

宽带随机载荷下的疲劳寿命统一模型*

张立军

(辽宁工业大学汽车与交通工程学院 锦州, 121001)

摘要 针对宽带随机载荷下的疲劳寿命预测精度不足的问题, 提出以变参数 Weibull 模型描述载荷峰值概率密度, 而非以修正概率密度的误差函数的方式对疲劳寿命进行预测。首先, 给出了一般宽带载荷峰值理论概率密度, 用变参数 Weibull 模型实现了概率密度由窄带 Rayleigh 分布向宽带 Gauss 分布转变, 并讨论了模型参数的范围; 然后, 根据变参数 Weibull 模型得到了疲劳寿命预测模型的解析表达; 最后, 通过实例计算了双峰宽带和连续宽带随机载荷下的疲劳寿命, 并与其他疲劳寿命预测模型进行了精度比较。分析表明, 所提出的疲劳寿命预测模型精度理论误差为 9.68%, 试验误差为 12.5%, 完全满足工程需要, 本方法与 Dirlik 方法相比应用更方便。

关键词 宽带随机载荷; 疲劳寿命; 频域分析; 变参数 Weibull 分布

中图分类号 TH114

引言

工程结构和机器零部件在随机载荷作用下的疲劳寿命分析主要有时域法和频域法。时域法由于需要进行应力循环计数, 数据处理量很大, 所以其应用受到一定的限制。基于功率谱的频域法由于其计算方便, 已广泛应用于海洋船舶、航空航天、汽车和机器制造业以及疲劳分析软件中^[1-2]。目前, 窄带随机载荷下的疲劳寿命预测频域模型已经十分成熟, 该模型是由 Rice^[3] 和 Bendat^[4] 提出的, 即窄带随机载荷的峰值和幅值概率密度都符合 Rayleigh 分布。Chaudhury-Dover 等^[5-7] 对其进行了修正发展, 并将其应用于宽带随机载荷下的疲劳寿命预测, 但预测精度较低, 模型也不统一。目前, 广泛采用的频域方法是 Dirlik 法^[8]。Dirlik 在大量雨流模拟基础上, 应用随机载荷的 4 阶矩构造了幅值概率密度函数的封闭解。Bishop^[9] 对其进行了理论论证, 并且验证了模型具有较高的精度。国内学者也对宽带随机载荷下的疲劳寿命预测进行了深入研究, 但研究方法仍然局限于对窄带随机载荷峰值概率密度中误差函数进行修正^[10]。笔者采用不同于以往的研究方法, 不是直接修正概率密度中的误差函数, 而是在分析

宽带随机载荷的理论峰值概率密度基础上, 提出峰值概率密度的变参数 Weibull 模型, 并使模型的概率密度与理论概率密度相符合, 在此基础上预测疲劳寿命。笔者的研究目的在于得到一个具有较高精度而且便于工程应用的宽带随机载荷下的疲劳寿命统一模型。

1 随机载荷的类型及峰值概率密度分布

设结构或零件的随机应力为 $S(t)$, 其功率谱密度为 $G_S(\omega)$, 则随机应力功率谱密度 $G_S(\omega)$ 的各阶矩为

$$M_i = \int_0^{\infty} \omega^i G_S(\omega) d\omega \quad (1)$$

其中: $M_0 = \sigma_S^2$; $M_2 = \sigma_S^4$; $M_4 = \sigma_S^6$ 。

在此基础上, 可得单位时间内正向穿越零值数的期望值为

$$E[n(0^+)] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M_2}{M_0}} \quad (2)$$

单位时间内峰值数的期望值为

$$E[n(p)] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M_4}{M_2}} \quad (3)$$

* 辽宁省自然科学基金资助项目(20102094)

