

相似理论和模型试验的结构动响应分析运用*

陈 喆, 陈国平

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室 南京, 210016)

摘要 主要讨论了相似理论在结构动力学模型试验中的实际应用问题, 目的在于研究如何通过相似理论和缩比模型试验的结果准确预估实际结构的动力学特性。首先, 在考虑实际工程试验条件前提下, 给定几何参数和物理参数的相似比数, 根据相似理论和有限元法推导出非等比缩放的缩比模型和实际模型之间固有振动、频域响应和时域响应之间的相似性关系; 然后, 通过薄板结构的振动试验来验证这种相似关系的准确性和工程应用价值。通过理论推导和试验证明, 根据缩比模型动力学试验结果, 运用所推导的动力学相似关系可以准确预估实际结构的动力学特性。

关键词 结构动力学; 模型试验; 相似理论; 动响应

中图分类号 O327; TH113

引 言

机械振动是设计和研制飞机、直升机和导弹等飞行器时必须妥善解决的重要工程问题。结构振动及由此产生的噪声、疲劳等问题成为评价一项结构品质好坏的重要指标。由于计算方法和计算技术的发展, 对结构进行仿真分析, 了解其在各种动力载荷作用下的响应和破坏形态已经不算十分困难, 但由于本构关系和本构参数等问题还没有得到很好的解决以及实际问题的复杂性, 结构动力学模型试验仍然是了解结构动特性的重要手段和最终手段。

然而, 受实际试验条件的限制, 现有的试验仪器难以满足大型或超大型结构的振动试验要求, 尤其是输入超出振动台推力水平的问题非常突出^[1]。为解决该问题, 采用缩比模型进行试验, 并通过缩比模型试验结果来预估真实的全尺寸结构动特性是一种行之有效的方法。对于这个问题, 一些学者也进行了相应的研究。文献[2]提出了动力学模型试验中的弹性相似率、重力相似率和弹性-重力相似率, 各适用于不同情况。文献[3]在文献[2]的理论基础上提出了结构动力模型试验中保持结构原型和缩比模型相似的 3 种基本要求与处理技巧。文献[4]根据重力相似理论分析了岳阳洞庭湖大桥模型的动力相似准则, 得到各模态参数相似比。文献[5]根据相似

理论原理和结构动力学理论, 推导了固有振动的相似准则。文献[6]对 NAS9-15302 型航天飞机返回发射场地的轨道分离器的动力学特性进行了研究, 通过对推动力和其他一些飞行参数的相似性转换, 发现试验数据可以基本反映真实飞行状态下的动力学特性。文献[7]对 J-5 马尔科小型无人直升机进行了缩比模型的飞行试验, 定义全机尺寸的几何缩比参数, 其余所有的物理参数都通过全机尺寸参数表示, 通过缩比模型的飞行试验和相似性转换, 得到真实直升机相应的飞行参数。这是到目前为止以相似理论为基础, 与动力学相结合的较为完整的一个缩比模型试验, 但是所有物理参数都以几何尺寸来表示, 虽然在数值上可以实现, 但是无法保留这些参数本来的物理意义, 对试验结果的合理解释也不明确。

笔者首先给定缩比模型和全尺寸模型的几何相似关系和物理参数相似关系, 从有限元的角度出发, 通过单元层面推导单元刚度矩阵和质量矩阵的相似关系, 进而给出总刚度矩阵和总质量矩阵的相似性; 然后, 将总刚度矩阵和总质量矩阵的相似性关系与结构动力学方程相结合, 通过系统特征方程探寻缩比模型和全尺寸模型固有模态相似关系; 最后, 对比分析缩比模型和全尺寸模型的模态试验结果来验证所提出的相似关系的准确性。

