种随机模型修正方法以确定结构不确定性参数的概率统计特性,使得模型修正的应用更符合工程实际。将随机模型修正过程分解为一组确定性修正过程,利用蒙特卡罗仿真得到的响应样本并结合响应面模型快速运算特性,构造优化反演过程来求得各个样本所对应的一组参数值,进而基于大量样本统计得到参数的均值和方差。所提出方法经过一组试验钢板的验证,准确求得了钢板厚度和材料参数的均值和方差,说明了方法的可行性和可靠性。

关键词 随机模型修正; 参数不确定性; 响应面模型; 蒙特卡罗仿真

中图分类号 O327; TU311

引言

近 20 年来确定性有限元模型修正理论得到了充分的发展和应用^[1-2],已经成为结构参数识别和损伤检测的重要手段^[3-5]。对实际工程结构而言,不确定性广泛存在于结构参数和实测响应中,当不确定性的影响较大时,会导致确定性模型修正的结果无法反映结构参数的变异性。因此,有必要在模型修正过程考虑不确定性因素的影响,即构建一个随机模型修正过程。通常意义上,不确定性可以分为偶然型不确定性(aleatory uncertainty)和认知型不确定性(epistemic uncertainty)两大类^[6]。前者一般指结构或构件所固有的制造误差和材料的变异性(统称为参数不确定性),可以被量化,但无法避免或人为消除;后者是由于认知上的不足(比如仅有少量的测量数据)而导致的,可以通过完善认知过程得到减少甚至消除。对工程结构来说,上述两种不确定性之间有时并没有清晰的界限。实际工程应用上,对参数的不确定性进行量化往往是非常必要的,可以给出参数的变异性范围。该量化过程一般通过随机模型修正来实现,得到参数的统计特性如均值和方差等^[7-12]。早期的研究成果可以追溯到文献^[7],其考虑了结构参数的变异性 and 响应中所包含的不确

定性,并假设二者是不相关的。同时,也可以利用贝叶斯方法建立随机模型修正过程^[8],或者是在优化目标函数中加入权重值来表示响应的统计特性^[9],将传统的确定性模型修正方法拓展到不确定性问题上。同时,蒙特卡罗方法也在随机模型修正问题上得到了应用^[10],该方法的修正精度高但计算工作量通常很大,特别是对具有较多参数的复杂结构来说更是如此。此外,摄动法也得到了初步应用,即在确定性模型修正方程中加入了相对于参数均值的扰动项,以考虑不确定性的影响^[11]。和蒙特卡罗方法相比,摄动法的计算效率更高,但其应用过程较复杂且参数的不确定性范围不能过大。总体而言,随机模型修正研究还处于初步阶段,尚有许多问题等待解决,其中最突出的就是如何在保证修正精度的同时简化问题以降低计算工作量,以及如何减少参数方差的修正误差。

笔者提出了一种随机模型修正新方法,即将随机模型修正过程分解为一系列确定性修正过程,每个确定性过程的目标响应都是基于蒙特卡罗仿真得到的一个响应样本。同时,采用响应面模型替代有限元模型以实现快速计算结构响应和优化反演的目的。得到大量的参数预测值,并以此统计参数的统计特征值(如均值和方差)。所提出的方法通过一组钢板的试验结果来验证,并与现有的随机模型修

* 国家自然科学基金资助项目(51108090);福建省自然科学基金资助项目(2011J05129);福建省高校杰出青年科研人才培养计划(JA12020);教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(LXKQ201201)
收稿日期:2013-05-08;修回日期:2013-06-14

正方法进行了比较,以探索方法的可行性和可靠性。要说明的是,文中修正目标是偶然型不确定性,而响应面建模误差或蒙特卡洛仿真的误差(认知型不确定性)不在讨论范围之内,同时此类误差对文中算例的影响很小。

1 响应面模型和蒙特卡罗仿真

1.1 响应面模型

在工程应用上可以通过有限元模型预测结构响应或者通过构建反问题来识别结构的参数值。对复杂结构而言,其构件数量繁多、材料和边界条件复杂,使得相应的有限元模型也变得非常复杂,容易导致模型修正过程的无法收敛和计算量过大等问题。因此,若能利用其他物理模型(如神经网络等)来替代有限元模型进行响应计算和参数识别,就可以大幅提高修正效率。但构建神经网络模型所需的样本数往往随着修正参数数目的增加呈指数级增长,同时网络的内部构造是未知的,不利于和系统的其他模块或程序进行接口。近年来,一种快速计算模型——响应面模型在有限元模型修正领域得到了一定的应用^[3,12-13],取得了较好的效果。该模型实际上是通过多项式数学表达式将一个物理系统的输入参数 ξ 和输出(或称响应) y 联系起来^[14]

$$y = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + \epsilon \quad (1)$$

其中: f 表示参数和响应间的映射函数; ϵ 为模型的建模误差; k 为输入参数的数目。

对大多数工程问题来说,二阶多项式模型是最常用的基本形式之一

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) + \epsilon =$$

$$\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^k \sum_{j=2}^k \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (2)$$

