第 34 卷第 5 期
2014 年 10 月

振动、测试与诊断
Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis

Vol. 34 No. 5
Oct. 2014

轧机主传动非线性延时系统的 Hopf 分岔研究*

张瑞成[1]， 杨萍萍[2]， 崔传金[1]
（1. 河北联合大学电气工程学院 唐山，063009） （2. 河北联合大学轻工学院 唐山，063000）

摘要 针对传统轧机主传动系统模型忽略位移延时的缺点，在考虑轧辊与轧件间的非线性摩擦力、阻尼、刚度和系统延时的基础上，建立了轧机主传动非线性延时系统的数学模型。分析了系统的局部稳定性和 Hopf 分岔的存在性，从理论上得到了系统产生 Hopf 分岔的延时临界值，通过采用 1150 型初轧机的实验数据进行对比仿真，证明了实验系统所建模型的正确。从得到的轧机主传动位移延时反馈系统的时间历程图、相图以及分岔图，验证了时延就是一个分岔参数，当时延的取值超过临界值时，轧机主传动位移延时反馈系统产生了 Hopf 分岔，从而得出了从生产工艺的角度加大轧制速度可以避免延时产生的不良影响，为进一步研究、控制轧机主传动系统提供了新思路。

关键词 轧机；主传动；非线性模型；延时；分岔
中图分类号 TG333；TP273

引 言

随着钢铁工业的高速发展，近些年我国钢产量不断提升，2011 年粗钢产量已接近全球总产量的 50%，但钢材产品质量只有约 30%可以达到国际先进水平，其中钢材的表面质量、厚度偏差、板形指标等均与国外先进钢铁企业存在较大差距。究其原因发现高速轧制过程中频繁出现的轧机振动现象是制约钢铁工业产品质量的重要因素之一。特别是各种非线性因素引起的轧机主传动系统的混沌、分岔等现象尤为重要。因此，如何建立适合于工业现场的轧机传动系统数学模型，并对其非线性特性进行合理、有效的分析，为抑制非线性振动提供方法和指导，是提高产品表面质量的关键。

在以往建立的轧机主传动系统模型中，大多是以建立线性模型来分析系统特性的，大致分为单质量线性模型，两质量线性模型和多质量线性模型[1]。随着近来有关机械系统非线性振动问题的深入研究，非线性振动理论也开始广泛应用于对轧机系统的研究中。文献[2]建立了考虑可动边界和间隙的一自由度非线性振动系统，文献[3]把非线性阻尼和刚度作为重要因素而建立了两惯量轧机主传动系统非线性振动模型。随着振动形式的复杂和多样化，研究发现实际的机电系统可能存在多种振动形式的耦合[4-6]，文献[7]考虑轧制力的影响因素建立了轧机垂扭耦合系统动力学模型，并对其稳定性进行分析。以上的各种非线性模型主要是将摩擦力、传动间隙、阻尼和刚度等其中的一到两个作为非线性因素考虑。但是，连轧机考虑前后张力差造成的阻力矩影响时，轧机传动系统的延时环节是客观存在的，已有传动系统模型已无法解释较为复杂的振动形式，如延时导致的系统分岔等振动现象。

为此，首先将系统延时、非线性摩擦力、阻尼和刚度综合考虑，建立了轧机主传动非线性延时系统数学模型；然后，对系统的局部稳定性和 Hopf 分岔的存在性进行了分析，得到了系统产生 Hopf 分岔的延时临界值，通过实验仿真验证了理论分析是正确的；最后讨论延时变化对轧机主传动位移延时反馈系统的影响，给出了避免延时产生不良影响的措施。

1 轧机主传动非线性延时系统数学模型

首先将轧机主传动系统简化为如图 1 所示的一个集中质量的质量弹簧系统[2]。其中：k_1 为刚度系数；c 为阻尼系数；T_{friction} 为由摩擦阻力变化产生的力矩；T_Z 为前后张力差所造成的阻力矩。