* 国家自然科学基金资助项目(11472132); 中央高校基本科研业务费专项资助项目
收稿日期: 2012-12-17; 修回日期: 2013-05-06

1 相似关系

多自由度系统运动方程可表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

假设系统的动力学特性与以下物理量有关： H ， u ， ρ ， ω ， μ ， a ， l ， F ， E 和 v 。其中： H 为位移传递函数； u 为系统的位移； ρ 为系统的密度； ω 为系统的频率； μ 为泊松比； a 为系统的加速度； l 为系统的尺寸； F 为施加的外激励； E 为弹性模量； v 为系统的速度。这些物理量的关系可以表示为

$$f(H, u, \rho, \omega, \mu, a, l, F, E, v) \quad (2)$$

根据 π 定理^[2]可以得到如下相似准则

$$\begin{cases} \pi_1 = \mu \\ \pi_2 = u/l \\ \pi_3 = F/EI^2 \\ \pi_4 = \frac{1}{\omega l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ \pi_5 = HF/u \\ \pi_6 = a/\omega^2 u \\ \pi_7 = v/\omega u \end{cases} \quad (3)$$

根据这 7 个相似准则和振动理论，可以得到模态参数的相似关系。这种计算方法在理论推导上是完全成立的，但是在实际的模型试验设计过程中^[8]，对于一些薄板结构来说，其长宽方向与厚度方向的尺寸往往相差两个数量级以上，制作各个方向都等比缩放的缩比模型是很难做到的。

笔者考虑实际工程应用中的操作难度，基于相似理论和有限元法，推导出非等比缩放的相似关系。

1.1 基于有限元法的动力学相似准则

对板壳结构来说，单元的单元质量阵可表示为

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A t}{x} \mathbf{D} \quad (4)$$

其中： A 为单元面积； t 为单元厚度（当采用梁单元时， t 表示单元长度， A 表示截面积）； x 是与选取的单元类型（即平面四边形单元、平面三角形单元和梁单元）有关的常数；矩阵 \mathbf{D} 是与单元质量矩阵类型（即集中质量阵和一致质量阵）有关的常数矩阵。

单元刚度阵可以表示为

$$\mathbf{K}^e = \frac{Et}{4(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中： μ 为泊松比； \mathbf{k}_1 ， \mathbf{k}_2 ， \mathbf{k}_3 和 \mathbf{k}_4 是与相似参数无关的刚度子块矩阵。

假设实际模型的刚度矩阵为 \mathbf{K} ，质量矩阵为 \mathbf{M} ，

分别由单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 和单元质量矩阵 \mathbf{M}^e 组装得到，将单元的各个矩阵进行装配，可形成类似式(1)的系统整体有限元方程，即

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{P}_t \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \sum_{e=1}^n \mathbf{u}_t^e \\ \mathbf{P}_t = \sum_{e=1}^n \mathbf{P}_t^e \\ \mathbf{M} = \sum_{e=1}^n \mathbf{M}^e \\ \mathbf{C} = \sum_{e=1}^n \mathbf{C}^e \\ \mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}^e \end{cases} \quad (7)$$

则系统特征值问题可以表示为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (8)$$

考虑实际模型与缩比模型采用完全相同的网格划分方法，即使得划分的网格拓扑关系一一对应，包括节点与节点对应，单元与单元对应，且单元编码方式也完全对应。

式(4)和式(5)已经给出了单元质量和单元刚度矩阵的具体形式，则缩比模型单元刚度矩阵 \mathbf{K}_p 和单元质量矩阵 \mathbf{M}_p 可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_p = \lambda_k \mathbf{K}^e \\ \mathbf{M}_p = \lambda_m \mathbf{M}^e \end{cases} \quad (9)$$

其中： λ_k 和 λ_m 为刚度和质量的缩比系数。

由于网格拓扑关系完全相同，组装并不改变其中的缩比关系，因此可得

$$\begin{cases} \mathbf{K}_p = \lambda_k \mathbf{K} \\ \mathbf{M}_p = \lambda_m \mathbf{M} \end{cases} \quad (10)$$

那么，缩比模型系统特征值问题可表示为

$$(\lambda_k \mathbf{K} - \omega^2 \lambda_m \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (11)$$

改写为

$$\left[\mathbf{K} - \left(\omega \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda_k}} \right)^2 \mathbf{M} \right] \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (12)$$

对式(8)来说，特征方程为

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (13)$$

该特征方程实际上可表示为

$$\sum_{r=0}^n a_r \omega^{2r} = 0 \quad (14)$$

其中： a_r 由刚度矩阵 \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 决定； n 为刚度矩阵或质量矩阵的阶数。