其中: ξ 转化为无量纲的变量 x , 后者均值为 0 且标准差与 ξ 相同; β 为回归系数,可以通过最小二乘估计 ϵ 得到其估计值 b ; $x_i, x_i x_j$ 分别表示参数的主效应和相互效应。

在具体应用中,可以根据参数对响应的影响程度来增加高阶项或去除相互效应项。通过统计回归拟合样本点得到响应的估计值 \hat{y}

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^k \sum_{j=2}^k b_{ij} x_i x_j \quad (3)$$

在实际应用中,拟合响应面所需的样本是通过实验设计方法^[15]结合数值计算得到,比如对二阶多项式模型而言,可以采用最常用的中心复合设计得到一组设计点,每个点包含一组参数值,然后带入数

值计算模型(如有限元模型)得到对应的响应值,这样的参数-响应即一个样本。此外,有时为了更准确地拟合响应面中心区域,可以增加数个中心设计点。

拟合响应面模型的准确性一般基于以下 3 种 R^2 准则^[14]来确定

$$\begin{cases} R^2 = 1 - \frac{SS_E}{SS_T} \\ R^2_{\text{adj}} = 1 - \frac{SS_E/d_E}{SS_T/d_T} \\ R^2_{\text{pred}} = 1 - \frac{\text{PRESS}}{SS_T} \end{cases} \quad (4)$$

其中: SS_T 和 SS_E 分别表示模型的总平方和(方差)和残差的平方和; d_T 和 d_E 表示模型总自由度和残差的自由度; PRESS 表示预测残差平方和。

3 个 R^2 值都处于 $[0, 1]$ 区间,且当 R^2 值接近或等于 1 时认为模型是正确的。

1.2 蒙特卡罗仿真

蒙特卡罗方法或蒙特卡罗仿真的核心是随机抽样^[16],过去几十年来被广泛应用于各个科学领域,以求解不同的数学和统计学问题,比如微积分理论无法求解的积分函数。蒙特卡罗仿真通过随机抽样试验,寻求一个事件的发生频率或一个变量的统计期望值,其优点在于容易操作、精度高(当样本数足够大时)、不受几何形状限制以及收敛速度和待求解问题的维数无关等。但是,该方法的最大缺点是需要相当大的计算量,这对于复杂问题的求解往往是难以接受的,特别是在需要直接采用有限元模型进行结构响应计算或参数识别时尤其如此。

笔者采用蒙特卡罗仿真对已知结构响应(频率)的概率分布进行抽样以生成大量响应样本,用于随机模型修正过程。

2 随机模型修正方法

随机模型修正过程通过构建一个反问题来求得结构参数的概率统计特征。通常可以假设参数和响应都服从正态分布,即相应的统计特征值可以用均值和方差来表示。优化过程所需的目标函数则包含了预测和实测响应的统计特征,通过最小化目标函数来求解参数统计特征。和确定性模型修正问题相比,随机模型修正的整体流程基本类似,但实际操作要复杂得多。这是因为在考虑不确定性影响后,修正问题的数学表述要困难得多。同时,随机修正问题的优化过程需要更大的数值计算量,因为每个优化迭代步中都要进行不确定性的正向和反向传播,且相应的梯度计算也很复杂。更大的问题在于考虑

了不确定性后,容易出现病态的优化问题,使得优化过程无法收敛。因此在保证修正精度的前提下,有必要提出更为简单和高效的随机模型修正方法。

2.1 随机模型修正问题的简化

为了简化随机模型修正过程,笔者提出将其分解为一系列的确定性修正过程,通过大量确定性样本计算得到大量的参数预测值,采用基于统计分析方法估计参数的统计特征值。与现有的随机模型修正方法^[9-11]不同的是,此时无需进行不确定性的正向传播,仅保留了反问题的优化过程,即响应的测量误差暂不考虑(其属于认知型不确定性)。这种方式可以大大简化随机模型修正问题。具体来说,首先,构建结构的响应面模型以替代有限元模型,用于快速计算结构响应及优化反演求解;其次,通过实测一组名义上完全相同的试验结构的响应(如频率)估计响应的均值和方差,得到响应的概率分布模型;然后,利用蒙特卡罗抽样得到大量的响应样本,针对每一个响应样本进行确定性的模型修正计算,以得到一组参数值;最后,根据得到的大量参数值估计参数的均值和方差。