摩擦阻力矩 T_{friction} 可表示为

* 河北省自然科学基金资助项目(F2010000972)
收稿日期：2012-10-08；修回日期：2013-07-03

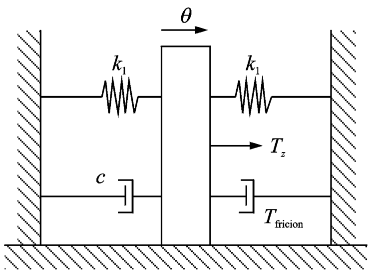


图 1 轧机主传动位移延时反馈力学模型

Fig. 1 Mechanics model of displacement delayed feedback system in the rolling mill main drive system

$$T_{\text{friction}}=\mu(v_r)Pr_a \tag{1}$$

其中：$\mu(v_r)$ 为粘滑摩擦因数；P 为轧制力；r_a 为轧辊半径。

当轧辊与轧件之间为粘滑摩擦作用时，粘滑摩擦因数 $\mu(v_r)(v_r\neq 0)$ 可近似采用下式表示[8]

$$\mu=\mu_s\operatorname{sign}(v_r)-\alpha v_r+\beta v_r^3 \tag{2}$$

其中：v_r 为轧件与轧辊的相对速度。

在动坐标系下取轧辊转角 θ 为变量，且 $\dot{\theta}_0=\omega_0$，轧件与轧辊的相对速度为 $v_r=\dot{\theta}r_a-\omega_0 r_a=(\dot{\theta}-\omega_0)r_a$，将其代入式(2)有

$$\mu=\mu_s\operatorname{sign}(v_r)-\alpha(\dot{\theta}-\omega_0)r_a+\beta[(\dot{\theta}-\omega_0)r_a]^3 \tag{3}$$

设前后卷取机各项参数相同，当振动发生时，卷取机对工作辊的响应均具有时间滞后 τ，并设前滑系数 $S_h=0$。

根据张力方程

$$\frac{\mathrm{d}q_f}{\mathrm{d}t}=\frac{E}{L}(v_f-v_2)=\frac{Er_a}{L}[\dot{\theta}(t-\tau)-\dot{\theta}(t)] \tag{4}$$

$$q_f=\frac{Er_a}{L}[\theta(t-\tau)-\theta(t)]+D_1 \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_b}{\mathrm{d}t}=\frac{E}{L}(v_1-v_b)=\frac{Er_a(1-R)}{L}[\dot{\theta}(t)-\dot{\theta}(t-\tau)] \tag{6}$$

$$q_b=\frac{Er_a(1-R)}{L}[\theta(t)-\theta(t-\tau)]+D_2 \tag{7}$$

其中：v_f，v_b 为前后卷取机卷取速率；v_1，v_2 为进出口带速；E 为弹性模量；L 为两机架间间距；R 为压下率，$R=\dfrac{y_1-y_2}{y_1}$，y_1，y_2 分别为轧件入口和出口厚度。

由前后张力差造成的阻力矩 T_z 为

$$T_z=(T_bv_1-T_fv_2)/\dot{\theta}=T_br_a\frac{y_2}{y_1}-T_f r_a=y_2r_aB(q_b-q_f)=\frac{(2-R)Er_a^2y_2B}{L}[\theta(t)-\theta(t-\tau)]+D_3 \tag{8}$$

其中：D_1，D_2，D_3 为积分常数；T_f，T_b 为进出口总张力；B 为轧件宽度；r_a 为轧辊半径。

$t=0$ 时，$T_z=(T_b-T_f)r_a$；$t=0$ 时，$\theta(0)=\theta(-\tau)$。

将初始条件代入式(8)得

$$T_z=\frac{(2-R)Er_a^2y_2B}{L}[\theta(t)-\theta(t-\tau)]+(T_b-T_f)r_a \tag{9}$$

考虑到作用在轧辊上的力矩平衡，得到轧辊的运动微分方程为

$$\begin{aligned}J\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+k_1\theta&=-T_{\text{friction}}-T_z=\\&-(\mu_s\operatorname{sign}(v_r)-\alpha(\dot{\theta}-\omega_0)r_a+\beta[(\dot{\theta}-\omega_0)r_a]^3)Pr_a-\\&\frac{(2-R)Er_a^2y_2B}{L}[\theta(t)-\theta(t-\tau)]-(T_b-T_f)r_a=\\&-\mu_s\operatorname{sign}(v_r)Pr_a+\alpha Pr_a^2(\dot{\theta}-\omega_0)-\beta Pr_a^4(\dot{\theta}-\omega_0)^3-\\&\frac{(2-R)Er_a^2y_2B}{L}[\theta(t)-\theta(t-\tau)]-(T_b-T_f)r_a\end{aligned} \tag{10}$$

