

地震多点输入模型中影响矩阵 R 的意义与注记*

柳国环^{1,2}, 练继建^{1,2}, 国巍³, 耿辰⁴

(1. 天津大学水利工程仿真与安全国家重点实验室 天津, 300072) (2. 天津大学建筑工程学院 天津, 300072)
(3. 中南大学土木工程学院 长沙, 410075) (4. 天津城建大学土木工程学院 天津, 300384)

摘要 在多点地震输入(差动输入)计算模型中, 时域或频域分析均会涉及到一个重要参数, 即影响矩阵 $R = -K_u^{-1}K_{ts}$ 。定性揭示了 R 的数学和物理意义, 定量论证 R 的固有特征, 并给予图解说明和算例论证, 证明由 R 计算得到的拟静力响应在数学意义层面独立于结构的动力反应, 而在物理意义层面二者并非相互独立而存在。

关键词 多点输入; 差动输入; 影响矩阵; 拟静力反应
中图分类号 P315.9; U442; TH128

引言

由于局部场地土、行波和相干效应等因素影响, 构造地震或泄洪诱发地震所导致的地表运动往往具有较为复杂的随机性和不均匀运动特征, 这在激励上表现为差动, 又称多点地震动。长距离大跨结构(如大坝、斜拉桥、悬索桥、输电塔-线体系以及地下连廊作为连体的地下大空间和地上建筑群体)对这种激励相对敏感。各个支座受到波形不同或时间先后的地震作用时结构反应是一个“多点激励”问题。在线性的地震反应分析中, 可以先分别计算每一支单独承受地震输入所引起的反应, 进一步采用叠加方式得到结构总响应^[1]。地震地面多点输入作用下的结构反应分析涉及到两个概念, 即动力反应和拟静力反应^[2-6]。直接计算这两种结构反应所采用的计算模型(时域模型及其相应的频域模型)中会用到一个矩阵参数, 即影响矩阵 $R = -K_u^{-1}K_{ts}$ ^[7-9]。通过该矩阵 R 和支座位置的不均匀输入向量 X_g 等可以计算结构的拟静力和(或)动力反应^[2-5]。然而, 纯粹数学的计算容易造成物理意义被忽略甚至误解。揭示 R 的内在本质对于认知和掌握多点地震计算具有理论和现实意义。

基于以上考虑, 笔者首先定性揭示了参数矩阵 $R = -K_u^{-1}K_{ts}$ 的数学和物理意义, 定量给出并论证了该矩阵的固有特性, 并结合一般情形和多点输入的

特殊情形(一致输入情形)给出图解说明, 最后通过典型算例进一步给出计算结果, 以验证所持观点。此外, 为了明确说明拟静力响应与动力响应是结构绝对反应同时存在的两部分而并非独立存在, 还注记并强调了在数学意义层面上拟静力反应与结构动力反应具有独立性, 而在物理意义层面只是便于理解的两部分, 是同时存在但并非相互独立的。笔者对于多点地震输入计算模型中的参数矩阵 $R = -K_u^{-1}K_{ts}$ 作了专门说明、论述和论证, 所揭示的内容可帮助多点输入计算模型的理解和应用, 以避免对相关概念的误解和误用。

1 影响矩阵 R 相关的数学模型

1.1 影响矩阵 R 的数学模型应用

影响矩阵具有不可或缺的作用, 通过式(1)中的影响矩阵 R 可在时域内直接求解结构的动力反应, 如式(2)、式(3)和式(4)所示

$$X_{ps} = -K_u^{-1}K_{ts}X_s = RX_s \quad (1)$$

$$M_u \ddot{X}_I + C_u \dot{X}_I + K_u X_I = -M_u R \ddot{X}_s - C_u R \dot{X}_s - (K_u R X_s + K_{ts} X_s) - C_{ts} \dot{X}_s = -M_u R \ddot{X}_s - \alpha M_u R \dot{X}_s \quad (2)$$

其中: M, C 和 K 为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, 下标 tt, ss 和 $ts(st)$ 分别表示非支座节点、支座节点自由度及其两者之间的耦合; X_I, \dot{X}_I 和 \ddot{X}_I 为非支座