值得一提的是,响应面模型的应用使得针对大量样本的优化计算可以很小的计算花费实现,能充分利用蒙特卡罗仿真的高精度得到良好的参数估计结果。相反,若直接采用有限元模型进行计算,则所需的计算量和时间会呈指数级增加,同时优化过程容易出现病态,得不到问题的正确解。可见,笔者提出的随机模型修正方法相对简单,较好地结合了响应面方法和蒙特卡罗仿真的优点,使复杂工程结构的随机模型修正问题容易操作和实现。

2.2 优化算法

采用多目标优化算法实现反问题的优化求解,所构建的优化目标函数 $F(x)$ 包含了某一阶频率的响应面预测值 f_{RSM} 和蒙特卡罗仿真样本值 f_{MCS}

$$F(x) = \text{abs}\left(\frac{f_{RSM} - f_{MCS}}{f_{MCS}}\right) \quad (5)$$

其中: x 表示待修正参数。

采用的无量纲目标函数可以保证各阶频率所对应的目标函数在多目标优化过程中得到同等对待,即权重值相同。优化所采用的多目标优化算法为

$$\min_{x, \gamma} \begin{cases} F(x) - \omega\gamma \leq \text{goal} \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{cases} \quad (6)$$

其中:权重 ω 控制着目标函数相对于优化目标值 goal 的优化效果,因为目标函数可能最终达到预定的目标值或小于该目标值; γ 为一个松弛变量,作为伪自变量来同时最小化所有目标函数; \underline{x} 和 \bar{x} 表示

参数 x 的上下界值。

笔者在试验算例中共测量了 5 阶频率,因此多目标优化过程是针对 5 个频率目标函数进行并行优化,以获取帕累托最优(pareto optimality)解。

3 试验验证

文献[17]对一组共 33 块相同的矩形钢板进行了模态试验并通过随机修正得到钢板几何、材料参数的均值和方差。为了有效验证该方法的可行性和准确性,这里采用同一算例以便比较。试验中每块钢板的名义尺寸为 $564 \text{ mm} \times 110 \text{ mm} \times 1.45 \text{ mm}$;弹性模量和剪切模量的名义值分别为 $210,83 \text{ GPa}$,质量密度为 $7\,860 \text{ kg/m}^3$ 。试验采用锤击法在自由边界条件下对每块钢板进行相同的模态试验,以采集结构的加速度响应信号并分析得到钢板的前 5 阶模态频率。基于所有 33 块钢板的模态频率值,估计得到频率均值和方差,如表 1 所示。可以看到,各阶频率的不确定性都很小,不到 1%。

表 1 钢板实测频率的统计特征值^[17]

频率阶数	均值	标准差	方差
1	24.12	0.113	0.013
2	66.92	0.252	0.063
3	77.65	0.571	0.326
4	131.97	0.424	0.180
5	158.80	0.974	0.949

首先,依据钢板的名义几何和材料参数值建立钢板的有限元模型,分析钢板的前 5 阶模态振型,如图 1 所示。可以看到,钢板的 1,2,4 阶模态为竖向弯曲振型,3,5 阶为扭转振型。然后,分别选取钢板厚度 t 以及材料特性中的弹性模量 E 和剪切模量 G 进行随机模型修正,这是因为相对于工厂给出的名义

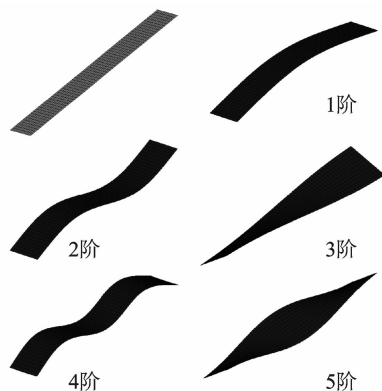


图 1 钢板有限元模型和模态振型

Fig. 1 The FE model and mode shapes of the plates

值,钢板厚度由于制作工艺上存在着容许误差而具有变异性;同时 E 和 G 不是通过直接测量得到的(比如 E 由单向拉伸应力-应变曲线确定),因而具有比 t 更大的不确定性。

