

压电复合悬臂梁非线性模型及求解*

卢全国¹, 曹清华^{2,1}, 唐刚¹

(1. 南昌工程学院微纳驱动与控制研究所 南昌, 330099) (2. 武汉理工大学智能制造与控制研究所 武汉, 430063)

摘要 基于功能材料的复合悬臂梁涉及多物理场耦合, 其本构关系的非线性影响悬臂梁的输出及控制精度, 采用 Helmholtz-Gibbs 自由能关系建立压电材料的非线性本构模型。基于 Boltzmann 原理, 该模型的内核函数由热能和 Gibbs 能量平衡决定。将模型与悬臂梁结构进行耦合, 利用边界和初始条件导出压电复合悬臂梁的强解形式, 并对强解进行弱化, 采用 Galerkin 法对弱解进行离散化, 利用三次 B 样条函数得到悬臂梁的数值解。研究结果表明, 与已有文献的实验进行比较, 所建立的压电材料非线性本构模型能够较好地预测复合悬臂梁的行为。

关键词 压电复合悬臂梁; 自由能模型; Boltzmann 原理; 三次 B 样条

中图分类号 TH142.2

引言

复合悬臂梁是将功能材料(压电材料^[1]、磁致伸缩材料等)与悬臂梁结构进行复合而成的一种智能型器件, 是精密位移驱动和控制中的一类基础结构, 其模型涉及智能材料的本征非线性与悬臂梁机械模型的耦合。

目前, 关于功能材料本征非线性模型的研究主要集中在其形变与电场、磁场、应力场之间的依赖关系上, 主要模型有 Preisach 模型、Jiles-Atherton 模型等。Preisach 模型通过对多个连续的基本磁滞环单元累积确定输出^[2], 是一种基于积分计算的纯数学工具, 无法描述磁致伸缩行为与外部热力场及应力场的关系。另外, 该模型需要识别大量非物理参数, 执行时间长。Jiles-Atherton 磁滞模型是一种基于铁磁材料畴壁理论建立起来的磁滞模型^[3], 将材料的极化(磁化)过程分为可逆与不可逆两部分, 然后求和得到材料的总体极化(磁化)曲线, 但是在复杂的条件下不能准确地重复磁滞曲线过程和处理小滞环。Smith 等^[4]运用 Helmholtz-Gibbs 自由能关系提出一种迟滞模型, 它考虑实际材料的非均质性及内部有效场的非恒定性, 采用随机分布函数, 导出有关电场(磁场)强度与局部极化(磁化)强度的迟滞关系模型。

笔者以压电复合悬臂梁为对象, 运用自由能模型, 采用 Helmholtz-Gibbs 自由能关系, 结合 Boltzmann 统计学分布理论, 模拟极化强度和电场强度的迟滞模型, 推导出压电材料的非线性本构关系。然后, 将此关系与机械悬臂梁结构进行耦合, 通过边界条件得出复合悬臂梁的强解形式, 并使用权重函数对强解进行弱化, 采用 Galerkin 法对弱解进行离散化, 利用三次 B 样条函数求出离散化的复合悬臂梁数值解。

1 压电材料的自由能模型

1.1 压电陶瓷材料的局部本构关系

根据文献[5], Helmholtz 能量表达式如下

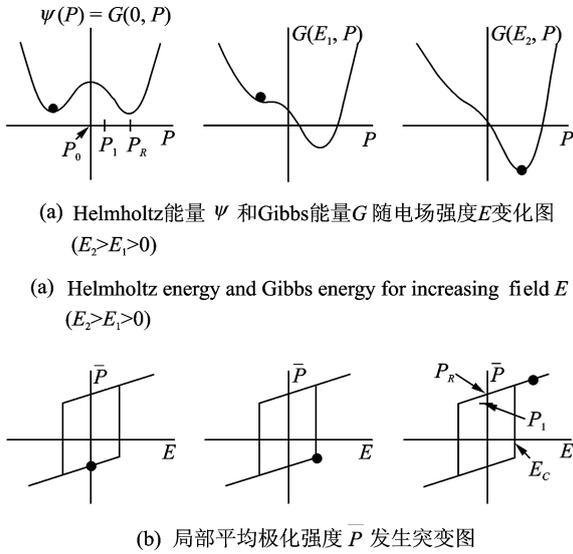
$$\psi(P) = \begin{cases} \frac{1}{2} \eta (P + P_R)^2 & (P \leq -P_I) \\ \frac{1}{2} \eta (P - P_R)^2 & (P \geq P_I) \\ \frac{1}{2} \eta (P_I - P_R) \left(\frac{P^2}{P_I} - P_R \right) & (|P| < P_I) \end{cases} \quad (1)$$

其中: P 为极化强度。

如图 1 所示, 图 1(a) 为 Helmholtz 能量 ψ 和 Gibbs 能量 G 随电场强度 E 变化图 ($E_2 > E_1 > 0$), 图 1(b) 为局部平均极化强度 \bar{P} 发生突变图 ($E >$