* 国家自然科学基金创新研究群体科学基金资助项目(51021004);国家自然科学基金青年基金资助项目(51408409);中国博士后科学基金资助项目(2011M500332)
收稿日期: 2013-07-16; 修回日期: 2013-11-20

节点的位移、速度和加速度动力反应列向量; $\mathbf{X}_s, \dot{\mathbf{X}}_s$ 和 $\ddot{\mathbf{X}}_s$ 为支座节点输入的位移、速度和加速度已知列向量,即支座处地面运动向量; \mathbf{X}_{ps} 为拟静力反应列向量; α 为质量阻尼系数; \mathbf{R} 为影响矩阵。

式(2)为位移-速度输入模型的等价表达方式。将位移-速度模型式(2)中阻尼项 $\mathbf{C}_u \dot{\mathbf{X}}_s$ 忽略,即为如式(3)所示的位移输入模型

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{X}}_I + \mathbf{C}_u \dot{\mathbf{X}}_I + \mathbf{K}_u \mathbf{X}_I = & \\ -\mathbf{M}_u \mathbf{R} \ddot{\mathbf{X}}_s - \mathbf{C}_u \mathbf{R} \dot{\mathbf{X}}_s - (\mathbf{K}_u \mathbf{R} \mathbf{X}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{X}_s) - \mathbf{C}_{ts} \dot{\mathbf{X}}_s = & \\ -\mathbf{M}_u \mathbf{R} \ddot{\mathbf{X}}_s - \alpha \mathbf{M}_u \mathbf{R} \dot{\mathbf{X}}_s - \beta \mathbf{K}_s \dot{\mathbf{X}}_s & \end{aligned} \quad (3)$$

将式(3)中输入项 $\mathbf{C}_u \mathbf{R} \dot{\mathbf{X}}_s$ 与 $\mathbf{C}_{ts} \dot{\mathbf{X}}_s$ 项忽略,即为加速度输入模型

$$\mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{X}}_I + \mathbf{C}_u \dot{\mathbf{X}}_I + \mathbf{K}_u \mathbf{X}_I = -\mathbf{M}_u \mathbf{R} \ddot{\mathbf{X}}_s \quad (4)$$

不限于时域分析,采用多点反应谱计算模型可求解结构反应方差,如式(5)所示位移-速度-多点反应谱(displacement velocity-multiple support response spectrum,简称 DV-MSRS)、表达形式同式(5)的 D-MSRS(displacement-multiple support response spectrum)(b_{ki} 与 c_{ki} 替换为 b_{ki}^d 和 c_{ki}^d)以及式(6)所示的 A-MSRS。这些模型均涉及到 \mathbf{R} 的计算。

基于式(2)导出如式(5)所示的 DV-MSRS,基于式(4)导出如式(6)所示的 A-MSRS 以及基于式(3)的 D-MSRS

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 = & \sigma_{ru}^2 + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n a_k c_{lj} \rho_{X_{sk}^s X_{lj\beta}^s} \sigma_{X_{sk}^s} \sigma_{X_{lj\beta}^s} + \\ & 2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ki} c_{lj} \rho_{s_{kia}^s X_{lj\beta}^s} \sigma_{s_{kia}^s} \sigma_{X_{lj\beta}^s} + \\ & \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ki} c_{lj} \rho_{s_{ki\beta}^s X_{lj\beta}^s} \sigma_{s_{ki\beta}^s} \sigma_{X_{lj\beta}^s} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ru}^2 = & \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_k a_{lj} \rho_{X_{sk}^s X_{ld}^s} \sigma_{X_{sk}^s} \sigma_{X_{ld}^s} + \\ & 2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n a_k b_{lj} \rho_{X_{sk}^s X_{lja}^s} \sigma_{X_{sk}^s} \sigma_{X_{lja}^s} + \\ & \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ki} b_{lj} \rho_{s_{kia}^s X_{lja}^s} \sigma_{s_{kia}^s} \sigma_{X_{lja}^s} \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $a_k = \mathbf{H}^T \mathbf{r}_k$; \mathbf{H} 为反应转换向量,如刚度矩阵、应力矩阵和应变矩阵; \mathbf{r}_k 为影响矩阵的第 k 个列向量。

