

# 基于 Stribeck 模型的自激系统分岔混沌特性研究<sup>\*</sup>

李小彭, 鞠行, 杨皓天, 梁亚敏, 闻邦椿

(东北大学机械工程与自动化学院 沈阳, 110819)

**摘要** 为了能够深入研究摩擦自激振动系统的振动-摩擦耦合动力学特性, 建立基于 Stribeck 摩擦模型的质体-弹簧-带摩擦自激振动系统非线性动力学模型, 利用数值仿真, 研究自激振动系统在不同系统阻尼系数条件下, 不同外部激励振幅和激励频率分别对自激振动系统分岔与混沌特性的影响。结果表明, 当激励频率不变, 无量纲激励振幅在 0~1.5 区间, 系统持续准周期运动的时间随阻尼系数的增加而逐渐增长。振幅在 10~11 区间阻尼系数相对较小时, 系统除倍周期分岔外还存在 Hopf 分岔; 在阻尼系数相对较大时, 系统为倍周期分岔。激励振幅不变, 激励频率接近于派生系统固有频率时, 为单周期同步振动; 激励频率向大于派生系统固有频率方向变化时, 为准周期运动; 激励频率向小于派生系统固有频率方向变化时, 为混沌运动。

**关键词** Stribeck 模型; 自激振动; 分岔; 混沌

**中图分类号** TH113.1; TH117.1

## 引言

摩擦的存在往往会使零部件产生磨损, 引起振动和噪声, 降低机械系统的精度和运转效率<sup>[1-4]</sup>。例如, 车辆刹车系统发出的尖叫和机床产生的颤振等都是由机械系统摩擦所产生的<sup>[5-6]</sup>。工程中由摩擦引起的自激振动现象非常普遍, 往往对机械设备的正常工作造成不利影响<sup>[7-9]</sup>。大型选装机械的滑动轴承产生的油膜振动、重型机床工作台在润滑不良时的断续爬行等都是自激振动。因而, 对摩擦建模以及摩擦引起的自激振动现象的研究变得越来越重要。

国内外学者从不同角度对摩擦引起的振动问题展开了研究。Elmer<sup>[10]</sup>研究了无阻尼和不同摩擦函数时质量块-带的粘滑和纯滑动振动, 提供了粘滑和纯滑动振动之间转换的表达式, 得到了典型的局部和全局的分岔图。王三民等<sup>[11]</sup>建立了计及摩擦、间隙及时变刚度等因素的直齿轮副非线性动力学模型, 求得系统的各类周期响应和混沌响应, 得出摩擦使混沌吸引子有所变大, 摩擦导致系统提前进入混沌。丁勇<sup>[12]</sup>研究了强迫激励对于摩擦自激振动系统的动力学影响, 用平均法、解析法及奇异性理论得到了自治系统幅值跳跃与滞后, 还研究了在非自治系统准周期运动过程中存在的锁频现象与摩擦因素

的关系。黄毅<sup>[13]</sup>建立了一类具有代表性的双质体-传输带摩擦自激系统动力学模型, 利用李亚普诺夫理论对摩擦自激振动系统的稳定性进行分析, 发现内共振状态对摩擦自激系统的非线性动力学特性有重要影响, 为探讨摩擦自激振动的非线性动力学机理及摩擦自激振动的分岔控制等研究奠定了基础。Gdaniec 等<sup>[14]</sup>通过采用 LuGre 摩擦模型对单自由度摩擦振子进行研究, 发现不同的进给速度和摩擦因数会使系统产生分岔和混沌现象, 且大多为混沌运动。笔者对结合面摩擦模型进行了建模及仿真分析研究<sup>[15]</sup>。

但是, 有关摩擦自激振动等非光滑动力学机理还未被深入认识, 对于含有 Stribeck 摩擦模型的自激振动系统的强迫振动响应的求解研究很少, 没有得出一定的具有系统性的规律。笔者以机床切削系统和进给系统为研究对象, 建立了含有 Stribeck 摩擦模型的具有代表性的质体-弹簧-带自激振动系统非线性动力学模型, 研究了系统在外界激励作用下的分岔与混沌特性。

## 1 摩擦自激振动系统模型的建立

关于自激振动机理的研究, 国内外学者已经建立了典型的模型<sup>[16-17]</sup>, 这些模型所应用的场合各不

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51275079); 新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-10-0301); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N110403009)