收稿日期: 2012-12-16; 修回日期: 2013-07-20

定义载荷因子 α 为

$$\alpha = \frac{E[n(0^+)]}{E[n(p)]} = \frac{M_2}{\sqrt{M_0 M_4}} \quad (4)$$

随机载荷带宽系数 ϵ 为

$$\epsilon = \sqrt{1 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{M_0 M_4 - M_2^2}{M_0 M_4}} \quad (5)$$

当 $\alpha=1, \epsilon=0$ 时, 随机载荷为窄带过程, 其峰值分布概率密度为 Rayleigh 分布

$$f_{na}(S) = \frac{S}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right) \quad (6)$$

当 $\alpha=0, \epsilon=1$ 时, 随机载荷为理想宽带过程, 即白噪声过程, 其峰值概率密度为 Gauss 分布

$$f_{Ga}(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right) \quad (7)$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时, 随机载荷为一般宽带过程, 其峰值概率密度^[10]为

$$f_p(S) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2\epsilon}\right) + \frac{\alpha S}{2\sigma_s^2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha S}{\sqrt{2}\sigma_s\epsilon}\right)\right] \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right) \quad (8)$$

其中: $\operatorname{erf}()$ 为误差函数。

2 随机载荷下的疲劳损伤度

根据材料的 $S-N$ 曲线, 应力幅值 S 与达到疲劳破坏应力循环次数 N 之间的关系为

$$NS^m = C \quad (9)$$

其中: m 为材料常数。

根据 Palmgren-Miner 线性积累损伤理论, 在随机应力 S 作用下单位时间内损伤度为

$$D_w = \frac{E[n(p)]}{C \int_0^\infty S^m f_p(S) dS} \quad (10)$$

对于窄带过程随机载荷, 峰值分布概率密度为 Rayleigh 分布, 此时 $\alpha=1$, 因此有

$$E[n(p)] = E[n(0^+)] \quad (11)$$

将式(6)带入式(10)得

$$D_{na} = \frac{E[n(0^+)]}{C(\sqrt{2}\sigma_s)^m \Gamma(m/2 + 1)} \quad (12)$$

对于一般宽带过程, 由式(8)可知, 峰值概率密度函数中存在误差函数, 无法根据式(10)得到疲劳损伤度 D_w 的解析解, 因此限制了其工程应用。目前, 对于宽带随机载荷下的疲劳损伤都基于窄带过程进行修正, 主要方法结果见表 1。

表 1 宽带随机载荷下疲劳损伤的窄带修正

Tab. 1 Narrow band correcting of fatigue lives under wide band load

方法	修正系数
Chaudhury-Dover	$\lambda_{c.d} = \frac{\epsilon^{m+2} \Gamma(m/2 + 1/2)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(m/2 + 1)} + \frac{3}{4} \alpha$
Wirsching-Light	$\lambda_{w.l} = a + (1-a)(1-\epsilon)^b$ $a = 0.926 - 0.033m$ $b = 1.587m - 2.323$
Ortiz-Chen	$\lambda_{\alpha} = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{M_2 M_k}{M_0 M_{k+2}}}, k = 2, 0/m$
Dirlik	用 4 阶矩构造封闭解

3 基于变参数 Weibull 分布的宽带随机疲劳寿命统一模型

3.1 宽带随机载荷峰值的概率密度模型

前面分析表明, 一般宽带随机载荷的峰值分布介于窄带分布和理想宽带分布之间, 即介于 Rayleigh 分布和 Gauss 分布之间, 并由误差函数调节 Rayleigh 分布的比例。以往研究表明, 一般宽带随机载荷作用下构件的实测寿命符合特定参数的 Weibull 分布^[11], 这就给笔者一个启示: 即通过改变 Weibull 分布的形状参数实现由 Rayleigh 分布向 Gauss 分布转变, 可以十分方便地得到其疲劳损伤度和随机等效应力而无需修正。二参数 Weibull 分布如下

$$f_{weib}(S) = \frac{\beta}{\sqrt{2}\sigma_s} \left(\frac{S}{\sqrt{2}\sigma_s}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{S}{\sqrt{2}\sigma_s}\right)^\beta\right] \quad (13)$$