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_k \cdots \mathbf{r}_m]^T \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

1.2 \mathbf{R} 矩阵元素的具体表达

多点激励下支座之间产生差动效应,上部结构的绝对位移组成较为复杂,从而引入了“拟静力位移”与“动位移”概念,巧妙地将绝对位移利用以上两种位移表达,对于分析结构响应具有重要意义。拟

静力分析中引入“影响矩阵”,将支座位移采用静力学方法施加产生的结构位移为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{ts} \\ \mathbf{K}_{st} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_g^s \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中: \mathbf{f}_g^s 为利用静力学方式施加随时间变化的位移 \mathbf{X}_g 所需要的支座反力向量。

继续将式(8)涉及到自由度 \mathbf{X}_I 方程展开,并只考虑拟静力 \mathbf{X}_{ps} ,有

$$\mathbf{K}_u \mathbf{X}_{ps} + \mathbf{K}_{ts} \mathbf{X}_g = \mathbf{0} \quad (9a)$$

$$\text{或} \quad \mathbf{X}_{ps} = -\mathbf{K}_u^{-1} \mathbf{K}_{ts} \mathbf{X}_g = \mathbf{R} \mathbf{X}_g \quad (9b)$$

其中: $\mathbf{X}_g = [x_{g1}, \dots, x_{gk}, \dots, x_{gm}]$, x_{gk} 为第 k 支座位置的输入。

将 \mathbf{R} 的计算式完全展开为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{sym} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{1g1} & k_{1g2} & \cdots & k_{1gm} \\ \vdots & k_{2g2} & \cdots & k_{2gm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{ng1} & \cdots & \cdots & k_{ngm} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)即为影响矩阵的数学计算公式。左边第1个矩阵是结构上部 n 个自由度刚度矩阵的逆,大小为 $n \times n$ 维;第2个矩阵本质为每个支座处单位位移引起上部结构自由度位置力的大小,大小为 $n \times m$ 维。 n 代表非支座节点的自由度, m 代表支座自由度数。不难看出, \mathbf{R} 由上部结构刚度矩阵的逆左乘非支承点与支承点的耦合刚度矩阵而成。根据式(10),第 i 个非支座节点拟静力位移 x_i^s 可表达为

$$X_i^s = \sum_{k=1}^m r_{ik} x_{gk} \quad (11)$$

2 关于 \mathbf{R} 的数学特性与物理意义

2.1 \mathbf{R} 数学特性与物理意义

考察式(9b)所示的转换矩阵 \mathbf{R} , 有如下数学特性和物理意义。

1) \mathbf{R} 为 n 行 m 列矩阵,其中 \mathbf{K}_s 矩阵非零元素大小为连接支座的单元刚度。物理意义是表示通过 \mathbf{R} 分配加权给支座位置的输入 \mathbf{X}_g , 从而传递并影响非支座节点的拟静力反应。

2) \mathbf{R} 各行的矩阵元素 r_{ij} 代数和等于1,如式(12)所示。第 i 行第 j 列元素 r_{ij} 的物理意义表示对第 j 个支座输入(\mathbf{X}_g 的第 j 个向量分量)加权(权

重大小为 r_{ij} 后传递给第 i 个非支座节点反应的大小,即 \mathbf{R} 的第 i 行第 j 列左乘 \mathbf{X}_g 列向量的第 j 个分量。每个节点的拟静力反应计算结果在量值等于第 i 个非支座节点拟静力反应。如式(13)~(15)所示

$$\sum_{j=1}^m r_{ij} = 1 \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) \quad (12)$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{R}_i \quad \cdots \quad \mathbf{R}_n]^T \quad (13)$$

$$(\mathbf{R}(i) = [r_{i1}, \cdots, r_{ij}, \cdots, r_{im}])$$

$$\mathbf{X}_g = [x_{g1} \cdots x_{gj} \cdots x_{gm}]^T \quad (14)$$

第 i 个非支座节点拟静力位移 x_i^s 可表达为

$$x_i^s = \mathbf{R}(i) \mathbf{X}_g = r_{i1} x_{g1} + \cdots + r_{ij} x_{gj} + \cdots + r_{im} x_{gm} = \sum_{j=1}^m r_{ij} x_{gj} \quad (15)$$