3.1 钢板厚度的随机模型修正

通过随机修正方法确定钢板厚度 t 的变异性。首先,将钢板的有限元模型划分为 3 个长度相等的区域 t_1, t_2 和 t_3 ,并假设 3 个参数服从正态分布;其次,根据实测得到的频率概率分布模型,利用蒙特卡罗仿真得到 2 000 个频率响应样本(经研究,该样本数可以满足仿真精度的要求);然后,基于中心复合设计和数值计算生成 20 个样本,以拟合出包含 3 个参数的响应面模型替代有限元模型,所构建模型的 R^2 值均大于 0.98,验证了模型的正确性。式(7)为钢板一阶频率的响应面模型表达式。

$$f_1 = 24.26 + 0.027 4t_1 + 0.430 4t_2 + 0.027 4t_3 + 0.004 2t_1 t_2 + 0.000 4t_1 t_3 + 0.004 2t_2 t_3 - 0.002 3t_1^2 - 0.004 2t_2^2 - 0.002 3t_3^2 \quad (7)$$

最后,构建确定性的优化反问题,运行 2 000 次得到 2 000 组参数值,估计 t_1, t_2 和 t_3 的均值和标准差,如表 2 所示。

表 2 钢板厚度的统计特征估计值

Tab. 2 Estimated statistical features of the plate thicknesses mm

预测值	文献[17]方法			本研究方法		
	t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3
均值	1.452 8	1.449 3	1.452 8	1.460 5	1.455 2	1.460 5
方差/ (10^{-4} mm^2)	1.290	0.535	1.290	0.627	0.770	0.627

比较文献[17]可知,两种方法得到的随机模型修正结果比较类似; t_1 和 t_3 的均值 μ 和方差 σ^2 预测值都相对 t_2 对称,即 $\mu_{t_1} = \mu_{t_3}, \sigma_{t_1}^2 = \sigma_{t_3}^2$,且 3 个参数的均值均非常接近名义值 1.45 mm。该预测结果是合理的,因为实际模型中 t_1 和 t_3 两个区域本身也是对称的,同时厚度均值的预测值应该就在名义值附近。与此同时,本研究方法得到的方差似乎更加合理,因为对此类不大的钢板来说,3 个区域的厚度变异性应该还是比较接近的。由表 3 可知,在修正前后的 5 阶频率均值误差方面,文中方法得到的误差平均值均小于 1%,文献[17]的值为 1.5%左右,说明两种方法的修正精度都很高,但笔者的修正效果更好。如表 4 所示,在频率方差修正上,两种方法的误差都较大。本研究方法在预测扭转模态频率的方差上比文献[17]好一些,但在弯曲模态上的预测值

则变差。要说明的是,目前已有的随机模型修正方法对方差的修正都存在着困难,因此如何提高方差的修正精度仍是一个亟待解决的问题。由图 2 可知,当采用板厚作为修正参数时,修正后的频率无法与实测值吻合,文献[17]也证实了这一点,说明结构几何参数并不适用于该板型结构的修正,因此要考虑采用材料参数进行修正。

表 3 实测、初始模型及修正后的频率均值(参数为板厚)

Tab. 3 Mean measured, initial and updated frequencies using thicknesses as parameters Hz

模态	实测	初始	误差/%	修正后	误差/%
1	24.12	24.26	0.58	24.36	1.00
		(24.27)	(0.64)	(24.27)	(0.61)
2	66.92	67.15	0.34	67.56	0.96
		(67.24)	(0.48)	(67.32)	(0.60)
3	77.65	76.56	1.40	76.88	0.99
		(75.31)	(3.01)	(75.29)	(3.03)
4	131.97	132.17	0.15	132.99	0.77
		(132.51)	(0.41)	(132.68)	(0.53)
5	158.80	156.74	1.30	157.83	0.61
		(154.31)	(2.83)	(154.57)	(2.66)
误差			0.75		0.87
平均值			(1.47)		(1.49)

误差单位%;括号内数据来自文献[17]

表 4 频率方差的实测与预测值(参数为板厚)

Tab. 4 Measured and predicted variances of frequencies using thicknesses as parameters Hz^2

模态	实测	文献[17]	误差/%	本研究方法	误差/%
1	0.013	0.01	23.1	0.021	61.5
2	0.063	0.06	4.8	0.141	123.8
3	0.326	0.13	60.1	0.207	36.5
4	0.180	0.24	33.3	0.544	202.2
5	0.949	0.28	70.5	0.742	21.8

