

偏心结构基于 LMI 的鲁棒 H_∞ 控制*

李志军¹, 刘园园¹, 王社良², 顾致平¹

(1. 西安工业大学建筑工程学院 西安, 710032) (2. 西安建筑科技大学土木工程学院 西安, 710055)

摘要 针对传统线性二次型最优控制(linear quadratic optimal control, 简称 LQR)等主动控制方法存在鲁棒性较差的不足, 提出一种新的基于线性矩阵不等式的鲁棒 H_∞ 控制方法。通过将工程中常用的二次型最优性能指标结合于鲁棒 H_∞ 控制系统的分析中, 应用线性矩阵不等式减小求解的复杂度, 使得控制器的设计较为简单, 便于工程应用。考虑到实际中地震动的不确定性和结构的非对称性, 以多层偏心结构作为研究对象, 在结构顶层沿两个主轴方向正交设置两个主动质量阻尼器(active mass damper, 简称 AMD)控制装置来控制结构在水平双向地震动作用下的扭转耦联振动, 其中 AMD 系统的主动控制力由鲁棒 H_∞ 控制算法获得。仿真结果表明, 该方法具有较好的控制效果和鲁棒性。

关键词 鲁棒控制; 性能指标; 阻尼器; 线性矩阵不等式; 偏心结构; 双向地震动

中图分类号 TU311.4; O328

引言

土木工程结构振动控制的研究和应用已有 30 余年的历史, 其研究和应用大体上分为 3 个领域: 基础隔震、被动耗能减振以及主动、半主动和智能控制。结构的主动控制相对于被动控制具有控制效果好、精度高、能够有效处理外部干扰等诸多优点, 存在巨大的工程应用价值。在实际的土木工程结构控制中, 结构的模型参数(如结构的阻尼和刚度)难以用数学模型来精确描述。结构的不确定性会导致系统控制的不稳定和控制性能恶化, 为此研究对结构参数和外部扰动具有较好鲁棒性, 调节简单的控制算法是土木工程结构振动控制研究的一个重要方面^[1-2]。

从理论的系统完整性以及工程应用的成功事例来看, H_∞ 方法在鲁棒控制中占有主流地位^[3-5]。虽然鲁棒 H_∞ 控制理论已日臻完善, 但其在结构振动控制工程中的应用相对较少, 主要原因是系统综合的复杂性, 以及无穷范数形式与常用工程评价指标

间的差异性等。为了使鲁棒 H_∞ 方法能尽快应用于实际结构振动控制工程中, 许多学者以一维地震动作用下的对称结构为研究对象, 进行了相应的研究工作, 但仍存在许多问题。文献[6]需求解两个 Raccati 方程, 求解不易收敛。文献[7-9]需要待定的控制器参数过多, 设计过程繁琐不便于工程实际应用。文献[10]基于频域方法设计了鲁棒控制器, 但计算过程繁琐, 应用十分困难。

由于地震动的本质是多维的, 对于非对称结构, 地震时作用在质量中心的惯性力将对刚度中心产生扭转力矩, 迫使结构产生扭转耦联空间振动^[11-12]。为解决鲁棒 H_∞ 方法在结构振动控制工程应用上的问题, 笔者以多层偏心结构-AMD(active mass damper, 简称 AMD)体系作为研究对象, 将工程中常用的二次型最优指标结合于鲁棒 H_∞ 最优控制系统的分析中, 应用线性矩阵不等式减小求解的复杂度, 设计了一种便于工程应用的鲁棒 H_∞ 控制方法, 以一个三层偏心结构-AMD 体系为例进行了相应的数值分析。

* 国家自然科学基金资助项目(51178388); 陕西省工业攻关项目(2013K07-07); 陕西省教育厅专项科研计划资助项目(2013JK0612); 西部地区人才培养特别项目(201208615016); 西安工业大学校长基金重点项目(XAGDXJJ0919); 西安工业大学青年英才项目

收稿日期: 2012-09-26; 修回日期: 2012-12-20

1 AMD-偏心结构的运动方程

多层偏心结构-AMD体系的计算模型如图1所示。其中, M 和 S 分别为结构的质量和刚度中心, 结构坐标系的坐标原点取在质心处。为简单起见, 采用以下基本假定:

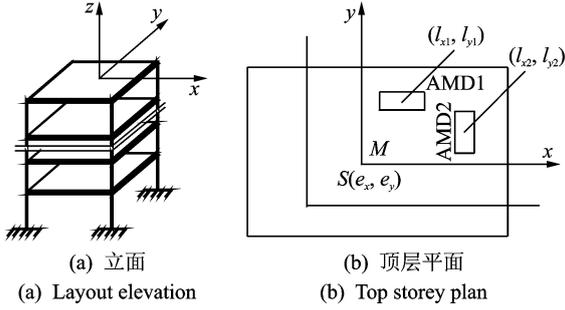


图1 装有 AMD 的偏心结构模型

Fig.1 An eccentric building's model with AMD systems

- 1) 结构各层的质量和转动惯量集中于各楼层顶层板处;
- 2) 各楼层采用刚性楼板假定;
- 3) 结构各层的质心和刚度位置沿竖向不改变;
- 4) 地震动输入考虑两个水平分量。