令 $p=\dfrac{(2-R)Er_a^2y_2B}{L}$，$k=k_1+p$，将式(10)展开且合并同类项有

$$\begin{aligned}&J\ddot{\theta}+k\theta+(c-c')\dot{\theta}-3\beta Pr_a^4\omega_0\dot{\theta}^2+\\&\beta Pr_a^4\dot{\theta}^3+\alpha Pr_a^2\omega_0-\beta Pr_a^4\omega_0^3+\\&\mu_s\operatorname{sign}(v_r)Pr_a=p\theta(t-\tau)-(T_b-T_f)r_a\end{aligned} \tag{11}$$

其中：$c'=\alpha Pr_a^2-3\beta Pr_a^4\omega_0^2$。

考虑到常数项并不影响系统的动态变化规律，为了系统动态特性分析方便，在此略去常数项的影响[2]，则得到

$$J\ddot{\theta}+k\theta+(c-c')\dot{\theta}-3\beta Pr_a^4\omega_0\dot{\theta}^2+\beta Pr_a^4\dot{\theta}^3=p\theta(t-\tau) \tag{12}$$

令 $\omega^2=\dfrac{k}{J}$，$\xi_1=\dfrac{c}{J}$，$\xi'=\dfrac{c'}{J}$，$\alpha'=\dfrac{\alpha Pr_a^2}{J}$，$\beta'=\dfrac{\beta Pr_a^4}{J}$，$p'=\dfrac{p}{J}$。则式(12)可化为

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta+(\xi_1-\xi')\dot{\theta}-3\beta'\omega_0\dot{\theta}^2+\beta'\dot{\theta}^3=p'\theta(t-\tau) \tag{13}$$

令 $\zeta=\omega^2$，$\xi=\xi_1-\xi'$，$\eta=-3\beta'\omega_0$，则式(13)可变为

$$\ddot{\theta}+\zeta\theta+\xi\dot{\theta}+\eta\dot{\theta}^2+\beta'\dot{\theta}^3=p'\theta(t-\tau) \tag{14}$$

令 $x_1=\theta$，$x_2=\dot{\theta}$，则将式(14)化为二维方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=-\xi x_2-\eta x_2^2-\beta' x_2^3-\zeta x_1-p' x_1(t-\tau)\end{cases} \tag{15}$$

即为轧机主传动非线性延时系统的微分方程组。

2　局部稳定性和 Hopf 分岔存在性分析

将带有时延的系统方程,通过分析其线性化方程对应的超越特征方程,来确定系统的零解的局部稳定性。当时延穿过某些特定值时,系统会产生 Hopf 分岔,对时延系统(15)存在以下定理。

定理: 在 $\xi>0$ 且 $\tau>0$ 的前提下,当 $\tau\in[0,\tau^0)$ 时,τ^0 由式(19)所确定,系统(15)的平衡点是局部渐进稳定的,当 $\tau\in(\tau^0,+\infty)$ 时,平衡点不稳定,系统(15)在 $\tau=\tau^0$ 时产生 Hopf 分岔,出现周期解。

证明: 由式(15)可见系统的唯一平衡点为 $E_0=(0,0)$

平衡点处线性化可得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\xi x_2-\zeta x_1-p'x_1(t-\tau)\end{cases}$$

对应的特征方程为

$$\lambda^2+\xi\lambda+\zeta+p'e^{-\tau\lambda}=0 \tag{16}$$

1) 在 $\tau=0$ 没有时延的情况下,由式(16)求出方程的根 $\lambda=\dfrac{-\xi\pm\sqrt{\xi^2-4(\zeta+p')}}{2}$。