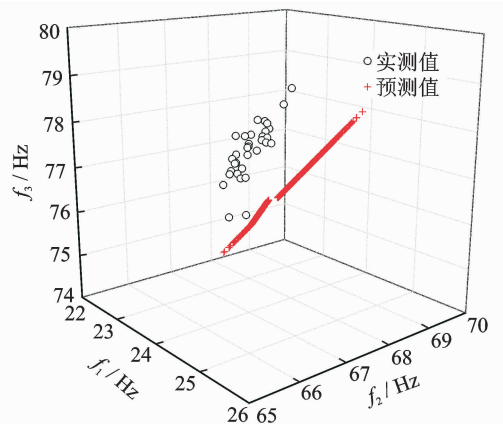


图 2 修正后的钢板频率散点图(参数为板厚)

Fig. 2 Scatter plots of plate frequencies after stochastic updating(using thicknesses as parameters)

3.2 钢板材料参数的随机模型修正

鉴于采用钢板厚度得到的修正结果不能满足要求,因此采用钢板材料参数 E 和 G 作为修正参数。基于中心复合设计和数值计算生成 13 个样本,拟合出 5 阶频率的响应面模型,所构建模型的 R^2 值均大于 0.99,验证了模型的正确性。式(8)为钢板一阶频率的响应面模型表达式

$$f_1 = 24.26 + 0.3754E - 0.0115G - 0.0017EG - 0.0019E^2 + 0.0010G^2 \quad (8)$$

采用和前一节相同的方法进行修正并估计 E , G 的统计特征值。由表 5 可知,本研究方法和文献 [17] 得到的 E, G 均值预测非常接近,也符合钢材的材料特性取值,而且从修正结果上看,材料的变异性很小。在频率均值预测上(表 6),采用材料参数所得到的随机修正结果明显更好。同时对频率方差来说(表 7),两种方法的预测值都得到很大改善,这点由图 3 也可以看到,即图中预测值的点和实测频率点拟合良好。可见,对本例的钢板结构而言,材料参数更适合于随机模型修正。

表 5 钢板材料参数的统计特征估计值

Tab. 5 Estimated statistical features of the plate material properties

预测值	文献[17]方法		本研究方法	
	E	G	E	G
均值/GPa	209.6	83.8	209.2	84.9
方差/(10^{-4} GPa 2)	2.6	1.5	4.6	1.2

表 6 实测、初始模型及修正后的频率均值(参数为材料参数)

Tab. 6 Mean measured, initial and updated frequencies using material properties as parameters

模态	实测	初始	误差/%	修正后	误差/%
1	24.12	24.26	0.58	24.21	0.37
		(24.27)	(0.64)	(24.23)	(0.47)
2	66.92	67.15	0.34	66.93	0.01
		(67.24)	(0.48)	(67.04)	(0.18)
3	77.65	76.56	1.40	77.41	0.31
		(75.31)	(3.01)	(76.67)	(1.25)
4	131.97	132.17	0.15	131.62	0.27
		(132.51)	(0.41)	(131.93)	(0.03)
5	158.80	156.74	1.30	158.31	0.31
		(154.31)	(2.83)	(156.86)	(1.22)
误差			0.75		0.25
平均值			(1.47)		(0.63)

误差单位%;括号内数据来自文献[17]

表 7 频率方差的实测与预测值(参数为材料参数)

Tab. 7 Measured and predicted variances of frequencies using material properties as parameters

模态	实测	文献[17]	误差/%	本研究方法	误差/%
1	0.013	0.01	23.1	0.015	15.4
2	0.063	0.06	4.8	0.114	81.0
3	0.326	0.28	14.1	0.239	26.7
4	0.180	0.22	22.2	0.437	142.8
5	0.949	1.09	14.9	0.957	0.8

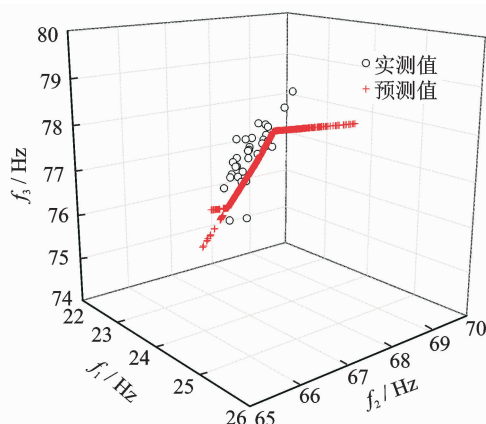


图 3 修正后的钢板频率散点图(参数为材料参数)