假设在结构顶层沿 x, y 方向分别放置一个 AMD 装置, 控制结构平动和扭转振动, 则可得到 AMD-结构的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}_g\ddot{\mathbf{X}}_g(t) + \mathbf{B}_s\mathbf{U}(t) \quad (1)$$

其中: $\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}$ 分别为结构-AMD 系统的位移向量、速度向量和加速度向量, $\mathbf{X} = \{x \ y \ \theta \ \Delta x_a \ \Delta y_a\}^T$ (x, y 分别为结构各层相对于地面沿 x, y 方向的位移向量; θ 为结构各层绕质心的转角向量; $\Delta x_a, \Delta y_a$ 表示 AMD 惯性质量相对结构顶部沿 x, y 方向的位移); \mathbf{B}_s 为控制力作用位置矩阵; $\mathbf{U}(t) = \{U_{a1}, U_{a2}\}^T$ 为作动器作用在结构和 AMD 惯性质量上的驱动力; \mathbf{M}, \mathbf{C} 和 \mathbf{K} 分别为结构-AMD 系统的质量阵、阻尼阵和刚度阵; $\ddot{\mathbf{X}}_g(t) = \{\ddot{x}_g \ \ddot{y}_g\}^T$ 为二维地震动输入向量; $\mathbf{M} =$

$$\mathbf{M}_{\text{jiegou}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{jiegou}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\text{oulian}}^T & \mathbf{M}_{\text{AMD}} \end{bmatrix}_{(3n+2) \times (3n+2)}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{jiegou}} & \mathbf{K}_{\text{oulian}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{AMD}} \end{bmatrix}_{(3n+2) \times (3n+2)};$$

$$\mathbf{M}_{\text{jiegou}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{\theta\theta} \end{bmatrix}_{3n \times 3n};$$

$$\mathbf{M}_{xx} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}_{n \times n}; \quad \mathbf{M}_{yy} = \mathbf{M}_{xx};$$

$$\mathbf{M}_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n \end{bmatrix}_{n \times n}; \quad \mathbf{M}_{\text{AMD}} = \begin{bmatrix} m_{a1} & \\ & m_{a2} \end{bmatrix}_{2 \times 2};$$

$$\mathbf{M}_{\text{oulian}}^T = \begin{bmatrix} 0 \cdots m_{a1} & 0 \cdots 0 & 0 \cdots m_{a1}l_{y1} + m_{a2}l_{y2} \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots m_{a2} & 0 \cdots m_{a2}l_{x2} + m_{a1}l_{x1} \end{bmatrix}_{2 \times 3n};$$

$$\mathbf{K}_{\text{jiegou}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & 0 & \mathbf{K}_{x\theta} \\ 0 & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{K}_{y\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta x} & \mathbf{K}_{\theta y} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}_{3n \times 3n};$$

$$\mathbf{K}_{xx} = \begin{bmatrix} k_{x_1x_1} & k_{x_1x_2} & 0 & \cdots \\ k_{x_2x_1} & k_{x_2x_2} & k_{x_2x_3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{x_{n-1}x_{n-2}} & k_{x_{n-1}x_{n-1}} & k_{x_{n-1}x_n} & \\ & k_{x_nx_{n-1}} & k_{x_nx_n} + k_{a1} \end{bmatrix}_{n \times n};$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \begin{bmatrix} k_{y_1y_1} & k_{y_1y_2} & 0 & \cdots \\ k_{y_2y_1} & k_{y_2y_2} & k_{y_2y_3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{y_{n-1}y_{n-2}} & k_{y_{n-1}y_{n-1}} & k_{y_{n-1}y_n} & \\ & k_{y_ny_{n-1}} & k_{y_ny_n} + k_{a2} \end{bmatrix}_{n \times n};$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} k_{\theta_1\theta_1} & k_{\theta_1\theta_2} & 0 & \cdots \\ k_{\theta_2\theta_1} & k_{\theta_2\theta_2} & k_{\theta_2\theta_3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{\theta_{n-1}\theta_{n-2}} & k_{\theta_{n-1}\theta_{n-1}} & k_{\theta_{n-1}\theta_n} & \\ & k_{\theta_n\theta_{n-1}} & k_{\theta_n\theta_n} + k_{a1}l_{y1}^2 + k_{a2}l_{x2}^2 \end{bmatrix}_{n \times n};$$

$$\mathbf{K}_{x\theta} = \mathbf{K}_{\theta x}^T = \mathbf{K}_{xx}e_y; \quad \mathbf{K}_{y\theta} = \mathbf{K}_{\theta y}^T = \mathbf{K}_{yy}e_x;$$

$$\mathbf{K}_{\text{oulian}}^T = \begin{bmatrix} 0 \cdots -k_{a1} & 0 \cdots 0 & 0 \cdots -k_{a1}l_{y1} \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots -k_{a2} & 0 \cdots -k_{a2}l_{x2} \end{bmatrix}_{2 \times 3n};$$

$$\mathbf{K}_{\text{AMD}} = \begin{bmatrix} k_{a1} & \\ & k_{a2} \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