如果 $\xi>0$,λ 具有负实部,系统具有稳定的零解,则平衡点是渐近稳定的;如果 $\xi<0$,系统将出现稳定的周期解。

在接下来的讨论中,一直假设 $\xi>0$。

在考虑时延之前,先引入如下引理,这个引理在文献[9]中已被 Ruan 和 Wei 证明。

引理: 对于考虑如下指数多项式

$$P(\lambda,e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})=\lambda^n+p_1^{(0)}\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}^{(0)}\lambda+p_n^{(0)}+\begin{bmatrix}p_1^{(1)}\lambda^{n-1}+\cdots+\\ p_{n-1}^{(1)}\lambda+p_n^{(1)}\end{bmatrix}e^{-\lambda\tau_1}+\cdots+[p_1^{(m)}\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}^{(m)}\lambda+p_n^{(m)}]e^{-\lambda\tau_m}$$

其中:$\tau_i\geqslant0$,$p_j^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为常量。

随着 $(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m)$ 的改变,当且仅当 $P(\lambda,e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})P$ 的零点出现在虚轴或穿过虚轴时,$P(\lambda,e^{-\lambda\tau_1},\cdots,e^{-\lambda\tau_m})$ 在右半平面内零点的总和才会发生改变。

2) 在 $\tau>0$ 存在时延的情况下,设 $\lambda=i\omega(\omega>0)$ 是方程的根,代入式(16),通过分离实部与虚部可得,

$$\begin{cases}\omega^2=p'\cos\tau\omega+\zeta\\ \dfrac{\xi}{p'}\omega=\sin\tau\omega\end{cases} \tag{17}$$

由于 $\tau>0$,故可消除 τ,整理为

$$\omega^4+(\xi^2-2\zeta)\omega^2+(\zeta^2-p'^2)=0 \tag{18}$$

式(18)的根为 $\omega^2=\dfrac{1}{2}\left[-E\pm\sqrt{E^2-4F}\right]$,其中 $E=\xi^2-2\zeta$,$F=\zeta^2-p'^2$。ω^2 要存在实根必须满足 $E^2-4F>0$,所以方程只有一个正根 $\omega_+=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[-E+\sqrt{E^2-4F}\right]^{\frac{1}{2}}$,将 $\omega=\omega_+$ 代入式(17)

$$\tau^j=\frac{1}{\omega_+}\arccos\left(\frac{\omega_+^2-\zeta}{p'}\right)+\frac{2j\pi}{\omega_+}\quad(j=0,1,\cdots) \tag{19}$$

根据上面的分析可知,在 τ^j 处,式(16)有一对纯虚根 $\pm i\omega_+$,设 $\lambda(\tau)=\beta(\tau)+i\omega(\tau)$ 为方程的根,则 $\beta(\tau^j)=0$,$\omega(\tau^j)=\omega_+$,将 $\lambda(\tau)$ 代入式(16),并对 τ 取微分,化简整理得

$$\frac{d\lambda}{d\tau}=\frac{p'\lambda e^{-\lambda\tau}}{2\lambda+\xi-p'\tau e^{-\lambda\tau}}$$

当 $\lambda=i\omega_+$,$\tau=\tau^0$ 时(其中 τ^0 为 τ^j 的最小值)

$$\left.\frac{d\lambda}{d\tau}\right|_{\substack{\lambda=i\omega_+\\ \tau=\tau_0}}=\frac{p'i\omega_+[\cos(\omega_+\tau^0)-i\sin(\omega_+\tau^0)]}{\xi+2i\omega_+-p'\tau^0[\cos(\omega_+\tau^0)-i\sin(\omega_+\tau^0)]}=\frac{p'\omega_+\sin(\omega_+\tau^0)+p'i\omega_+\cos(\omega_+\tau^0)}{\xi-p'\tau^0\cos(\omega_+\tau^0)+i[2\omega_++p'\tau^0\sin(\omega_+\tau^0)]}$$