特征方程的根为系统固有频率，即 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 。任意固有频率 ω_r 对应的特征值 $\boldsymbol{\varphi}_r$ 即为系统固有振型。对式(12)来说，记 $\omega_p = \omega_m \sqrt{\lambda_m / \lambda_k}$ ，方程可

改写为

$$(\mathbf{K} - \omega_p^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad (15)$$

该特征方程为

$$\det(\mathbf{K} - \omega_p^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (16)$$

也可改写为

$$\sum_{r=0}^n a_r \omega_p^{2r} = 0 \quad (17)$$

对比式(13)和式(16)不难发现,两个特征方程的根是完全相同的。

记式(16)的根为 $(\omega_p)_1, (\omega_p)_2, \dots, (\omega_p)_n$, 易知

$$\begin{cases} (\omega_p)_1 = \omega_1 \\ (\omega_p)_2 = \omega_2 \\ \vdots \\ (\omega_p)_n = \omega_n \end{cases} \quad (18)$$

将 $\omega_p = \omega \sqrt{\lambda_m / \lambda_k}$ 代入可得

$$(\omega_p)_r = \omega_r \sqrt{\lambda_m / \lambda_k} \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

由此可得

$$\begin{aligned} [\mathbf{K} - (\omega_r \sqrt{\lambda_m / \lambda_k})^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\varphi}_r = \\ (\mathbf{K} - (\omega_p)_r^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_r = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

由式(4)和式(5)不难得到

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda_E \lambda_t / \lambda_l^2 \\ \lambda_m = \lambda_\rho \lambda_l^2 \lambda_t \end{cases} \quad (21)$$

其中: λ_E 为弹性模量缩比系数; λ_t 为厚度方向缩比系数; λ_ρ 为密度缩比系数; λ_l 为几何尺寸缩比系数。

因此式(19)可以改写为

$$(\omega_p)_r = \omega_r \sqrt{\frac{\lambda_\rho \lambda_l^2 \lambda_t}{\lambda_E \lambda_t / \lambda_l^2}} = \omega_r \sqrt{\frac{\lambda_\rho \lambda_l^4}{\lambda_E}} \quad (22)$$

不难证明,固有频率对应的缩比模型与实际模型的固有振型相同。

1.2 模态参数的相似关系

通过对式(6)的自由振动和强迫振动分析,可以得到位移传递函数

$$H_{ij} = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_{ir} \varphi_{jr}}{M_r s^2 + C_r s + K_r} \quad (23)$$

其物理意义在于当结构第*i*个自由度上作用一个单位激励时,第*j*个测点的响应幅值,*n*为模态阶数。且

$$\boldsymbol{\Phi}_r = [\varphi_{1r} \ \varphi_{2r} \ \dots \ \varphi_{ir} \ \dots \ \varphi_{jr} \ \dots \ \varphi_{nr}]^T \quad (24)$$

如果把结构上*n*个自由度上任意两点间的传递函数写成*n*×*n*的矩阵形式

$$\mathbf{H} = \sum_{r=1}^m F_r \begin{bmatrix} \varphi_{1r} \varphi_{1r} & \varphi_{1r} \varphi_{2r} & \dots & \varphi_{1r} \varphi_{nr} \\ \varphi_{2r} \varphi_{1r} & \varphi_{2r} \varphi_{2r} & \dots & \varphi_{2r} \varphi_{nr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{nr} \varphi_{1r} & \varphi_{nr} \varphi_{2r} & \dots & \varphi_{nr} \varphi_{nr} \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中: $F_r = \frac{1}{M_r s^2 + C_r s + K_r}$ 。

从传递函数矩阵可知,其中任意一列为

$$\{H_j\} = \sum_{r=1}^n \{H_{ij}^r\} = \sum_{r=1}^n F_r \boldsymbol{\varphi}_r \{\varphi_r\} \quad (26)$$

分析式(26)可知,这一列包含了模态矩阵(*n*×*n*)的全部信息,因此仅需要测量传递函数矩阵的某一行或某一列即可。当测量某一列时,相当于固定激励点测量全部自由度的响应;当测量某一行时,相当于固定测点,移动激励点位置。