地震动影响系数矩阵为

$$\mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} m_1 \cdots m_n & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & m_{a1} & 0 \\ 0 \cdots 0 & m_1 \cdots m_n & 0 \cdots 0 & m_{a2} \end{bmatrix}_{2 \times (3n+2)} \quad (2)$$

控制力作用位置矩阵为

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} 0 \cdots -1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots l_{y1} & 1 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots -1 & 0 \cdots l_{x2} & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times (3n+2)} \quad (3)$$

笔者采用 Rayleigh 阻尼, 即

$$C = \alpha M + \beta K \quad (4)$$

其中: α, β 为与体系圆频率有关的系数。

可以通过结构体系的任意两振型频率 ω_i, ω_j 和阻尼比 ζ_i, ζ_j 确定

$$\alpha = \frac{2\omega_i\omega_j(\zeta_i\omega_j - \zeta_j\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{2(\zeta_j\omega_j - \zeta_i\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (6)$$

2 鲁棒 H_∞ 控制器设计

考虑结构刚度和阻尼具有不确定性的影响, 则式(1)可以重新描述为

$$M\ddot{X} + (C + \Delta_C)\dot{X} + (K + \Delta_K)X = -M_g\ddot{y}_g(t) + B U(t) \quad (7)$$

其中: Δ_K, Δ_C 分别为刚度和阻尼的不确定性矩阵。

式(7)可化为以下状态方程

$$\dot{Z}(t) = (A + \Delta A)Z(t) + B U(t) + H w(t) \quad (8)$$

系统输出矩阵为

$$Y_s = IZ(t) = C_d X + C_v \dot{X} \quad (9)$$

其中: $Z(t) = \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_s \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}M_g \end{bmatrix}$;

$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}\Delta_K & -M^{-1}\Delta_C \end{bmatrix}$; $\Gamma = [C_d \ C_v]$;

$w(t) = \{\ddot{x}_g \ \ddot{y}_g\}^T$ 为考虑附加地震动分量的结构外部激励向量。

刚度和阻尼不确定性矩阵可以表示为

$$\Delta_K = L_k F_k E_k \quad (10)$$

$$\Delta_C = L_c F_c E_c \quad (11)$$

其中: $F_k \leq 1, F_c \leq 1$; L_k, E_k, L_c, E_c 为表示相应结构刚度和阻尼变化的已知定常矩阵。

参数不确定性矩阵 ΔA 具有如下形式

$$\Delta A = D F(t) E \quad (12)$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}L_k & -M^{-1}L_c \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & F_c \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_c \end{bmatrix}$$

定义系统的二次型性能泛函为

$$J = \int_0^\infty (Z^T(t) Q Z(t) + U^T(t) R U(t)) dt \quad (13)$$

其中: Q 为相应维数的半正定矩阵; R 为相应维数的正定矩阵。

定义 1 对于不确定线性系统(式(8))以及相应的性能指标(式(13)), 如果存在一个状态反馈 $U(t) = -K_u Z(t)$, 使得闭环系统对于所有容许的不确定性满足下面 3 个条件:

- 1) 闭环系统是渐进稳定的;
- 2) 闭环系统是 LQ 意义下最优的;

3) 当初始条件 $Z(0) = 0$ 时, 从系统外部扰动输入 $w(t)$ 到系统输出 $Y_s(t)$ 的传递函数 $T_{Y_s w}(s)$ 的 H_∞ 范数 $\|T_{Y_s w}(s)\|_\infty < \gamma$, 其中 γ 为一给定的正数。则称系统(式(8))是在反馈 $U(t) = -K_u Z(t)$ 下鲁棒 H_∞ 最优的, $U(t) = -K_u Z(t)$ 为鲁棒 H_∞ 最优控制律。

由文献[13]给出以下引理。

引理 1 设 X_c, Y_c 和 Z_c 为具有适当维数的向量或矩阵, 则对任意正数 $\eta > 0$, 以下不等式总成立

$$X_c^T Y_c + Y_c^T X_c \leq \eta X_c^T X_c + \eta^{-1} Y_c^T Y_c \quad (14)$$

定理 1 给定常数 $\gamma > 0$, 对于不确定系统线性系统(式(8))和性能指标(式(13)), 如果存在 $P = P^T > 0$ 使得下面的矩阵不等式成立

$$(A + \Delta A - B K_u)^T P + P(A + \Delta A - B K_u) + Q + K_u^T R K_u + \gamma^2 P H H^T P + \Gamma^T \Gamma < 0 \quad (15)$$