当 $\beta=2$ 时是窄带过程的 Rayleigh 分布; $\beta=3.5$ 时是理想宽带过程的 Gaussian 分布。这样当参数由 $\beta=2$ 向 $\beta=3.5$ 变化时就实现了概率密度函数由 Rayleigh 分布向 Gauss 分布转变。此外概率密度函数由 Rayleigh 分布向 Gauss 分布转变时, 带宽系数必须满足由 $\alpha=1$ 向 $\alpha=0$ 变化, 这样变参数 Weibull 分布才能与理论概率密度一致。

于是有

$$\frac{3.5 - 2}{1} = \frac{3.5 - \beta}{\alpha} \quad (14)$$

$$\beta = 3.5 - 1.5\alpha \quad (15)$$

$$f_{weib1}(S) = \frac{(3.5 - 1.5\alpha)}{\sqrt{2}\sigma_s} \left(\frac{S}{\sqrt{2}\sigma_s}\right)^{2.5 - 1.5\alpha} \times \exp\left[-\left(\frac{S}{\sqrt{2}\sigma_s}\right)^{3.5 - 1.5\alpha}\right] \quad (16)$$

当 $\alpha=0$ 时式(16)为非零均值的正态分布, 还需

要将均值向零点转化。因此, μ_s 应满足如下条件

$$\mu_s = \begin{cases} 2\sqrt{2}\Gamma\left[\frac{1}{3.5-1.5\alpha}+1\right]\sigma_s & (\alpha=0) \\ 0 & (\alpha=1) \end{cases} \quad (17)$$

则

$$\mu_s = 2(1-\alpha)\sqrt{2}\Gamma\left[\frac{1}{3.5-1.5\alpha}+1\right]\sigma_s \quad (18)$$

当 α 变化时, 为保证应力范围不变, 应力 σ_s 也应随 α 变化, 即满足如下条件

$$\bar{\sigma}_s = \begin{cases} 2\sqrt{2}\sigma_s & (\alpha=0) \\ \sqrt{2}\sigma_s & (\alpha=1) \end{cases} \quad (19)$$

则

$$\bar{\sigma}_s = (2-\alpha)\sqrt{2}\sigma_s \quad (20)$$

考虑式(18)和式(20)后, 式(16)可写成

$$f_{\text{Weib2}}(S) = \frac{(3.5-1.5\alpha)}{(2-\alpha)\sqrt{2}\sigma_s} \left(\frac{S+\mu_s}{(2-\alpha)\sqrt{2}\sigma_s}\right)^{2.5-1.5\alpha} \times \exp\left[-\left(\frac{S+\mu_s}{(2-\alpha)\sqrt{2}\sigma_s}\right)^{3.5-1.5\alpha}\right] \quad (21)$$

式(21)为任意带宽随机载荷峰值概率密度。图1为本研究方法 with 理论概率密度比较。从图1可以看出: 对于一般宽带随机过程(例如 $\alpha=0.65$)和理想宽带过程, 本研究方法 with 理论概率密度相比有一定精度; 对于窄带过程, 本研究方法 with Rayleigh分布基本一致, 精度较高。此外, 本研究方法得到的峰值概率密度适合于窄带过程、理想宽带过程和一般带宽的随机过程, 因此是一个统一模型。