收稿日期: 2013-08-12; 修回日期: 2013-12-26

相同。虽然这些物理模型能够解释现有的一些现象,但还存在一些缺点:a. 不易构建数学模型,给爬行现象的数学分析带来了困难;b. 较难进行数值仿真分析,动态仿真难以实现;c. 以往的研究仅仅集中在实验方面,对进给速度变化引起的研究比较多,而对其他参数的变化对动力学系统的影响研究较少。

由于状态参数的变化与系统的质量、刚度、阻尼、摩擦因素和法向振动有直接的关系,因此需要基于一个简单的模型来进行深入研究。笔者建立了质体-弹簧-带摩擦自激振动系统物理模型,如图 1 所示。

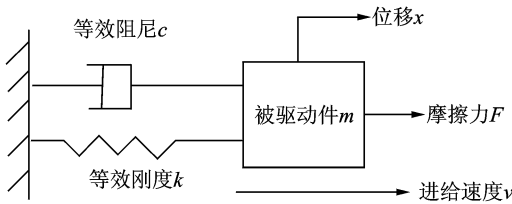


图 1 质体-弹簧-带自激振动系统模型

Fig. 1 Mechanical model of the mass-spring-belt system

采用经典的 Stribeck 摩擦模型描述一般机械部件运动结合面之间的摩擦行为。该摩擦模型的表达式为

$$\mu = -\mu_s \operatorname{sgn} v_r + \frac{3(\mu_s - \mu_m)}{2v_m} v_r - \frac{(\mu_s - \mu_m)}{2v_m^3} v_r^3 \quad (1)$$

其中:  $v_r = \dot{x} - v_0$  表示质量块和带之间的相对速度;  $\mu_s, \mu_m$  分别为静、动摩擦因数;  $v_m$  对应于最小动摩擦的速度,  $\mu_s \geq \mu_m$ 。

摩擦函数满足  $\mu(-v_r) = -\mu(v_r)$ 。上面式子表示当质量块停在移动带上 ( $v_r = 0$ ), 但是质量开始滑动时 ( $v_r \neq 0$ ), 摩擦力随着速度的增加开始逐渐减小, 随后又开始逐渐增加。

系统的运动微分方程为

$$m d^2 x / dt^2 + c dx / dt + kx = F \quad (2)$$

将干摩擦力  $F = N\mu$  带入式(2)中, 得到

$$m d^2 x / dt^2 + c dx / dt + kx = N\mu \quad (3)$$

引入无量纲变量:  $\omega_0 = \sqrt{k/m}, \tau = \omega_0 t, X = xk/N, 2\beta = c\omega_0/k$ 。其中:  $\dot{X} = dX/d\tau$  表示无量纲时间为  $\tau$  时质量块的速度。

将式(3)中的量均无量纲化, 则式(3)变为

$$\ddot{X} + 2\beta\dot{X} + X - \mu = 0 \quad (4)$$

其中

$$\mu = -\mu_s \operatorname{sgn} \left( \frac{dX}{d\tau} - v_0 \right) + \frac{3(\mu_s - \mu_m)}{2v_m} \left( \frac{dX}{d\tau} - v_0 \right) - \frac{(\mu_s - \mu_m)}{2v_m^3} \left( \frac{dX}{d\tau} - v_0 \right)^3 \quad (5)$$