则称系统(式(8))是在反馈 $U(t) = -K_u Z(t)$ 下鲁棒 H_∞ 最优。

证明 引入 Lyapunov 函数 $V(Z(t)) = Z^T(t) P Z(t)$, 限于篇幅, 定义 1 中的前两个条件可参看文献[4]中的相应定理的证明过程。

要证明当 $w(t) \neq 0$ 且系统的初始条件为 $Z(0) = 0$ 时, 满足式(15), 则在反馈 $U(t) = -K_u Z(t)$ 下, 闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能指标, 即

$$\|Y_s\|_2 < \gamma \|w\|_2 \quad (16)$$

注意到式(16)等价于

$$\int_0^\infty (Y_s^T Y_s - \gamma^2 w^T w) dt < 0 \quad (17)$$

因此只需证明式(17)成立。考虑到

$$\int_0^\infty (Y_s^T Y_s - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(Z(t))) dt = \int_0^\infty (Y_s^T Y_s - \gamma^2 w^T w) dt + V(Z(\infty)) - V(Z(0))$$

由于系统是渐进稳定的, 有 $V(Z(\infty)) = 0$, 且系统的初始条件为 $Z(0) = 0$, 所以式(17)成立的一个充分条件为

$$Y_s^T Y_s - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(Z(t)) < 0 \quad (18)$$

也即

$$Y_s^T Y_s - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(Z(t)) =$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Z}^T(t) \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} - \mathbf{BK}_u)^T \mathbf{P} + \\ \mathbf{P}(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} - \mathbf{BK}_u) \end{bmatrix} \mathbf{Z}(t) + \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{w} + \\ & \mathbf{Z}^T(t) \Gamma^T \Gamma \mathbf{Z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

由引理1可知

$$\begin{aligned} & \mathbf{w}^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{w} \leq \\ & \gamma^{-2} \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{Z}(t) + \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} \end{aligned}$$

式(19)成立的一个充分条件为

$$\begin{aligned} & \mathbf{Z}^T(t) [(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} - \mathbf{BK}_u)^T \mathbf{P} + \\ & \mathbf{P}(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} - \mathbf{BK}_u)] \mathbf{Z}(t) + \\ & \gamma^{-2} \mathbf{Z}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}^T(t) \Gamma^T \Gamma \mathbf{Z}(t) < 0 \end{aligned} \quad (20)$$

由式(15)可知,式(20)是成立的。由前面的推导可知,式(20)是式(17)成立的充分条件,所以系统具有鲁棒 H_∞ 性能指标。因此,根据定义1得证定理。证毕。

定理2 给定常数 $\gamma > 0$,对于不确定线性系统(式(8))和性能指标(式(13)),闭环系统鲁棒 H_∞ 最优的一个充分条件是存在常数 $\epsilon > 0$ 、矩阵 $\mathbf{N} = \mathbf{N}^T > 0$ 和 \mathbf{Y} ,使得如下的线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{N} & \mathbf{Y}^T & \mathbf{H} & \mathbf{N} \Gamma^T & \mathbf{N} \mathbf{E}^T \\ * & -\mathbf{Q}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -\epsilon^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

其中: $\Phi = \mathbf{N} \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \mathbf{N} - \mathbf{B} \mathbf{Y} + \epsilon^{-1} \mathbf{D} \mathbf{D}^T$ 。

若式(21)成立,则对应的鲁棒 H_∞ 最优控制律为

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{K}_u \mathbf{Z}(t) = -\mathbf{Y} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Z}(t) \quad (22)$$

证明 由于

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \Delta \mathbf{A} = \mathbf{E}^T \mathbf{F}^T \mathbf{D}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{F} \mathbf{E} \leq \\ & \epsilon \mathbf{E}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{E} + \epsilon^{-1} \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P} \leq \\ & \epsilon \mathbf{E}^T \mathbf{E} + \epsilon^{-1} \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P} \end{aligned}$$

所以式(15)成立的一个充分条件为

$$\mathbf{K}_u = 10^6 \times$$

$$\begin{bmatrix} 0.66 & 7.77 & 13.00 & -0.77 & -1.44 & -0.33 & -11.32 & -40.06 & -49.58 & -2.74 & 0.16 \\ -1.26 & -2.57 & -0.38 & -4.23 & -4.92 & 17.79 & -17.38 & -60.93 & -75.95 & 0.11 & -2.73 \\ 0.04 & 0.3 & -0.43 & -0.003 & -0.03 & -0.02 & -0.28 & -0.59 & -3.82 & -1.46 & -0.01 \\ -0.05 & -0.09 & -0.07 & -0.21 & -0.26 & -0.51 & -0.42 & -0.87 & -5.91 & -0.02 & -1.53 \end{bmatrix}$$