3) 特殊地,对于一致输入(\mathbf{X}_g 中列元素均相等),由于每行的元素之和等于1,与 \mathbf{X}_g 相乘计算结果与 \mathbf{X}_g 向量元素大小相等,即拟静力反应等于输入。物理意义表现为拟静力反应与支座输入完全一致,结构的运动形式表现为平动(结构相对于支座的相对运动为零),此时结构的拟静力反应不产生内力。这时,式(14)中的向量分量相等,即

$$x_{g1} = \cdots = x_{gj} = \cdots = x_{gm} = x_g \quad (16)$$

由于矩阵 \mathbf{R} 具有如下性质:式(12)所示的每行元素之和等于1,因此联合式(16)有

$$x_i^s = x_g \sum_{j=1}^m r_{ij} = x_g \quad (17)$$

对于一致输入这种情形,可直接将拟静力表示为

$$\mathbf{X}_{ps} = \mathbf{I} \mathbf{X}_g \quad (18)$$

其中: \mathbf{I} 为 n 维单位列向量。

需要强调的是,式(18)是根据物理意义的直接数学表示,在数学和物理层面不具有式(4)表现形式的一般性。

2.2 \mathbf{R} 矩阵元素作为权重意义的图解

图1给出多点和一致输入情形下结构拟静力反应的变形示意图。图(a)中,支座位置输入的非一致性导致结构的拟静力反应不同步,相对变形使得构件产生内力。或者说,由于 x_{gj} 差异性导致对其加权 r_{ij} 求和后所得到的第 i 个节点的拟静力位移 x_i^s 之间不相等(不均匀的支座输入被重新分配后节点反应不同),节点间的相对位移与客观存在构件刚度将产生拟静力反应导致的内力。图(b)中,分配加权

过程相同,因支座输入一致所以反应也一致,结构变形为与输入相同的整体平动变形。

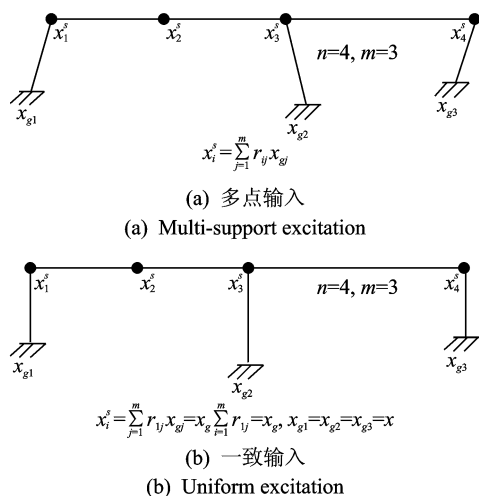


图1 影响矩阵 \mathbf{R} 对拟静力反应贡献的图解

Fig. 1 Illustration of the contribution of influence matrix \mathbf{R} to pseudo-static response

支座位置多点输入引起结构的运动形态是理解多点激励的关键问题之一,下面从不同支座输入对结构变形的贡献角度加以说明。

1) 位移方面。一致输入下,结构的绝对位移在任一瞬时满足如下关系

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{ps} + \mathbf{X}_I = \mathbf{E} \mathbf{X}_g + \mathbf{X}_I \quad (19)$$

其中: x_g 为地面位移; \mathbf{X}_I 为地震激励所引起的动力反应位移。

多点输入下结构绝对位移表达为

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{ps} + \mathbf{X}_I = \mathbf{R} \mathbf{X}_g + \mathbf{X}_I \quad (20)$$