由相似准则 π_2, π_3 和 π_5 可以得到缩比模型和实际模型满足如下关系式

$$\frac{(H_{ij}^r)_m}{(H_{ij}^r)_p} = \frac{1}{\lambda_l \lambda_E} \quad (27)$$

式(27)中,频域响应的相似关系是在满足 $\omega = \omega_r$ 和不考虑结构阻尼特性的前提下得到的,针对实际模型试验中系统频域响应的测量,给定频率相似比为 λ_ω ,同时引入阻尼比 $\zeta = C / 2\sqrt{MK}$,则频域响应相似关系满足

$$\begin{aligned} \lambda_{H_{ij}} = (H_{ij})_p / (H_{ij})_m = \\ \frac{\sum_{r=1}^N \frac{\varphi_{irp} \varphi_{jrp}}{-\omega^2 M_{rp} + 2j\omega \sqrt{M_{rp} K_{rp}} + K_{rp}}}{\sum_{r=1}^N \frac{\varphi_{irm} \varphi_{jrm}}{-\omega^2 M_{rm} + 2j\omega \sqrt{M_{rm} K_{rm}} + K_{rm}}} = \\ \frac{1 / \lambda_E \lambda_l^2}{\lambda_E \lambda_l - \lambda_\omega^2 \lambda_\rho \lambda_l^2 \lambda_t + 2j \lambda_\zeta \lambda_l \sqrt{\lambda_E \lambda_\rho \lambda_l^2}} \end{aligned} \quad (28)$$

值得注意的是,在实际工程试验应用中,由于试验件的设计加工、试验设备、试验环境以及人工操作等多方面不可控制的因素影响,使得缩比模型和实际模型阻尼项之间没有相似关系^[9],所以式(28)引用的 λ_ζ 是实际模型和缩比模型实际测得的阻尼比的比值。

系统在外载荷作用下的解为

$$\begin{aligned} \eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}} \int_0^t F_i(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \\ \sin(\sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i (t - \tau)) d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

系统的时域响应相似关系根据不同的外载荷代入式(29),可以根据相似变换得到。

2 结构动力学模型的相似条件

与所有模型试验一样,结构动力学模型试验的主要环节包括相似条件和相似常数的拟定、模型材料的选择、模型制作、测试和结果分析几个部分。对结构动力学模型试验而言,模型与原型相似必须满足的条件包括以下几个方面^[10]。

2.1 空间条件相似

空间条件相似即原型与模型空间的相对位置和几何尺寸相似。结构受外载荷激励后会发生应变与位移。位移相似常数、线应变与角应变 λ_u 、 λ_ϵ 和 λ_φ 必须满足关系

$$\lambda_u = \lambda_\epsilon \lambda_l = \lambda_\varphi \lambda_l \quad (30)$$

2.2 物理条件相似

物理条件相似就是指结构模型、原型的物理力学特性和由载荷激励引起的变形必须保持相似，在弹性范围内弹性模量 E 、剪切模量 G 、泊松比 μ 、黏滞系数 γ 和阻尼系数 ζ 等必须符合相似条件要求。根据弹性力学的物理方程，相似常数应满足 $\lambda_u = 1$ ； $\lambda_\sigma = \lambda_E \lambda_\epsilon$ ； $\lambda_\tau = \lambda_G \lambda_\varphi$ 。

2.3 边界条件相似

边界条件是指结构表面承受外激励、载荷的作用顺序、约束条件和初始条件等。其中要求模型与原型的约束条件必须一致，在不影响结构的正常工作以及满足合理的简化规则和处理方式下可做一定简化。

2.4 运动条件相似

运动条件相似包括结构的运动状态和产生运动的条件相似。

3 试验验证

为了进一步验证笔者推导的动力学相似关系在实际应用当中的准确性和应用价值，现在以薄板板件结构进行简单的振动试验，如图 1~图 3 所示。板件采用 GB/T3190-96 的铝板，用柔性橡皮绳悬挂模拟自由状态，采用锤击法测频响，同时采用 NI4431 采集卡和数据采集软件 M+P 进行数据采集。