结构各层层间最大位移、扭转角、各层相对于地面的最大加速度以及相应的 AMD 系统的最大控制力如表1所示。其中:工况1表示无控制;工况2表

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_u)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_u) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}_u^T \mathbf{R} \mathbf{K}_u + \\ & \gamma^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{P} + \Gamma^T \Gamma + \epsilon \mathbf{E}^T \mathbf{E} + \epsilon^{-1} \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P} < 0 \end{aligned}$$

分别用 \mathbf{P}^{-1} 和 \mathbf{P}^{-T} 左乘、右乘上式两端,注意到 $\mathbf{P}^{-T} = \mathbf{P}^{-1}$,可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}_u^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{B} \mathbf{K}_u \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} + \\ & \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}_u^T \mathbf{R} \mathbf{K}_u \mathbf{P}^{-1} + \gamma^{-2} \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \mathbf{P}^{-1} \Gamma^T \Gamma \mathbf{P}^{-1} + \\ & \epsilon \mathbf{P}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{P}^{-1} + \epsilon^{-1} \mathbf{D} \mathbf{D}^T < 0 \end{aligned}$$

令 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_u \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Y}$,则有 $\mathbf{K}_u = \mathbf{Y} \mathbf{N}^{-1}$,并得

$$\begin{aligned} & \mathbf{N} \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \mathbf{N} - \mathbf{B} \mathbf{Y} + \mathbf{N} \mathbf{Q} \mathbf{N} + \mathbf{Y}^T \mathbf{R} \mathbf{Y} + \\ & \gamma^{-2} \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \mathbf{N} \Gamma^T \Gamma \mathbf{N} + \epsilon \mathbf{N} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{N} + \epsilon^{-1} \mathbf{D} \mathbf{D}^T < 0 \end{aligned}$$

应用 Schur 补性质^[13],可得到式(21)。另外,由于式(21)是式(15)的充分条件,所以由定理2和定义1即得证本定理。证毕。

3 数值分析

以一个3层偏心结构为例来验证所提出方法的有效性。结构的层间质量 $m = 5.0 \times 10^5$ kg,楼板对质心的转动惯量 $J = 3.0 \times 10^5$ kg·m²,结构 x 方向的刚度系数 $k_x = 4.9 \times 10^8$ N/m,结构 y 方向的刚度系数 $k_y = 9.8 \times 10^7$ N/m,扭转刚度 $k_t = 3.5 \times 10^{10}$ N·m/rad;结构在 x 方向的偏心距 $e_x = 3$ m, y 方向的偏心距 $e_y = 2$ m;结构阻尼比 $\xi = 0.01$ 。分别在 x 方向和 y 方向各设置一个 AMD。两个 AMD 参数相同,取值 $m_a = 5.0 \times 10^4$ kg, $k_a = 1.97 \times 10^6$ N/m。考虑在 El Centro 双向地震动作用下的结构反应,地震波加速度峰值调整为 $0.2g$,采样周期为 0.02 s。

选取性能指标(即式(13))中加权矩阵为 $\mathbf{Q} = \text{diag}\{10^5 \quad 10^5 \quad 0.5 \times 10^5 \quad 2 \times 10^4 \quad 2 \times 10^4 \quad 10^4 \quad 5 \times 10^6 \quad 5 \times 10^6 \quad 2.5 \times 10^6 \quad 200 \quad 200 \quad 50 \quad 50 \quad 50 \quad 50 \quad 50 \quad 50 \quad 30 \quad 30 \quad 30 \quad 1 \quad 1\}$; $\mathbf{R} = \text{diag}\{10^{-7} \quad 10^{-7} \quad \}$ 。

假设结构刚度和阻尼变化的幅值分别为 10% ,取 $\gamma = 2.78 \times 10^4$, $\epsilon = 6 \times 10^4$, $\mathbf{E} = \Gamma = \mathbf{I}_{22}$,则由式(21)和式(22)得到控制器增益矩阵

示标称结构的鲁棒 H_∞ 控制;工况3表示结构刚度和阻尼同时增长 5% 的鲁棒 H_∞ 控制;工况4表示结构刚度和阻尼同时增长 10% 的鲁棒 H_∞ 控制。从表