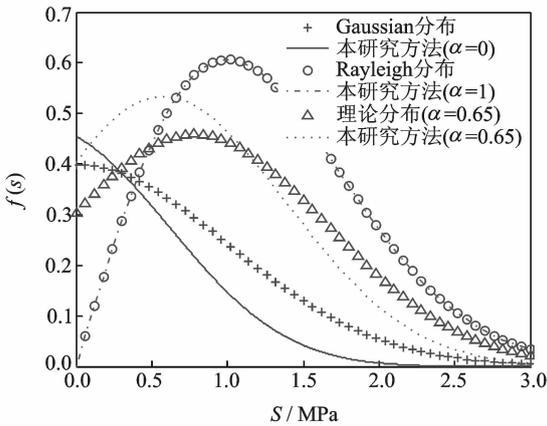


图1 峰值概率密度比较

Fig. 1 Comparison of peak probability density

3.2 宽带随机载荷下疲劳寿命统一模型

根据已经得到的宽带随机载荷峰值概率密度模型, 可进一步分析宽带随机载荷疲劳寿命模型。将式(21)带入式(10)积分得

$$D_w = E[n(p)]C^{-1}(\sqrt{2}\alpha\sigma_s)^m \{ (2-\alpha) - 2(1-\alpha)\Gamma\left[\frac{1}{3.5-1.5\alpha}+1\right] \}^m \times \Gamma\left[\frac{m}{3.5-1.5\alpha}+1\right] \quad (22)$$

式(22)为在带宽随机载荷作用下的疲劳损伤度。由式(22)可得到宽带随机疲劳损伤度与窄带随机疲劳损伤度的比值。

$$\lambda = \frac{D_w}{D_{na}} = \left\{ (2-\alpha) - 2(1-\alpha)\Gamma\left[\frac{1}{3.5-1.5\alpha}+1\right] \right\}^m \times \frac{\Gamma\left[\frac{m}{(3.5-1.5\alpha)}+1\right]}{\alpha\Gamma(m/2+1)} \quad (23)$$

由式(23)可以看出, 所得到的宽带随机载荷作用下的疲劳损伤度与窄带随机载荷作用下的疲劳损伤度的比值是解析解而非简单的修正。当给定宽带随机载荷的载荷因子 α 或带宽系数 ϵ , 宽带过程与窄带过程疲劳损伤度比值的计算结果如表2所示。

表2 宽带过程与窄带过程疲劳损伤度比值

Tab. 2 The damage degree ratio of wide band and narrow band loads

载荷因子 α	带宽系数 ϵ	损伤度比值 λ
1.0	0.000 0	1.000 0
0.9	0.435 9	0.567 7
0.8	0.600 0	0.326 1
0.7	0.714 0	0.186 6
0.6	0.800 0	0.104 9
0.5	0.866 0	0.057 0
0.4	0.916 5	0.029 7
0.3	0.953 9	0.014 5
0.2	0.979 8	0.006 6
0.1	0.995 0	0.003 0

从表2可以看出, 当载荷因子 $\alpha < 0.3$ 时, 即可认为是理想宽带过程, 因为此时带宽系数 $\epsilon > 0.95$ 。 $\alpha=0$ 时的理想宽带过程在理论上成立, 但实际上是不存在的。以理想宽带白噪声为例, 根据式(1)和式(4)得 $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{6\pi} = 0.118$ 。因此使用式(22)和式(23)时, 载荷因子下限可取 $\alpha=0.1$ 。

4 实例分析

4.1 双峰宽带过程寿命估计

有一 SAE1008 热轧钢件^[12], 材料疲劳指数

$m=5.56$, 材料常数 $C=1.02 \times 10^{17}$ MPa, 加载载荷为双峰宽带过程, 功率谱密度如图 2 所示, 在 1 和 10 Hz 处功率谱峰值分别为 10 000, 2 500 MPa^2/Hz 。

首先计算基准疲劳寿命, 即分别以 1 和 10 Hz 载荷进行加载, 由材料的 S-N 曲线得到疲劳破坏时的次数, 再根据线性积累损伤理论得到疲劳寿命。

根据功率谱可得到两个载荷的幅值为

$$S_1 = \sqrt{2} \sigma_{S1} = \sqrt{2G(f_1) \Delta f} = \sqrt{2 \times 10\,000 \times 1} = 141.4 \text{ MPa}$$

$$S_2 = \sqrt{2} \sigma_{S2} = \sqrt{2G(f_2) \Delta f} = \sqrt{2 \times 2\,500 \times 1} = 70.7 \text{ MPa}$$