将外界激励设为简谐激励, 并将系统方程中的

量均无量纲化, 则系统方程为

$$\ddot{X} + 2\beta\dot{X} + X - \mu = F \sin(\Omega\tau) \quad (6)$$

其中:  $\Omega$  为简谐激励的频率。

## 2 摩擦自激系统分岔特性仿真分析

### 2.1 以激励幅值为分岔参数的系统分岔仿真分析

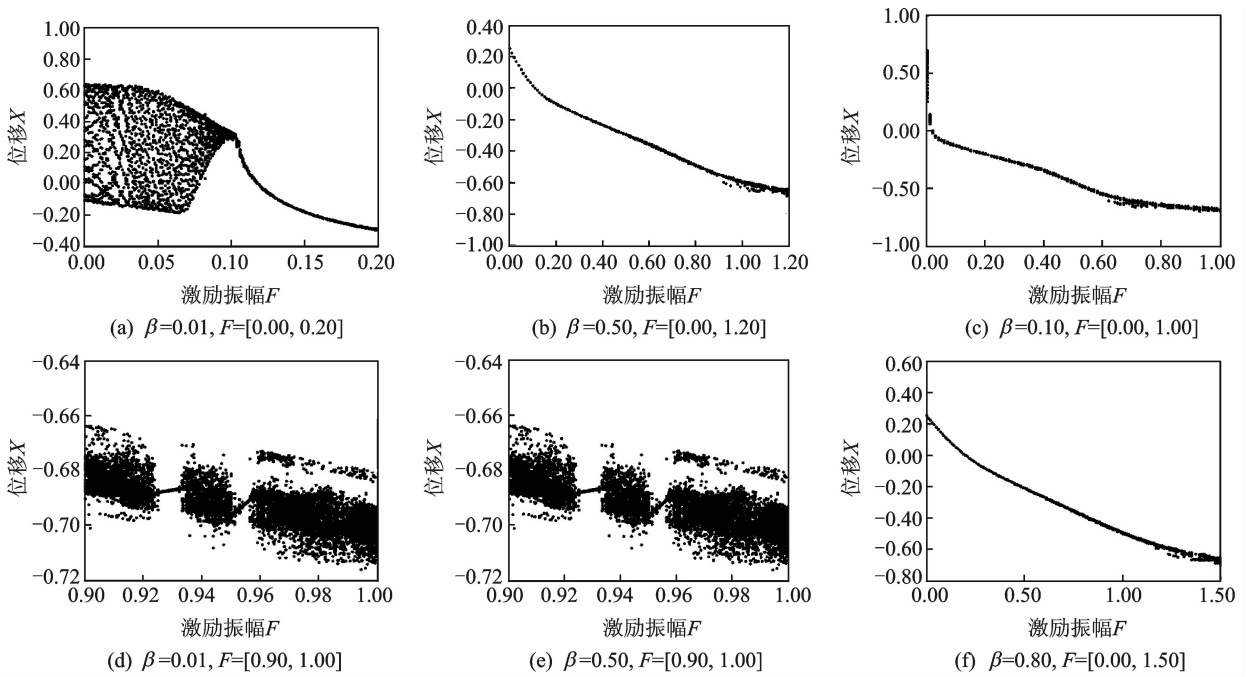
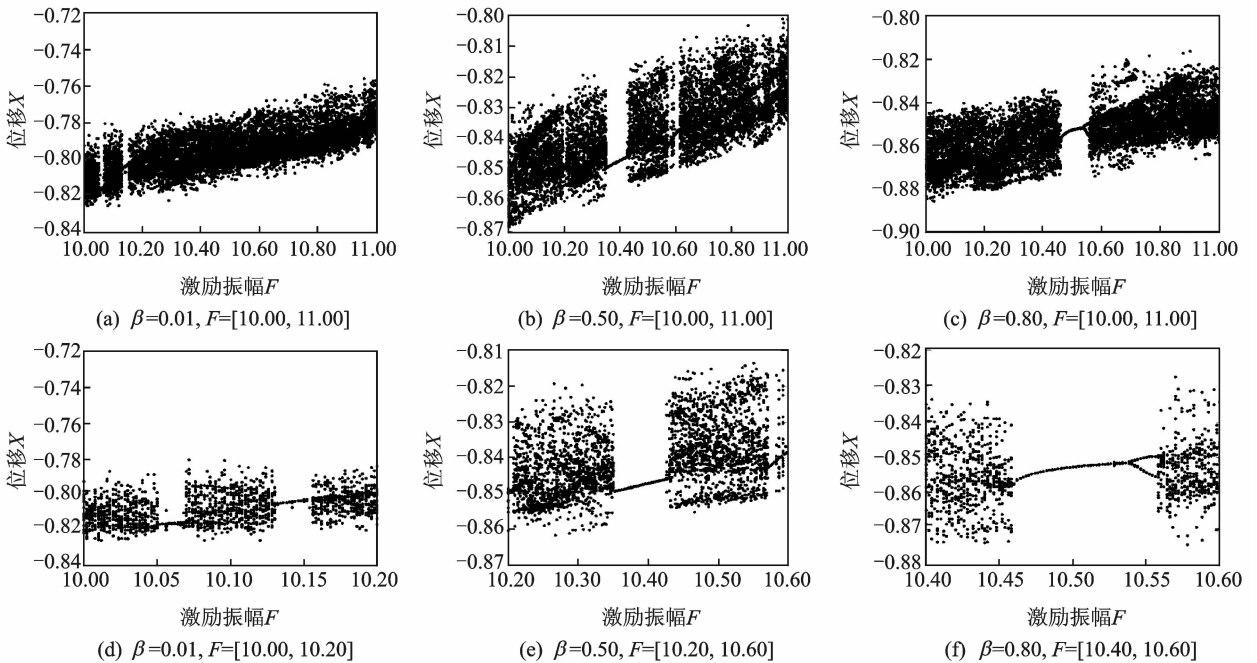
根据已建立的动力学方程, 运用 MATLAB/Simulink 对系统进行数值仿真分析。系统参数设定为  $\mu_s = 0.4, \mu_m = 0.25, v_m = 0.5, \Omega = 1$ 。以激励振幅  $F$  为分岔参数,  $F$  在  $0 \sim 1.5$  之间变动, 得到如图 2 所示的分岔图。可以看出, 当施加外界激励时, 由于系统响应是自由振动和强迫振动的综合, 所以产生了似周期却是非周期的准周期运动, 此稳态运动为准周期振动。单周期运动与准周期运动之间有明显的分界点, 由单周期到准周期未见倍周期分岔现象, 属于 Hopf 分岔。