中可以看出:a. 在设定的参数变化范围内,所提方法具有很好的鲁棒性,当参数变化越大(如工况 4)时,鲁棒性相对而言略差一些;b. 从控震效果来看,工

况 4 具有相对最好的效果,这是因为在控制力近似相同的情况下,工况 4 情况下结构的刚度相对最大所致。

表 1 结构最大地震反应和控制力

Tab.1 Maximum response quantities

控制参数	层间位移			加速度			最大控制力/ kN	
	x/	y/	θ /	\ddot{x} /	\ddot{y} /	$\ddot{\theta}$ /		
	cm	cm	10^{-2} rad	$(\text{cm} \cdot \text{s}^{-2})$	$(\text{cm} \cdot \text{s}^{-2})$	$(10^{-2} \text{rad} \cdot \text{s}^{-2})$		
工况 1	1	2.46	6.07	0.13	546	417	23.54	
	2	1.84	4.24	0.11	796	519	36.28	
	3	0.95	2.00	0.06	889	677	41.34	
工况 2	1	1.40(43)	4.17(31)	0.08(38)	369(32)	323(23)	16.21(31)	$U_{1\max} = 339$
	2	1.02(45)	3.05(28)	0.06(45)	494(38)	373(28)	20.86(43)	$U_{2\max} = 263$
	3	0.52(45)	1.50(25)	0.04(33)	597(33)	474(30)	25.44(38)	
工况 3	1	1.39(43)	4.19(31)	0.08(38)	328(40)	327(22)	15.03(36)	$U_{1\max} = 329$
	2	1.02(45)	2.96(30)	0.06(45)	468(41)	384(26)	20.91(42)	$U_{2\max} = 254$
	3	0.51(46)	1.48(26)	0.04(33)	560(37)	486(28)	24.38(41)	
工况 4	1	1.31(47)	4.09(33)	0.08(38)	323(41)	322(23)	15.23(35)	$U_{1\max} = 319$
	2	0.96(48)	2.90(32)	0.06(45)	437(45)	421(19)	20.43(44)	$U_{2\max} = 256$
	3	0.49(48)	1.46(27)	0.04(33)	528(41)	487(28)	24.78(40)	

括号内数值表示减震率

设计 LQR 控制器^[1], 将其与鲁棒 H_∞ 控制器在基本相同的控制效果下作对比, 以显示后者更好的鲁棒性, 取 $Q = \text{diag}\{10^7 \ 10^7 \ 0.5 \times 10^7 \ 2 \times 10^6 \ 2 \times 10^6 \ 10^6 \ 10^6 \ 5 \times 10^8 \ 5 \times 10^8 \ 2.5 \times 10^8 \ 2 \times 10^4$

$2 \times 10^4 \ 5 \times 10^3 \ 5 \times 10^3 \ 5 \times 10^3 \ 5 \times 10^3 \ 5 \times 10^3$
 $5 \times 10^3 \ 3 \times 10^3 \ 3 \times 10^3 \ 3 \times 10^3 \ 100 \ 100\}$

$R = \text{diag}\{1.07 \times 10^{-7} \ 1.07 \times 10^{-7}\}$. 可得 LQR 控制器增益矩阵

$$K_u = 10^6 \times$$

$$\begin{bmatrix} -0.38 & -0.79 & -1.14 & 0.04 & 0.03 & -0.05 & 0.14 & 0.31 & 0.59 & 0.04 & -0.001 \\ -0.013 & -0.045 & -0.085 & -0.55 & -1.26 & -2.246 & 0.218 & 0.48 & 0.84 & -0.01 & 0.03 \\ -0.14 & -0.28 & -0.33 & 0.01 & 0.01 & 0.005 & 0.014 & 0.03 & 0.20 & 0.08 & -0.0015 \\ -0.0025 & -0.01 & -0.02 & 0.065 & 0.05 & 0.04 & 0.016 & 0.03 & 0.49 & -0.00 & 0.15 \end{bmatrix}$$