Fig. 3 Scatter plots of plate frequencies after stochastic updating (using material properties as parameters)

4 结束语

笔者针对实际工程结构中普遍存在的参数不确定性问题,提出了一种结合响应面和蒙特卡罗仿真的随机模型修正方法。将随机模型修正过程分解为一系列的确定性过程来求解,以求在保证修正精度的同时大幅提高修正效率。采用一组钢板试验结果来验证所提出方法的可行性和可靠性。钢板的几何参数(厚度)和材料参数(弹性模量和剪切模量)被分别用作修正参数,以钢板的实测频率作为修正目标响应。研究表明,该方法可以很好地预测参数的均值,但在参数方差的预测上,采用几何参数得到的误差较大,而采用材料参数则可以大幅改善方差的预测误差,同时预测频率和实测频率的吻合良好。由验证结果可知,所提出的方法可以较好地应用于简单结构的参数不确定性修正问题,但还需要进一步研究其在复杂结构上的应用。

参 考 文 献

[1] Friswell M I, Mottershead J E. Finite element model

- updating in structural dynamics [M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1995: 58-127.
- [2] 李辉, 丁桦. 结构动力模型修正方法研究进展[J]. 力学进展, 2005, 35 (2): 170-180.
Li Hui, Ding Hua. Progress in model updating for structural dynamics [J]. Advances in Mechanics, 2005, 35 (2): 170-180. (in Chinese)
- [3] 费庆国, 韩晓林, 苏鹤玲. 响应面有限元模型修正的实现与应用[J]. 振动、测试与诊断, 2010, 30(2): 132-134.
Fei Qingguo, Han Xiaolin, Su Heling. Response surface based finite element model updating and its application[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010, 30(2): 132-134. (in Chinese)
- [4] 杨小森, 闫维明, 陈彦江, 等. 基于模型修正的大跨斜拉桥损伤识别方法[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32 (2): 276-281.
Yang Xiaosen, Yan Weiming, Chen Yanjiang, et al. Damage identification of a large-span cable-stayed bridge by model updating [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(2): 276-281. (in Chinese)
- [5] Fang S E, Perera R, Roeck G D. Damage identification of a reinforced concrete frame by finite element model updating using damage parameterization [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 313 (3-5): 544-559.
- [6] Moens D. A non-probabilistic finite element approach for structural dynamic analysis with uncertain parameters [D]. Belgium: Catholic University of Leuven, 2002.
- [7] Collins J D, Hart G C, Hasselman T K, et al. Statistical identification of structures [J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1974, 12 (2): 185-190.
- [8] Beck J L, Katafygiotis L S. Updating models and their uncertainties. I: bayesian statistical framework [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1998, 124 (4): 455-461.
- [9] Steenackers G, Guillaume P. Finite element model updating taking into account the uncertainty on the modal parameters estimates [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 296 (4-5): 919-934.
- [10] Mares C, Mottershead J E, Friswell M I. Stochastic model updating; part 1-theory and simulated example [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20 (7): 1674-1695.
- [11] Khodaparast H H, Mottershead J E, Friswell M I. Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22 (8): 1751-1773.
- [12] Fang S E, Perera R. A response surface methodology based damage identification technique [J]. Smart Materials and Structures, 2009, 18 (6): 065009.
- [13] Fang S E, Perera R. Damage identification by response surface model updating using D-optimal design [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, 25 (2): 717-733.
- [14] Myers R H, Montgomery D C, Anderson-Cook C M. Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments [M]. New York: John Wiley & Sons, 2009: 220-228.
- [15] Montgomery D C. Design and analysis of experiments [M]. New York: John Wiley & Sons, 2004: 427-466.
- [16] Fishman G S. Monte carlo concepts, algorithms, and applications [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, Springer, 2003: 1-4.
- [17] Husain N A, Khodaparast H H, Ouyang H J. Parameter selections for stochastic uncertainty in dynamic models of simple and complicated structures [C] // Proceedings of the 10th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics. Southampton, UK: University of Southampton, 2010.



第一作者简介:方圣恩,男,1980年8月生,博士、副教授。主要研究方向为结构健康监测与损伤识别、结构稳定与振动、模型修正与确认。曾发表《Damage identification by response surface based model updating using D-optimal design》(《Mechanical Systems and Signal Processing》2011, Vol. 25, No. 2)等论文。
E-mail: shengen.fang@fzu.edu.cn