外界激励振幅  $F$  小的区段为单周期运动, 大的区段为单周期运动和准周期运动的混合区, 两种运动状态之间有分界点。随着  $\beta$  增大, 准周期运动的范围逐渐增大, 其分界点向  $F$  值大的方向移动。这是因为准周期运动的位移远大于其他区域的位移, 而且随  $F$  值的增大而增加。

激励振幅  $F$  在  $10 \sim 11$  之间变动时, 得到如图 3 所示的分岔图。可以看出, 整个过程中在分岔图上存在单值线、多值线和涂黑区等区段, 对应于单周期、多周期、准周期和混沌运动等不同的运动状态。在阻尼系数较小的区段, 分岔图中单周期运动与准周期运动之间有明显的分界点, 由单周期到准周期未见倍周期分岔现象, 属于 Hopf 分岔。此时, 主要通过 Hopf 分岔来实现由周期到准周期的转变。在通向混沌的道路上, 倍周期分岔点的收敛速率基本上符合“费根鲍姆常数”。

### 2.2 以激振频率为分岔参数的系统分岔仿真分析

系统参数设定为  $\mu_s = 0.4, \mu_m = 0.25, v_m = 0.5, F = 1$ ; 以激振频率  $\Omega$  为分岔参数,  $\Omega$  在  $0 \sim 10$  内变化, 系统分岔图如图 4 所示。可以看出, 在频率较小时, 轮廓呈鼓状, 该区域为单周期运动状态。由于该区域自激振动与受迫振动的频率比较接近形成同步振动, 所以振幅高于其他区域。在频率较大时, 轮廓呈线状, 该区域为准周期运动。因此, 激励频率在派生系统固有频率左右变化时, 系统会经历不同的运动状态, 分别为单周期同步振动、准周期运动和混沌运动。

图 2 以小激励振幅  $F$  为分岔参数的系统分岔图Fig. 2 The system bifurcation diagram with small excitation amplitude  $F$  as the bifurcation parameter图 3 以大激励振幅  $F$  为分岔参数的系统分岔图Fig. 3 The system bifurcation diagram with big excitation amplitude  $F$  as the bifurcation parameter

### 3 结论

1) 笔者建立的基于 Stribeck 摩擦模型的自激振动系统在一定程度上揭示了系统在外界激励作用下的一些动力学现象。摩擦自激振动系统在外界激励作用下会呈现出典型的分岔与混沌非线性特征。

阻尼系数、激励频率和激励振幅是影响系统分岔特性的关键因素。

2) 在激振频率不变的情况下, 阻尼系数在不同区间内变化时, 系统进入混沌的途径也各不相同。在相对较小的阻尼下, 系统主要通过 Hopf 分岔实现单周期到准周期的转变; 在相对较大的阻尼下, 系统主要通过倍周期分岔实现由周期运动进入混沌的。

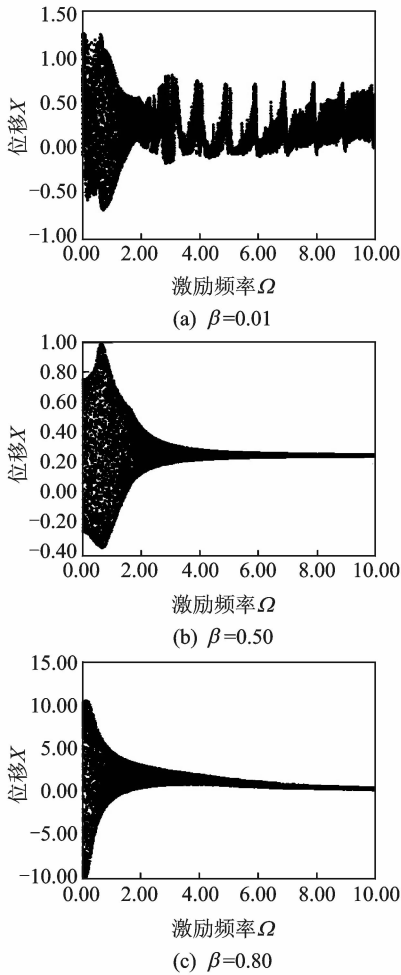


图4 以激励频率 $\Omega$ 为分岔参数的系统分岔图

Fig. 4 The system bifurcation diagram with small excitation frequency  $\Omega$  as the bifurcation parameter