各种不同工况下, 结构各层最大地震反应如图

2 所示。其中:LQR(0%)表示标称结构的 LQR 控

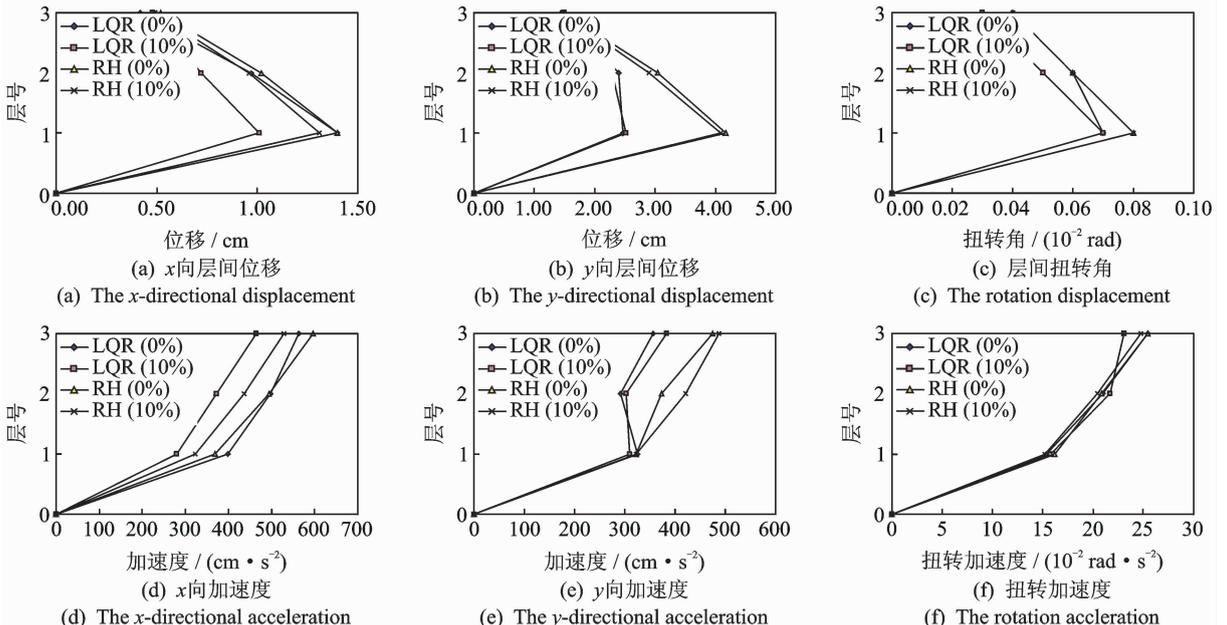


图 2 结构最大地震反应
Fig.2 Maximum response quantities

制;RH(0%)表示标称结构的鲁棒 H_∞ 控制;LQR(10%)表示结构刚度和阻尼同时增长10%的LQR控制;RH(10%)表示结构刚度和阻尼同时增长10%的鲁棒 H_∞ 控制。结构各层最大地震反应如图2所示。从图2中可以看出,与传统LQR控制算法相比,笔者所提出的方法在保证控制效果的前提下具有更好的鲁棒稳定性。