其中: \mathbf{X}_g 为不同支座位移列向量; \mathbf{X}_I 为地震激励所引起的动力反应位移; \mathbf{R} 为影响矩阵。

2) 内力方面。根据力学知识,结构内力的产生只与相对位移有关。“一致输入”中拟静力位移与地震激励下地面运动位移相同,结构内力仅与动力反应位移有关。“多点输入”下地面运动的差异性致使拟静力位移中包含了部分相对位移,所以结构的内力与 $\mathbf{R} \mathbf{X}_g$ 和 \mathbf{X}_I 均相关。

比较式(19)和式(20),多点激励与一致激励中引起的“拟静力位移”有一定区别,差动输入条件下 \mathbf{X}_{ps} 会产生内力且与支座位移不一致。正是如此,多点激励引入影响矩阵,表达在静力下如何分配加权影响支座输入 \mathbf{X}_g 并传递给非支座节点的拟静力反应。

计算质点惯性力时考虑真实地震下基底位移而

引起上部质点的绝对位移加速度,即惯性力是由质量与绝对位移加速度产生,见图 2。建立绝对位移与地面位移二者之间的关系,利用已知地震波数据较好地求解微分方程,在多点激励下绝对位移可采用式(20)进行推导计算^[9-10]。“拟静力加速度”的产生根据是:采用一种静力方式使支座移动而引起上部结构的位移,再对其两次求导而得出“拟静力加速度”。忽略惯性力影响计算地震激励下地面运动引起的结构位移 \mathbf{X}_{ps} ,又在运动方程中对其求导引入 $\ddot{\mathbf{X}}_{ps} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{X}}_g$,从物理意义上讲加速度是描述物体速度改变快慢的物理量,而拟静力位移是由支座静位移下所引起,其产生加速度并不是一种符合物理常态的现象。把握好“数学”与“物理”之间的关系,有利于正确认识实际工程所产生的多种现象,即数学上的推导只是单纯数字上的变换。数学层面拟静力位移与动位移二者独立存在,而物理现象中二者是一个不可分割的整体,结合物理意义与数学推导掌握“拟静力”的方法进行抗震分析,才会对多点激励下运动方程的理解更加清晰明确。

3 R 性质的理论论证与算例验证

3.1 R 数学性质的理论论证

不失一般性,取一具有代表性的一般结构体系作为基本单元,如图 3 所示。

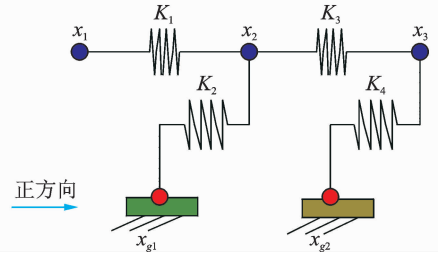


图 3 代表性结构体系示意图

Fig. 3 Sketch of typical structural system

与式(21)所示节点位移反应向量相对应的刚度矩阵 \mathbf{K}_u 和 \mathbf{K}_s 如式(22)给出,影响矩阵 \mathbf{R} 及其矩阵元素计算结果如式(23)~式(25)所示

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_t \\ \mathbf{X}_g \end{Bmatrix} = [x_1, x_2, x_3, x_{g1}, x_{g2}]^T \quad (21a)$$

$$\mathbf{X}_t = [x_1, x_2, x_3]^T \quad (21b)$$

$$\mathbf{X}_g = [x_{g1}, x_{g2}]^T \quad (21c)$$

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{bmatrix} \quad (22a)$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_2 & 0 \\ 0 & -K_4 \end{bmatrix} \quad (22b)$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{K}_u^{-1}\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中,相关矩阵元素为

$$\begin{cases} r_{11} = k_2(k_3 + k_4) \\ r_{12} = k_3k_4 \\ r_{21} = k_2(k_3 + k_4) \\ r_{22} = k_3k_4 \\ r_{31} = k_2k_3 \\ r_{32} = k_4(k_2 + k_3) \end{cases} \quad (24)$$

$$A = k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4 \quad (25)$$

由式(23)~式(25)容易看出式(9)所给出的两个性质:

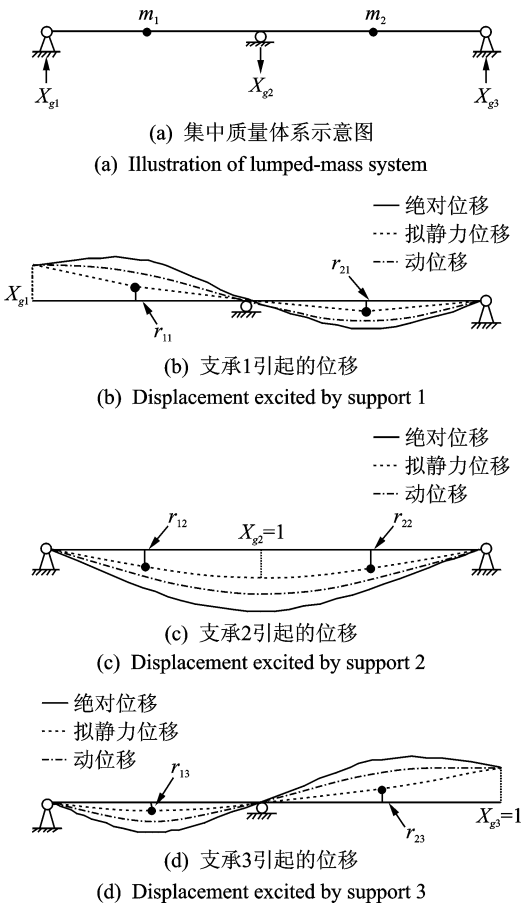


图 2 支座动位移引起的结构反应

Fig. 2 Structural response caused by the bearing dynamic displacement

1) 由于 $r_{ij} \leq A$ 恒成立,“等于”这种情形在理论上对应于构件刚度为零;

2) 由于 $\sum_{j=1}^m r_{ij} = A$ 恒成立, $\sum_{j=1}^m R_{ij} = 1$ 成立。

当结构单元矩阵变化、考虑更多自由度和维度情形时, \mathbf{K}_u 和 \mathbf{K}_{ts} 发生相应变化,但是 \mathbf{R} 的计算结果具有上述两个性质不会改变。上述算例从基本结构体系出发论证,具有代表性和一般性。

3.2 R 数学性质的算例验证

标有局部与全局坐标系的算例如图 4 所示,弹性模量 $E = 3.0 \times 10^{10}$ Pa, 惯性矩 $I = 2.023 \times 10^{-3}$ m², 横截面积 $A = 0.114$ m², $L_1 = 3$ m, $L_2 = 5$ m。只考虑整体坐标系下水平方向自由度,将整体刚度矩阵转化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{ts} \\ \mathbf{K}_{st} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} [x_{1x}, x_{1y}, \varphi_1, \dots, x_{6x}, x_{6y}, \varphi_6]^T = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_g^s \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{tt} & \hat{\mathbf{K}}_{ts} \\ \hat{\mathbf{K}}_{st} & \hat{\mathbf{K}}_{ss} \end{bmatrix} [x_{1x} \dots x_{6x}]^T = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{f}}_g^s \end{Bmatrix} \quad (26)$$

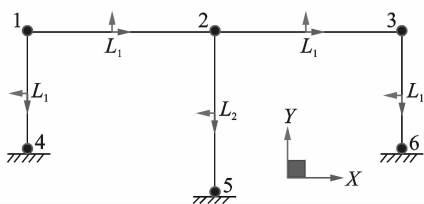


图4 算例模型示意图

Fig. 4 Illustration of calculation model

单元刚度矩阵如式(27)所示,非支座节点刚度矩阵 $\hat{\mathbf{K}}_{tt}$ 及其与支座耦合刚度矩阵 $\hat{\mathbf{K}}_{ts}$ 如式(28)与式(29)所示

$$\mathbf{K}_{14} = \mathbf{K}_{36} = \begin{bmatrix} 0.027 & -0.027 \\ -0.027 & 0.027 \end{bmatrix} \times 10^9 \quad (27a)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} 1.14 & -1.14 \\ -1.14 & 1.14 \end{bmatrix} \times 10^9 \quad (27b)$$