图 1 GB/T3190-96 的铝板试验件

Fig. 1 Aluminum test pieces of GB/T3190-96

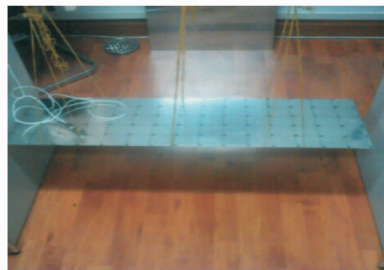


图 2 柔性悬挂

Fig. 2 Flexible suspension



图 3 力锤、数据采集卡和传感器

Fig. 3 Hammer, data acquisition card and sensor

实际模型与缩比模型的缩比参数如表 1 所示。

表 1 缩比参数

Tab. 1 Scaled parameters

参数	实际模型	缩比模型
l/cm	$90 \times 30 \times 2$	$60 \times 20 \times 2$
ζ	0.03	0.03
E/Pa	70×10^9	70×10^9
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2 800	2 800
泊松比 μ	0.33	0.33

根据以上参数和板件实际结构，在 M+P 中建立实际结构和缩比结构的模型，模型如图 4 所示。

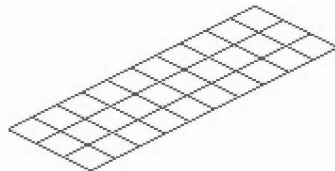


图 4 结构模型

Fig. 4 Structural model

为了更好地验证所推导关系的准确性，本试验不考虑模型由于网格划分不同而需要考虑的模型缩聚问题。试验中，实际模型和缩比模型的网格划分方式、数目以及加速度传感器的固定位置都是相同的，如图 5 所示。

表 2 给出了标准模型前 4 阶模态和由缩比模型估计的实际模型前 4 阶模态的对比结果。

1	8	9	16	17	24	25	32	33	40 41
2	7	10	15	18	23	26	31	34	39 42
3	6	11	14	19	22	27	30	35	38 43
4	5	12	13	20	21	28	29	36	37 44

图 5 模型网格布置
Fig. 5 Model grid layout

表 2 缩比模型和实际模型固有频率对照表

Tab. 2 The natural frequency of the scale model and actual model

阶次	实际模型	缩比模型	估计	误差/%
	频率/Hz	频率/Hz	频率/Hz	
1	10.229	22.466	10.00	2.29
2	31.076	68.183	30.30	2.50
3	69.321	147.960	65.76	5.14
4	115.710	253.370	112.61	2.68

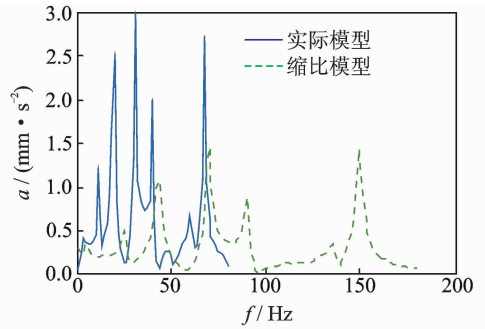
从表 2 中的对比情况可以看出,用缩比模型的固有频率依据相似关系来估计实际模型的固有频率是比较准确的。本试验中,第 1 阶和第 2 阶的估计误差百分数相比较其他阶数较大一些,这是由于采用锤击法测自由状态结构的固有频率,低频范围内的固有频率不容易测得,并且误差也相对较大。考虑试验环境、人为因素和以上分析原因可以得出,笔者采用的基于有限元法和相似理论,对各方向非等比缩放的用缩比模型预估实际模型的固有频率是可靠和准确的。

根据试验测得的各阶阻尼比以及试验实际测量的采样点数,图 6~图 8 给出了缩比模型的加速度频域响应经过相似变换后,估计出的实际模型加速度频域响应和标准模型加速度频域响应的对比情况。实际结构的动力学响应一般低频占优,因此,采用缩比模型频响函数来估计全尺寸模型的频响函数,并与全尺寸模型实测频响函数进行对比。在实际试验中,频响函数范围取 0~80 Hz。

从上面的分析对比中可以看出,经过相似性转换以后,缩比模型和实际模型加速度频域响应曲线的吻合度较好,只是在共振峰出现的频率点和某些反共振峰出现的频率点出现较小的偏差,这是由于实际模型和缩比模型的阻尼特性不完全相同,再加上试验过程中人为干扰的引入,因此可以说明笔者依据相似原理和有限元法推导的相似关系的准确性和可靠性。