进一步可以得到

$$\left[\frac{d\lambda}{d\tau}\right]_{\substack{\lambda=i\omega_+\\ \tau=\tau^0}}=\mathrm{Re}\left\{\frac{[p'\omega_+\sin(\omega_+\tau^0)+p'i\omega_+\cos(\omega_+\tau^0)]}{[\xi-p'\tau^0\cos(\omega_+\tau^0)]^2}\times\frac{\{\xi-p'\tau^0\cos(\omega_+\tau^0)-i[2\omega_++p'\tau^0\sin(\omega_+\tau^0)]\}}{[2\omega_++p'\tau^0\sin(\omega_+\tau^0)]^2}\right\}=$$
$$\frac{\xi p'\omega_+\sin(\omega_+\tau^0)+2p'\omega_+^2\cos(\omega_+\tau^0)}{[\xi-p'\tau^0\cos(\omega_+\tau^0)]^2[2\omega_++p'\tau^0\sin(\omega_+\tau^0)]^2}=\frac{[p'\omega_+\sin(\omega_+\tau^0)+p'i\omega_+\cos(\omega_+\tau^0)]}{[\xi-p'\tau^0\cos(\omega_+\tau^0)]^2}>0 \tag{20}$$

将 τ 看作参数,由于在 $\tau=0$ 时,λ 具有负实部,系统具有稳定的零解,平衡点是渐近稳定的,并且在 τ^0 处,式(16)才有一对纯虚根 $\pm i\omega_+$,即 $\tau=\tau^0$ 时零点才出现在虚轴上。根据引理可知,当 $\tau\in(0,\tau^0)$ 时,在右半平面内零点的总和不会发生改变,即当 $\tau\in[0,\tau^0)$ 时,式(16)所有特征根都具有负实部,系统的平衡点是局部渐近稳定的。

当 $\tau=\tau^0$ 时,平衡点对应的特征方程出现正实部的特征根,并且由式(20)可知,当 $\tau\in(\tau^0,+\infty)$ 时,特征根的实部均为正,说明此时平衡点不稳定。

综上所述,特征根为复数,且实部由负变正,说明系统在 $\tau=\tau^0$ 时产生 Hopf 分岔,出现周期解[10]。

3 数值仿真研究

为了验证理论分析的正确,采用文献[2]所研究的 1150 型初轧机的实验数据进行数值仿真:

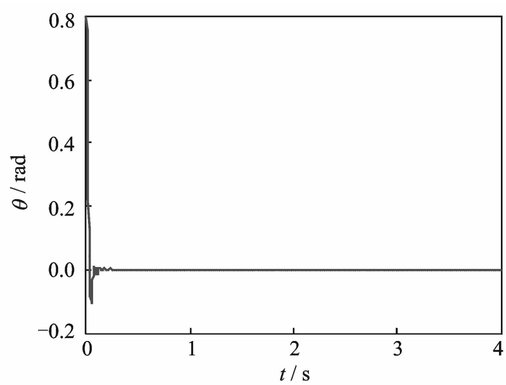
$J=0.282\text{tms}^2$,主传动系统的扭转刚度 $k_1=0.296\times10^4$ tm/rad ,轧辊直径 $D=0.945$ m ,阻尼系数 $c=17\,500$ N·m·s/rad ,临界转速为 $\bar{\omega}_0=6.1$,取转速为 $\omega_0=8.0>\bar{\omega}_0=6.1$,$P=900$ t 。

在考虑动摩擦因数时,取 $\alpha=0.06$,$\beta=0.002\,4$,经计算得,$\xi_1=62.06$,$\omega^2=10\,496.45$,$\omega=102.5$,$p'=3\,191.49$,$\alpha'=\dfrac{12.06}{0.282}=42.766$,$\beta'=\dfrac{0.108}{0.282}=0.383$,$\xi'=\dfrac{c'}{J}=\alpha'-3\beta'\omega_0^2$。