$$\mathbf{K}_{25} = \begin{bmatrix} 0.0583 & -0.0583 \\ -0.0583 & 0.0583 \end{bmatrix} \times 10^9 \quad (27c)$$

$$\mathbf{K}_{tt} = \begin{bmatrix} 1.167 & -1.14 & 0 \\ -1.14 & 2.2858 & -1.14 \\ 0 & -1.14 & 1.167 \end{bmatrix} \times 10^9 \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_{ts} = \begin{bmatrix} -0.027 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0058 & 0 \\ 0 & 0 & -0.027 \end{bmatrix} \times 10^9 \quad (29)$$

采用式(9)从数学角度确定影响矩阵

$$-\mathbf{K}_{tt}^{-1} = - \begin{bmatrix} 17.155 & 16.6841 & 16.2981 \\ 16.6841 & 17.0792 & 16.6841 \\ 16.2981 & 16.6841 & 17.155 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \quad (30)$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{K}_{tt}^{-1} \mathbf{K}_{ts} = \begin{bmatrix} 0.4632 & 0.0968 & 0.4400 \\ 0.4505 & 0.0990 & 0.4505 \\ 0.4400 & 0.0968 & 0.4632 \end{bmatrix} \quad (31)$$

利用 SAP2000 建立图 4 所示模型,同时施加支座位移 $\mathbf{X}_g = \{x_{4x}, x_{5x}, x_{6x}\} = \{0.2, 0.1, 0.4\}$, 释放转角与 Y 向自由度,其他属性保持一致。结构拟静力响应与根据式(31)直接计算“拟静力位移”对比见表 1。

表1 拟静力位移对比

Tab. 1 Contrast of pseudo-static response

节点	数值模拟 X_{ps}/m	公式计算 X_{ps}/m
1	0.2777	0.2783
2	0.2794	0.2802
3	0.2819	0.2830

表 1 给出了使用 SAP2000 数值模拟的结构响应与利用影响矩阵数学公式直接推算的结果。由表中不难看出,二者在数值上的高度一致性,不仅说明了利用 \mathbf{R} 推算结果的有效性和精确性,而且表达了影响矩阵的物理意义(见图 5),即支座运动对上部结构的影响。

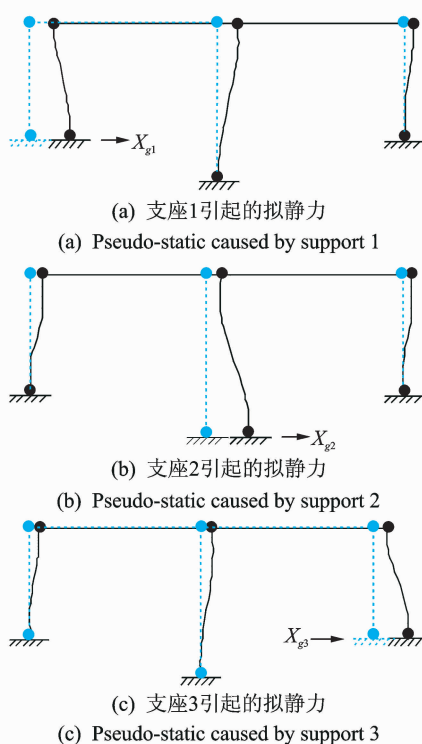


图5 支座静位移对结构的影响

Fig. 5 Structural response caused by the bearing static displacement

4 拟静力与动力反应相关注记与建议

结构的绝对反应可被认为是由两部分组成:拟静力反应和动力反应。拟静力反应通过式(9)直接计算,动力反应可通过式(2)计算,这两者的计算在数学意义上是完全独立的。需要强调的是,拟静力反应的量值在大小上为式(9)计算结果,这并不意味着在物理意义上拟静力反应脱离动力反应而独立存在。事实上,拟静力反应与动力反应在物理意义上是不可分割的,只是在数学上计算有助于讨论结构绝对反应的贡献,即由于差动输入导致的上部结构反应和由于共振效应对结构反应贡献。同时也需要说明,支座处不同输入之间的卓越频率也会有所区别,这也会影响差动下共振效应对结构反应的贡献。