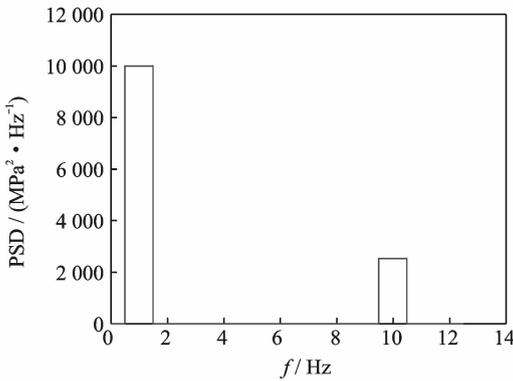


图 2 试件载荷功率谱密度

Fig. 2 Power spectrum density of component load

根据材料的 S-N 曲线可得到在两个载荷作用下的疲劳破坏次数为

$$N_1 = CS_1^{-m} = 1.02 \times 10^{17} \times 141.4^{-5.56} = 1.13 \times 10^5$$

$$N_2 = CS_2^{-m} = 1.02 \times 10^{17} \times 70.7^{-5.56} = 5.32 \times 10^6$$

疲劳损伤度为

$$D = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = \frac{1}{1.13 \times 10^5} + \frac{10}{5.32 \times 10^6} = 1.08 \times 10^{-5}$$

于是可得基础疲劳寿命为

$$T = \frac{1}{D} = 93\,000 \text{ s}$$

表 3 为各种计算方法所得疲劳寿命比较, 是根据本例中的载荷特点, 最大应力幅值取 $\sqrt{2} \sigma_s$, 而且疲劳寿命是应用式(21)进行数值积分得到的。对于工程一般宽带高斯随机载荷, 可直接采用式(22)和式(23)计算疲劳损伤度和疲劳寿命, 可不必考虑最大应力幅值范围(符合 $3\sigma_s$ 准则)。从比较可以看出, 本研究方法所估计的疲劳寿命与基准寿命的误差为 9.68%, Dirlik 方法与基准寿命的误差为

16.13%。由此可以看出, 本研究方法和 Dirlik 方法都具有较高的估计精度, 而其他方法估计精度很低(数量级较大, 不适合用百分比表示)。

表 3 各种方法计算结果比较

Tab. 3 Comparison of various kinds of computing methods

方法	疲劳寿命/s	与窄带损伤度比值
Chaudhury-Dover	6 095	0.475 6
Wirsching-Light	3 900	0.743 0
Ortiz-Chen	6 710	0.432 0
Dirlik	78 082	0.037 1
本研究方法 (数值积分)	102 210	0.028 4
基准寿命/s	93 000	0.031 2

4.2 连续宽带过程寿命估计与测试结果比较

根据文献[13], 试验材料为 LY12CZ 铝合金, 材料参数经换算得 $m=2.94, C=2.44 \times 10^{10}$ MPa。载荷为连续宽带过程, 其中载荷因子 $\alpha=0.479 6$, 应力 $\sigma_s=56.55$ MPa。根据式(22)得疲劳损伤度为

$$D_w = E[n(p)]C^{-1}(\sqrt{2}\alpha\sigma_s)^m \left\{ (2-\alpha) - \right.$$

$$\left. 2(1-\alpha)\Gamma\left[\frac{1}{3.5-1.5\alpha}+1\right] \right\}^m \times$$

$$\Gamma\left[\frac{m}{3.5-1.5\alpha}+1\right] = 7.93 \times 10^{-6}$$

于是疲劳寿命为

$$T_w = \frac{1}{D_w} = 1.26 \times 10^5 \text{ s}$$

文献[13]在 MTS810 试验机上所得疲劳寿命为 1.12×10^5 s, 因此本研究方法的误差为 12.5%, 满足工程需要^[14-15]。

5 结 论

1) 通过分析一般宽带随机载荷的峰值概率密度的变化规律, 建立了变参数 Weibull 峰值概率密度模型, 该模型既适用于一般宽带过程, 也适合于窄带和理想宽带过程, 因此属于统一模型。