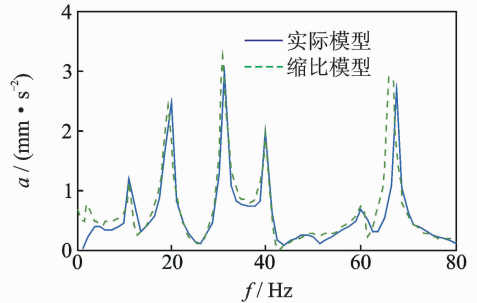
4 结束语

笔者采用结构模型试验的动力相似理论,提出



(a) 标准模型与缩比模型在(11, 38)处加速度频域响应经相似性变换前对比曲线

(a) Acceleration frequency response before similarity transformation at (11, 38) of the scale model and actual model



(b) 标准模型与缩比模型在(11, 38)处加速度频域响应经相似性变换后对比曲线

(b) Acceleration frequency response after similarity transformation at (11, 38) of the scale model and actual model

图 6 (11, 38)处加速度频响相似性变换前后对比图
Fig. 6 Acceleration frequency response before and after similarity transformation at (11, 38)

基于 π 定理和有限元理论相结合的方法推导出结构动力学模型试验中薄板结构实际模型和缩比模型的动力学相似关系,并推导了结构固有频率、固有阵型和频响函数等振动特性参数的相似比。通过具体试验进一步验证了可以根据缩比模型的试验数据,按照这种动力学相似关系,估计出实际模型的相应数据。相对于文献[3]~文献[7]而言,所得到的动力学相似关系在工程应用中更具有实际应用价值,也更为准确。

参 考 文 献

[1] 杨俊杰. 相似理论与结构模型试验[M]. 武汉:武汉理工大学出版社,2005:18-36.
 [2] 林皋. 研究拱坝振动的模型相似率[J]. 水利学报,1958(1):80-104.
 Lin Gao. The reserash of similarity of arch dam vibration models[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1958(1):80-104. (in Chinese)
 [3] 林皋,朱彤,林蓓. 结构动力模型试验的相似技巧[J].

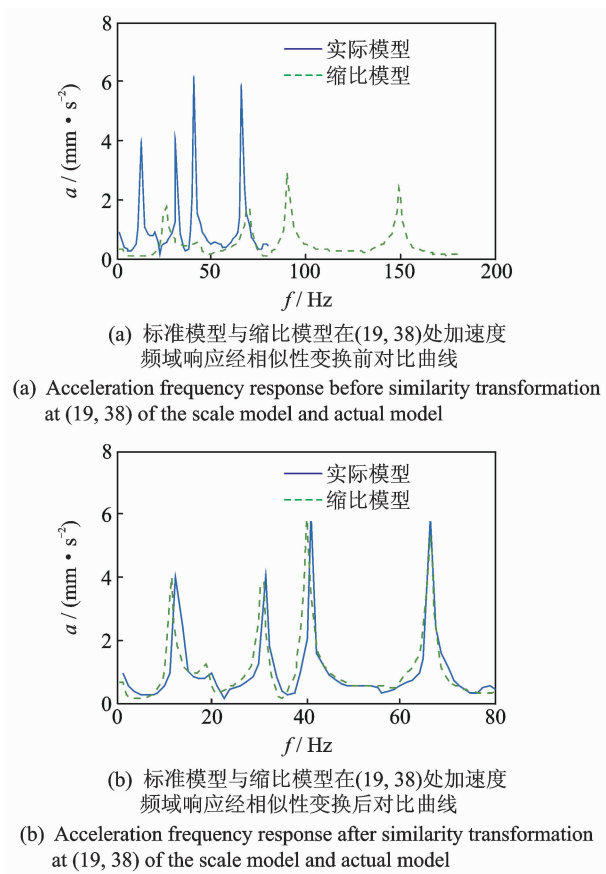


图7 (19,38)处加速度频响相似性变换前后对比图

Fig. 7 Acceleration frequency response before and after similarity transformation at (19,38)

大连理工大学学报, 2000(40):1-8.