3) 激励幅值一定时,系统在小阻尼状态下整个变化过程都为混沌状态。随着系统阻尼系数的增加,混沌出现的区段的次数、范围均逐渐减小,系统的分岔图也逐渐变得简单;当阻尼系数大于某一定值后,基本上可以消除混沌,直接使系统能够更快地趋向稳定状态。

#### 参 考 文 献

- [1] Altintas Y, Weck M. Chatter stability of metal cutting and grinding[J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 2004, 53(2): 619-642.
- [2] Richard T, Germain C, Detournay E. Self-excited stick-slip oscillations of drag bits[D]. Minneapolis: University of Minnesota, 2001.
- [3] Bilkay O, Anlagan O. Computer simulation of stick-slip motion in machine tool slide ways[J]. Tribology International, 2004, 37(4): 347-351.
- [4] Badrawy S. Cutting dynamic of high speed machining [J]. Wolf Tracks, 2001, 8(1): 24-26.
- [5] 孟德建, 张立军, 余卓平. 多点接触模型的盘式制动器制动抖动分析[J]. 振动、测试与诊断, 2010, 30(3): 304-309.

model[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010, 30(3): 304-309. (in Chinese)

- [6] 刘献栋, 任增杰, 王海霞, 等. 盘式制动器摩擦特性及制动尖叫测试与分析[J]. 振动、测试与诊断, 2013, 33(5): 746-750.
- [7] Liu Xiandong, Ren Zengjie, Wang Haixia, et al. Testing and analysis of disc brake friction characteristics and screaming[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2013, 33(5): 746-750. (in Chinese)
- [8] Diuron T L, Fujino Y, Abe M. Control of wind-induced self-Excited oscillations by transfer of internal energy to higher modes of vibration. I: analysis in two degrees of freedom. II: application to taut cables[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, 129(5): 514-538.
- [9] Kucherenko V V, Gomez-Mancilla J C. Bifurcations of an exactly solvable model of rotordynamics[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10(12): 2689-2699.
- [10] Strganac T W, Ko J, Thompson D E, et al. Identification and control of limit cycle oscillators in aeroelastic systems[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2000, 23(6): 961-970.
- [11] Elmer F J. Nonlinear dynamics of dry friction[J]. Journal of Physics A (Mathematical and General), 1997, 30(17): 6057-6063.
- [12] 王三民, 沈允文, 董海军. 含摩擦和间隙直齿轮副的混沌与分叉研究[J]. 机械工程学报, 2002, 38(9): 8-11.
- [13] Wang Sanmin, Shen Yunwen, Dong Haijun. Chaos and bifurcation analysis of a spur gear pair with combined friction and clearance[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(9): 8-11. (in Chinese)
- [14] 丁勇. 多频激励下一类强非线性振动系统的分岔[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2005.
- [15] 黄毅. 摩擦自激振动系统的非线性动力学特征与分岔控制研究[D]. 天津: 天津大学, 2008.
- [16] Gdaniec P, Weiss C, Hoffmann N P. On chaotic friction induced vibration due to rate dependent friction[J]. Mechanics Research Communications, 2010, 37(1): 92-95.
- [17] 李小彭, 郭浩, 刘井年, 等. 考虑摩擦的结合面法向刚度分形模型及仿真[J]. 振动、测试与诊断, 2013, 33(2): 210-213.
- [18] Li Xiaopeng, Guo Hao, Liu Jingnian, et al. Fractal model and simulation of normal contact stiffness considering the friction between joint surfaces[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2013, 33(2): 210-213. (in Chinese)
- [19] 周翔. 两自由度干摩擦系统自激振动研究[D]. 天津: 天津大学, 2007.
- [20] Pascal M. New limit cycles of dry friction oscillators under harmonic load[J]. Nonlinear Dynamic, 2012, 70(2): 1435-1443.



第一作者简介: 李小彭, 男, 1976年9月生, 博士、教授。主要研究方向为机械动力学、振动摩擦耦合动力学。曾发表《考虑摩擦因素影响的结合面切向接触阻尼分形预估模型及其仿真》(《机械工程学报》2012年第48卷23期)等论文。  
E-mail: xppli@me.neu.edu.cn