综合上述分析,笔者建议研究多点输入对结构内力等反应的影响时,宜从如下3个方面作以详细考虑。

1) 对于一致和多点输入情形下,分析结构内力(一致输入拟静力部分不产生内力)和计算结果。

2) 针对多点输入情形下,分析上部结构作为拟静力响应部分的内力。由此,可进一步判断源于拟静力效应对结构多点输入下结构内力的贡献。

3) 针对多点输入情形下,分析上部结构作为动力响应部分的内力,并比较与一致输入计算结果的差别。由此,不仅可以判断源于多点输入下共振效应对结构内力的贡献,还可以对比由于频谱和(或)峰值不同(点点之间不完全相干)的多点输入下与一致输入(频谱和峰值均相同)情形下的计算结果。专门分析由于各个输入的频谱这一因素导致的与一致输入计算结果的区别,可采用将多点输入峰值调为相同这一方法,这样也可了解多点输入由于峰值不同因素对计算结果的影响。这样可以进一步在性质和量化上详细比较和了解一致与多点输入产生内力区别的根本原因,而不只是在强调多点输入的重要性这一长期“停滞”于表面的结论上。

5 结论

1) 定性揭示了 R 的数学意义,定量阐述了 R 行元素之和等于1的固有数学特性,对此进行了图解说明,同时给出了理论证明和算例验证。

2) 强调了一个客观事实,即“拟静力反应”和“动力反应”两者在数学层面的独立性而在物理层面并不相互独立存在。

3) 提出了研究多点输入对结构反应影响时,有助于深入剖析影响计算结果根本原因的考虑因素。

参 考 文 献

- [1] Clough R W, Penzien J. Dynamics of structures[M]. New York: McGraw-Hill, 1975: 397-398.
- [2] Yamamura N, Tanaka H. Response analysis of flexible MDF systems for multiple-support seismic excitations[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1990, 19: 345-357.
- [3] 王君杰. 多点多维地震动随机模型及结构的反应谱分析[D]. 哈尔滨:国家地震局工程力学研究所,1992.
- [4] Berrah M, Kausel E. A modal combination rule for spatially varying seismic motions[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1993, 22(9): 791-800.
- [5] Chin-Hsiung L, Bao-Ding K. An efficient analysis of structural response for multiple-support seismic excitations[J]. Engineering Structures, 1995, 17(1):15-26.
- [6] Kahan M, Gibert R. Influence of seismic waves spatial variability on bridges: a sensitivity analysis[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1996, 25(8): 795-814.
- [7] 李杰,李建华. 多点地震激励下结构随机地震反应分析的反应谱方法[J]. 地震工程与工程振动,2004,24(3):21-29.
Li Jie, Li Jianhua. A response spectrum method for random vibration analysis of structures under multi-support excitation [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2004, 24(3): 21-29. (in Chinese)
- [8] 叶继红,孙建梅. 多点激励反应谱法的理论研究[J]. 应用力学学报,2007,24(1): 47-53.
Ye Jihong, Sun Jianmei. Response spectrum method for multi-support seismic excitation[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2007, 24(1): 47-53. (in Chinese)
- [9] 苏亮,董石麟. 水平波效应下周边支承大跨度单层球面网壳的地震反应[J]. 空间结构,2006,12(3):24-30.
Su Liang, Dong Shilin. Seismic response of a large span single layer reticular dome with surrounding columns considering horizontal wave passage effect[J]. Spatial Structure, 2006, 12(3): 24-30. (in Chinese)
- [10] Annil K C. 结构动力学理论及其在地震工程中的应用[M]. 谢礼立,吕大刚,译. 2版. 北京:科学出版社,2010:10.



第一作者简介:柳国环,男,1980年6月生,副教授。主要研究方向为土木工程、水利工程。曾发表《求解结构地震响应位移输入模型存在的问题及其AMCE实效对策》(《计算力学学报》2009年第26卷第6期)等论文。
E-mail:liugh@tju.edu.cn