取 $\omega_0=8.0$,由式(19)可以计算出 $\tau^0=0.030\,6$,根据定理当 $\tau=\tau^0$ 时,系统(15)产生 Hopf 分岔。图 2~3 分别为 $\tau=0.02$ s 时,系统的时间历程图和相图。图 4~6 分别为 $\tau=0.05$ s 时系统的时间历程图、相图及分岔图。

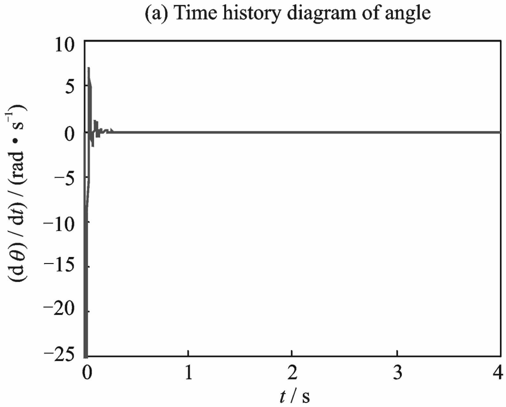
文中所建立的实验系统与文献[2]所建立的实验系统最大的区别就是考虑了时延 τ 的影响,从数值仿真的结果来看,当时延常数较小时,即 $\tau=0.02<\tau^0$,文中所得到的相图(图 3)与文献[2]得到的相图完全一致,从而证明了文中实验系统所建模型是正确的。

从图 2~5 可以看出,当 $\tau=0.02<\tau^0$ 时,平衡点是局部渐进稳定的;当 $\tau=0.05>\tau^0$ 时,平衡点失去稳定性,出现周期解,整个系统已经处于不稳定状



(a) 角度的时间历程图

(a) Time history diagram of angle



(b) 速度的时间历程图

(b) Time history diagram of velocity

图 2 当 $\tau=0.02$ s 时系统的时间历程图

Fig. 2 Time history diagram of system at $\tau=0.02$ s

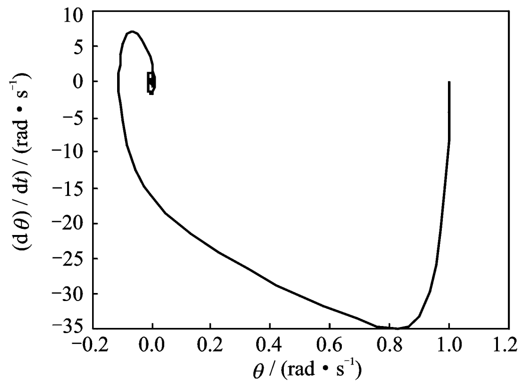
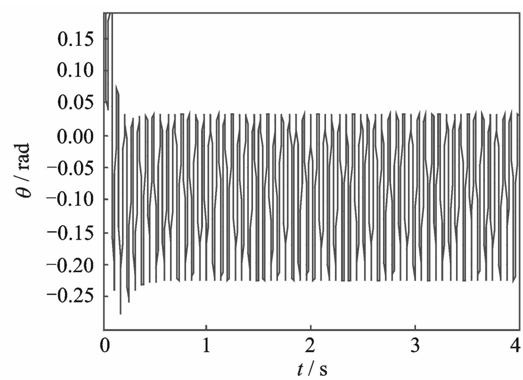