Lin Gao, Zhu Tong, Lin Bei. Similarity technique for dynamic structural model test[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2000(40):1-8. (in Chinese)

- [4] 陈常松, 颜东煌, 田仲初, 等. 岳阳洞庭湖大桥模型动力相似理论分析[J]. 桥梁建设, 2002(1):48-51.
Chen Changsong, Yan Donghuang, Tian Zhongchu, et al. Dynamical similarity theory analysis to the model of Yueyang Dongting Lake Bridge[J]. Bridge Construction, 2002(1):48-51. (in Chinese)
- [5] 陈星烨, 马晓燕, 宋建中. 大型结构试验模型相似理论分析与推导[J]. 长沙交通学院学报, 2004(20):11-14.
Chen Xingye, Ma Xiaoyan, Song Jianzhong. The comparability analysis and deduction of a large structure test model[J]. Journal of Changsha Communications University, 2004(20):11-14. (in Chinese)
- [6] Robert L B, James R T. Analysis and test for space shuttle propellant dynamics(1/60th scale model test results)[J]. Interim Report, 1978(3):1-27.
- [7] Cezary G. Results of the J-5 Macro dynamic similar model flight test program[R]. [S. l.]: American In-

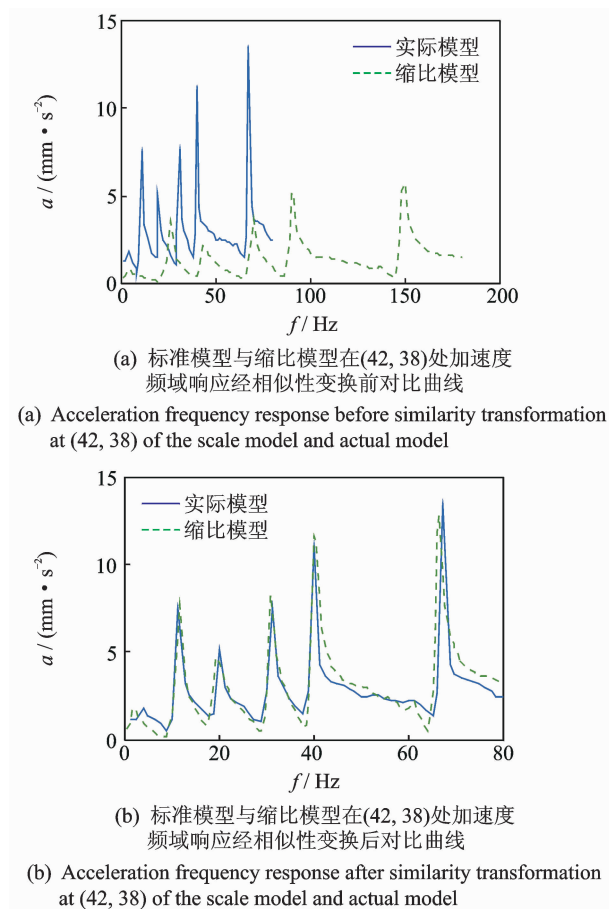
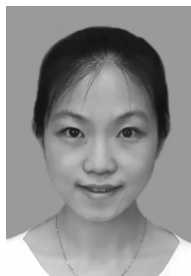


图8 (42,38)处加速度频响相似性变换前后对比图

Fig. 8 Acceleration frequency response before and after similarity transformation at (42,38)

stitute of Aeronautics and Astronautics, 1997.

- [8] Barthel V, Funke E R. Hybrid modeling in gas applied to hydrodynamic research and testing[C]//Recent Advance in Hydraulic Physical Modeling. Netherlands: Springer, 1989.
- [9] Haszpra O. Verification of hydroelastic similitude criteria[J]. Journal of the Hydracelics Division, 1976, 102(4):469-481.
- [10] Harris H G, Sabnis G M. Structural modeling and experimental techniques[M]. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1999:23-38.



第一作者简介: 陈喆, 女, 1989年6月生, 博士研究生。主要研究方向为复杂结构动力分析。曾发表《基于相似理论的结构动力学模型动力响应计算》(《振动工程学报》2012年增刊)等论文。
E-mail: Chenzhe617@163.com