工况2情况下偏心结构底层的地震反应时程曲线如图3~8所示。可以看出,所提出的鲁棒 H_∞ 控

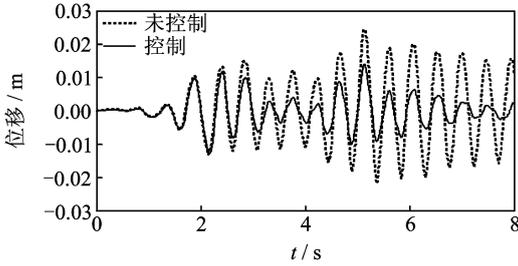


图3 底层 x 方向位移时程

Fig. 3 The x -directional displacement of the first storey

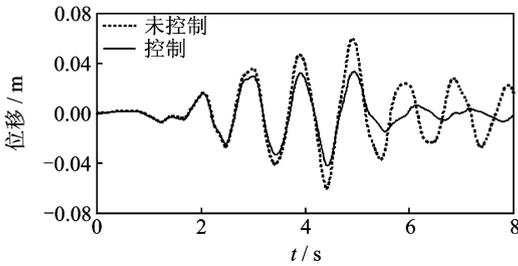


图4 底层 y 方向位移时程

Fig. 4 The y -directional displacement of the first storey

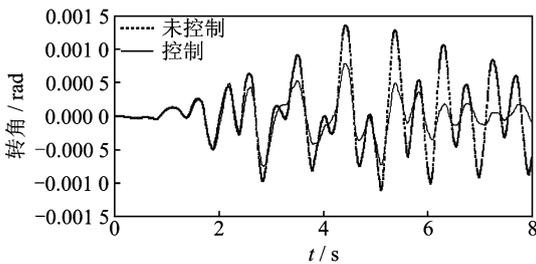


图5 底层扭转位移时程

Fig. 5 The rotation displacement of the first storey

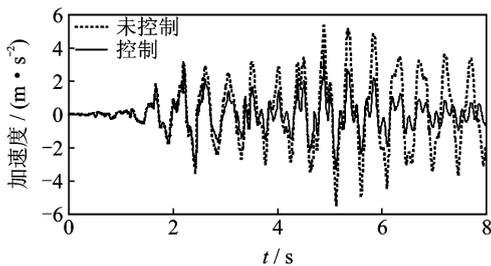


图6 底层 x 方向加速度时程

Fig. 6 The x -directional acceleration of the first storey

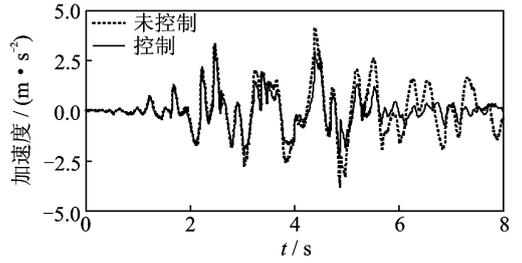


图7 底层 y 方向加速度时程

Fig. 7 The y -directional acceleration of the first storey

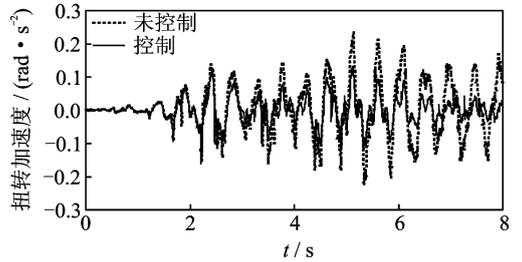


图8 底层扭转加速度时程

Fig. 8 The rotation acceleration of the first storey

制方法具有很好的控制效果。

4 结束语

非对称结构在实际的多维地震动作用下,将发生扭转耦联空间振动。为了使鲁棒 H_∞ 控制方法能尽快应用于实际的结构振动控制工程中,以多层偏心结构-AMD体系作为研究对象,考虑水平双向地震动作用,提出一种基于LMI的鲁棒 H_∞ 控制方法。通过将工程中常用的二次型最优指标结合于鲁棒 H_∞ 最优控制系统的分析中,并应用线性矩阵不等式减小求解的复杂度,使得控制器的设计较为简单,便于工程应用。以一个3层偏心结构-AMD体系为例进行了相应的数值分析,仿真结果初步表明,该方法应用于实际结构振动控制工程是可行且有效的,具有较好的控制效果和鲁棒性。

参 考 文 献

- [1] 欧进萍. 结构振动控制-主动、半主动和智能控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003:1-18.
 - [2] 马乾英, 王社良, 朱军强. 大跨空间结构智能监测优化设计及信号处理[J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(3):285-290.
- Ma Qianying, Wang Sheliang, Zhu Junqiang. Opti-

- mum design of long-span structure sensor arrangement and signal processing[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011, 31(3):285-290. (in Chinese)
- [3] 贾英民. 鲁棒 H_∞ 控制[M]. 北京: 科学出版社, 2007:144-178.
- [4] 薛安克. 鲁棒最优控制理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008:97-123.
- [5] Yang Jann, Wu Jong-cheng. Experimental verifications of H_∞ and sliding-mode control for seismically excited buildings[J]. Journal of Structural Engineering ASCE, 1996, 122(1): 69-75.
- [6] Calise A J, Sweriduk G D. Active attenuation of building structural response using robust control[J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 1998, 124(5): 520-528.
- [7] Wang Shengguo, Roschke P N, Yeh H Y. Robust control for structural systems with unstructured uncertainties[J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 2004, 130(3):337-346.
- [8] Du Haiping, Lam J, Sze K Y. Non-fragile H_∞ vibration control for uncertain structural systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 273(4-5): 1031-1045.
- [9] 李文章, 吴凌尧, 郭雷. 基于 LMI 的结构振动鲁棒 H_∞ 控制[J]. 振动工程学报, 2008, 21(2):157-161.
Li Wenzhang, Wu Lingyao, Guo Lei. Robust H_∞ control of structural vibration based on LMI[J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(2): 157-161. (in Chinese)
- [10] Wu J C, Chih H H, Chen C H. A robust method for seismic protection of civil frame building[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 294(1-2):314-328.
- [11] 李宏男, 金峤. 遗传 BP 神经网络主动 AMD 对偏心结构的减震控制[J]. 地震工程与工程振动, 2003, 23(2):134-142.
Li Hongnan, Jin Qiao. AMD active control for irregular buildings using GA-BP neural network[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2003, 23(2):134-142. (in Chinese)
- [12] 霍林生, 李宏男. 调液阻尼器对偏心结构扭转耦联振动控制的研究[J]. 工程力学, 2010, 27(1):84-90.
Huo Linsheng, Li Hongnan. Torsionally coupled vibration control of eccentric buildings using tuned liquid dampers[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2010, 27(1):84-90. (in Chinese)
- [13] Boyd S P, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequality in systems and control theory[M]. Philadelphia, US: Society for Industrian and Applied Mathematics, 1994:7-37.



第一作者简介:李志军,男,1975年8月生,博士后、副教授。主要研究方向为结构振动控制。曾发表《建筑结构基于 LMI 的鲁棒非脆弱 H_∞ 控制》(《工程力学》2013 年第 30 卷第 4 期)等论文。
E-mail: lzjsjh@aliyun.com

欢迎订阅《振动、测试与诊断》

《振动、测试与诊断》由工业和信息化部主管,南京航空航天大学 and 全国高校机械工程测试技术研究会联合主办,是反映振动、动态测试及故障诊断学科领域的科研成果及其应用情况的技术性刊物。主要刊登国内外以振动测试与故障诊断为中心的动态测试理论、方法和手段的研究及应用方面的技术文献,包括实验测试技术、测试仪器的研制、方法和系统组成、信号分析、数据处理、参数识别与故障诊断以及有关装置的设计、使用、控制、标定和校准等,不拘泥于行业和测试项目。

本刊为 EI Compendex 数据库收录期刊和中文核心期刊,双月刊,每逢双月末出版,每本定价 20 元,全年 120 元。欢迎订阅和投稿,欢迎在本刊刊登各类广告和科技信息。

编辑部地址:南京市御道街 29 号 邮政编码:210016

电话:(025)84893332

传真:(025)84893332 E-mail:qchen@nuaa.edu.cn

网址:http://zdcn.nuaa.edu.cn