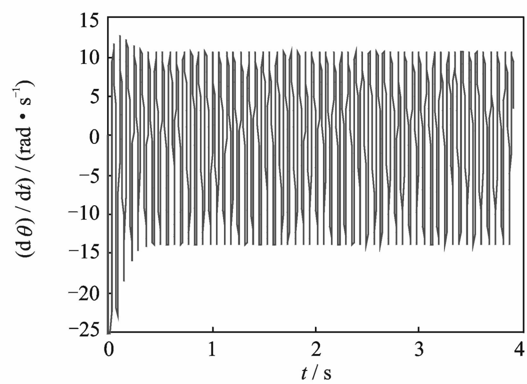
图 3 当 $\tau=0.02$ s 时系统的相图

Fig. 3 Phase diagram of system at $\tau=0.02$ s



(a) 角度的时间历程图

(a) Time history diagram of angle



(b) 速度的时间历程图

(b) Time history diagram of velocity

图 4 当 $\tau=0.05$ s 时系统的时间历程图

Fig. 4 Time history diagram of system at $\tau=0.05$ s

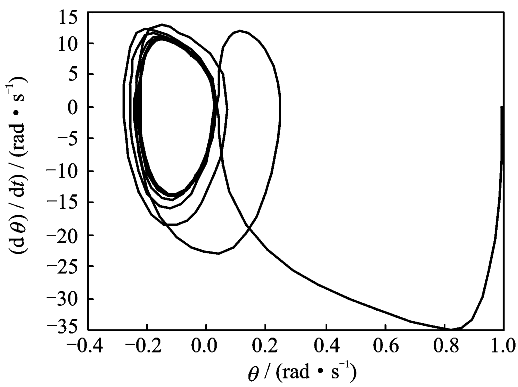


图 5　当 $\tau=0.05$ s 时系统的相图

Fig. 5　Phase diagram of system at $\tau=0.05$ s

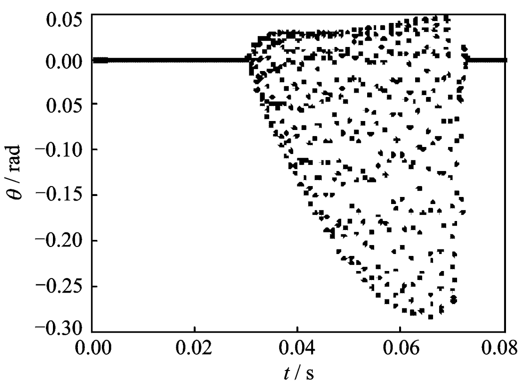


图 6　分岔图

Fig. 6　Bifurcation diagram

态。由此可以得出延时 τ 的取值，对系统的稳定性具有重要影响。

为了能直观地了解延时 τ 对该系统的影响，图 6 给出了通过逐次改变延时 τ 的大小得到的角位移 θ 随 τ 在 0～0.08 之间变化的分叉图，可以看出，当 $\tau\in[0.03, 0.07]$ 之间时，出现了分岔现象。可见，Hopf 分岔来自平衡点的稳定性切换，而时延 τ 的取值又决定了方程特征根 λ 的性质，从而引起了系统平衡点的稳定性切换的取值不同，故延时 τ 就是一个分岔参数。当时延穿过某些特定值时，系统就会产生 Hopf 分岔，出现周期解，从而对系统的稳定性造成不良影响，这与文献[11-13]的研究结果相吻合。

文献[2]在探讨 Holf 分岔时采用的是将非线性微分方程组化简为线性近似方程，分析摩擦系数在不同条件下的奇点位置，进而从理论上推导出系统可能出现极限环，产生 Holf 分岔。而文中所讨论的是时延 τ 这个参数对系统的影响，不仅从理论上证明了时延 τ 的取值不同，系统会出现 Holf 分岔，而且通过数值仿真结果进一步验证了时延 τ 就是一个分岔参数，当时延 τ 的取值超过临界值 τ^0 时，会产生 Hopf 分岔，从而更有力的佐证了文献[2]的推论。

由于在该系统中延时 τ 的定义式是 $\tau=L/v$，其中 L 为两机架间间距，v 为轧件运动速度，因此从生产工艺的角度而言，当两机架间距 L 固定时，要想避免分岔现象的产生，可以改变轧机运动速度 v 来改变 τ 值，通过加大轧制速度，使延时值尽可能的减小，以避免延时产生不良影响。

4　结　论

1）对传统轧机主传动系统的数学模型进行了新的探讨，将系统延时、非线性摩擦力、阻尼和刚度综合考虑，建立了轧机主传动非线性延时系统的数学模型。

2）分析了轧机主传动系统的局部稳定性和 Hopf 分岔的存在性，从理论上得到了产生 Hopf 分岔的延时临界值。

3）通过采用 1150 型初轧机的实验数据进行数值仿真得出的时间历程图、相图及分岔图，验证了当 $\tau=\tau^0$ 时，轧机主传动位移延时反馈系统产生了 Hopf 分岔，有力地佐证了文献[2]的推论。最后，从生产工艺的角度得出了加大轧制速度可以避免延时产生不良影响。

参　考　文　献

[1]　李崇坚，段巍. 轧机传动交流调速机电振动控制[M]. 北京：冶金工业出版社，2003：168-177.