2) 实例分析表明, 用本研究方法进行一般宽带随机疲劳寿命预测, 理论误差为 9.68%, 试验误差为 12.5%, 完全满足工程需要, 此外本方法与 Dirlik 方法相比应用更加方便。

3) 本研究无需修正,解决了疲劳寿命分析中误差函数 $\text{erf}(x)$ 的处理困难问题。

参 考 文 献

- [1] Andrew H, 林晓斌. 基于功率谱密度信号的疲劳寿命分析[J]. 中国机械工程, 1998, 9(11): 16-19.
Andrew H, Lin Xiaobin. A frequency domain approach for fatigue life estimation[J]. China Mechanical Engineering, 1998, 9(11): 16-19. (in Chinese)
- [2] 王明珠. 结构振动疲劳寿命分析方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.
- [3] Rice S O. Mathematical analysis of random noise[J]. Bell System Technical Journal, 1944(23): 282-332.
- [4] Bendat J S. Probability functions for random responses [R]. USA: NASA Report on Contract NAS-5-4590, 1964.
- [5] Chaudhury G K, Dover W D. Fatigue analysis of offshore platform subject to sea wave loadings[J]. International Journal of Fatigue, 1985(7): 13-19.
- [6] Wirsching P H. Fatigue under wide band random stress[J]. Journal of the Structural Division, 1980, 106: 1593-1606.
- [7] Ortiz K, Chen N K. Fatigue damage prediction for stationary wide-band stress[C]// Presented at 5th International Conference on the Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering. Vancouver, Canada: [s. n.], 1987.
- [8] Dirlik T. Application of computers in fatigue analysis [D]. Coventry: University of Warwick, 1985.
- [9] Bishop N W M. The use of frequency domain parameters to predict structural fatigue[D]. UK: University of Warwick, 1988.
- [10] 伍义生. 窄带和宽带随机载荷下的疲劳寿命估算[J]. 固体力学学报, 1992, 13(4): 322-329.
Wu Yisheng. Fatigue life estimation under narrow band and broad band random loading[J]. ACTA Mechanical Solid Sinica, 1992, 13(4): 322-329. (in Chinese)
- [11] 王启, 王文博. 常用机械零部件可靠性设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996: 30-34.
- [12] 李永利, 卓帕恩, 理查德·伯·哈撒韦. 疲劳试验测试分析理论与实践[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011: 300-308.
- [13] 伍义生. LY 1 2 C Z 铝合金缺口试件在谱载下的疲劳[J]. 机械强度, 1992, 14(3): 33-37.
Wu Yisheng. Fatigue of LY12CZ notched specimen under spectrum loading [J]. Journal of Mechanical Strength, 1992, 14(3): 33-37. (in Chinese)
- [14] 沙云东, 张振. 基于联合概率密度的随机声疲劳寿命估算方法[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32(S1): 32-36.
Sha Yundong, Zhang Zhen. Estimation method for random sonic fatigue life based on joint probability density[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(S1): 32-36. (in Chinese)
- [15] Petrucci G, Zuccarello B. Fatigue life prediction under wide band random loading[J]. Fatigue Fracture Engineering Material Structural, 2004, 24: 1183-1195.



作者简介: 张立军, 男, 1963年10月生, 博士、教授。主要研究方向为辆系统动力学、车辆测试技术与诊断。曾发表《车辆非平稳行驶状态下的半主动悬架控制》(《振动与冲击》2010年第6期)等论文。

E-mail: Lgzlj2008@sohu.com