[2]　李鸿光，杨文平，闻邦椿. 具有可动边界和间隙的机械系统自激振动分析和数值模拟[J]. 机械科学与技术，2000，19(2)：177-179.

Li Hongguang, Yang Wenping, Wen Bangchun. Theoretical analys is of self-excited vibration in mechanical system with moving boundary and clearance[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(2): 177-179. (in Chinese)

[3]　刘浩然，张业宽，李晓梅. 轧机非线性传动系统冲击扭振的研究与抑制[J]. 振动与冲击，2010，29(7)：179-183.

Liu Haoran, Zhang Yekuan, Li Xiaomei. Investigation and suppression of impact torsional vibration of a rolling mill's nonlinear drive system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(7): 179-183. (in Chinese)

[4] 钟掘，唐华平. 高速轧机若干振动问题-复杂机电系统耦合动力学研究[J]. 振动、测试与诊断，2002，22(1)：1-8.

Zhong Jue, Tang Huaping. Vibration problems of high speed rolling mill-study of dynamics of complex electromechanically coupled system[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2002, 22(1): 1-8. (in Chinese)

[5] 闫小强，史灿，曹曦. CSP轧机扭振与垂振耦合研究[J]. 振动、测试与诊断，2008，28(4)：377-381.

Yan Xiaoqiang, Shi Can, Cao Xi. Research on coupled vertical-torsion vibration of mill-stand of CSP mill[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2008, 28(4): 377-381. (in Chinese)

[6] 杨旭，李江昀，童朝南. 冷轧机传动系统振动测试与控制策略[J]. 振动、测试与诊断，2013，33(1)：99-105.

Yang Xu, Li Jiangyun, Tong Chaonan. Vibration test and control strategy of drive system in cold rolling[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2013, 33(1): 99-105. (in Chinese)

[7] 杨旭，童朝南，孟建基. 冷板带轧机含振动因素的轧制力模型[J]. 振动、测试与诊断，2010，30(4)：422-428.

Yang Xu, Tong Chaonan, Meng Jianji. Mathematical model of rolling force in the analysis of cold rolling chatter[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010, 30(4): 422-428. (in Chinese)

[8] Thomsen J J, Fidlin A. Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2003, 38(3): 389-403.

[9] Ruan S, Wei J. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays[J]. Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, 2003, 10(6): 863-874.

[10] 黄润生，黄浩. 混沌及其应用[M]. 武汉：武汉大学出版社，2005：75-76.

[11] 熊定山. 时延非线性系统的稳定性与Hopf分岔[D]. 武汉：华中科技大学，2006.

[12] 孟令启，王建勋，吴浩亮. 中厚板立辊轧机主传动系统的非线性扭振[J]. 华南理工大学学报：自然科学版，2009，37(2)：25-28.

Meng Lingqi, Wang Jianxun, Wu Haoliang. Nonlinear twist vibration of main transmission system of vertical medium plate mill[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2009, 37(2): 25-28. (in Chinese)

[13] 侯东晓，刘彬，时培明. 两自由度轧机非线性扭振系统的振动特性及失稳研究[J]. 振动与冲击，2012，31(3)：32-36.

Hou Dongxiao, Liu Bin, Shi Peiming. Vibration characteristics of 2 DOF nonlinear torsional vibration system of rolling mill and its conditions of instability[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(3): 32-36. (in Chinese)

第一作者简介：张瑞成，男，1975年3月出生，博士、教授。主要研究方向为轧机机电振动控制、轧钢自动化、机电耦合系统动态特性分析与控制等。曾发表《单辊驱动轰机水平作线性参数振动机理研究》(《振动与冲击》2010年第29卷第6期)等论文。

E-mail：rchzhang@126.com