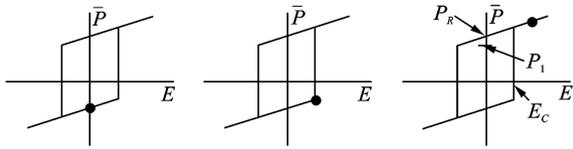
* 国家自然科学基金资助项目(51165035, 51175395); 江西省青年科学基金资助项目(20114BAB216006); 江西省青年科学家培养对象计划资助项目(20112BCB23025)
收稿日期: 2013-06-06; 修回日期: 2013-09-05

E_c), P_l 为稳定区域与不稳定区域的正拐点, P_R 为 Helmholtz 能量 ψ 局部最小时的极化值且大于 0, η 为图 1(b) 中发生突变后 P - E 关系斜率的倒数。



(a) Helmholtz 能量 ψ 和 Gibbs 能量 G 随电场强度 E 变化图 ($E_2 > E_1 > 0$)

(a) Helmholtz energy and Gibbs energy for increasing field E ($E_2 > E_1 > 0$)



(b) 局部平均极化强度 \bar{P} 发生突变图

(b) Dependence of the local average magnetization on the field

图 1 能量 (ψ, G) 和极化强度与电场强度的关系

Fig. 1 The relationship between energy and polarization and electric field

当应力 $\sigma=0$ 时的 Gibbs 能量最小关系为

$$G(E, P) = \psi(P) - EP \quad (2)$$

其中: EP 为此时的静电能。

1.2 考虑 Boltzmann 原理的极化内核

当考虑热弛豫时, 量化 \bar{P} 可以采用 Boltzmann 统计方程, 它平衡了 Gibbs 能量和相关的热能 kT/V , 取得一个能级 G 的概率密度的具体表达式

$$\mu(G) = Ce^{-\frac{G}{kT}} \quad (3)$$

其中: k 为 Boltzmann 常量; C 为所有可能取向偶极子的概率密度常量。

根据文献[6]描述, 负的和正的偶极子取向分别表示为 N_- 和 N_+ , 相应的偶极子分数可以表示为 $x_- = N_-/N$, $x_+ = N_+/N$, 其相应关系为

$$x_- + x_+ = 1 \quad (4)$$

即 $N_- + N_+ = N$ 。同时平均的极化值和正负偶极子有关, 通过 $[P_+]$ 和 $[P_-]$ 来表示。从负偶极子切换到正偶极子的概率通过 p_{+-} 来表示, 反过来通过 p_{-+} 来表示。为了描述方程 (3), 假设 $E > 0$ 和 $G(P_{\min}^+) < G(P_{\min}^-) \leq G(P_0)$, 这里 P_0 是指如图 1 所示 G 的不稳定平衡状态, 相应的最小值为

$$\begin{aligned} P_{\min}^- (E) &= E/\eta - P_R \\ P_{\min}^+ (E) &= E/\eta + P_R \end{aligned} \quad (5)$$

从式(1)可以看出, 对 $P < P_l$ 来说, Boltzmann 的概率密度函数可以表示为

$$\begin{aligned} \mu(G(E, P)) &= Ce^{-G(E, P)/kT} = \\ &= \frac{e^{-[\frac{1}{2}\eta(P+P_R)^2 - EP]/kT}}{\int_{-\infty}^{-P_l} e^{-[\frac{1}{2}\eta(P+P_R)^2 - EP]/kT} dP} = \\ &= \frac{e^{-\langle P-P_{\min}^- \rangle^2 \eta V/2kT}}{\int_{-\infty}^{-P_l} e^{-\langle P-P_{\min}^- \rangle^2 \eta V/2kT} dP} = \\ &= \bar{C}(T, \beta) e^{-\langle P-P_{\min}^- \rangle^2 / 2\beta^2} \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} \beta = \sqrt{kT/\eta V} \\ \bar{C}(T, \beta) = \left[\int_{-\infty}^{-P_l} e^{-\langle P-P_{\min}^- \rangle^2 \eta V/2kT} dP \right]^{-1} \end{cases} \quad (7)$$

同理, 当 $P > P_l$ 时

$$\mu(G(E, P)) = \frac{e^{-\langle P-P_{\min}^+ \rangle^2 \eta V/2kT}}{\int_{-P_l}^{\infty} e^{-\langle P-P_{\min}^+ \rangle^2 \eta V/2kT} dP} \quad (8)$$

对分段二次 Helmholtz 函数 ψ 来说, 式(6)和式(8)阐明了 Boltzmann 密度的高斯分布行为, 式(7)阐明 β^2 和相关的热能 kT/V 成比例, 从物理学角度解释为较低的热能暗含更少的偶极子达到了克服能量位垒所需要的能量。

对一个统一的晶格来说, 局部的平均磁化^[7]为

$$\bar{P} = x_+ \langle P_+ \rangle + x_- \langle P_- \rangle \quad (9)$$

偶极子分数的变化通过微分方程做如下量化

$$\begin{cases} dx_+ / dt = -p_{+-} x_+ + p_{-+} x_- \\ dx_- / dt = -p_{-+} x_- + p_{+-} x_+ \end{cases} \quad (10)$$

所期望的极化值可以通过乘积 $P\mu(G(P))$ 获得, 其关系如下

$$\langle P_+ \rangle = \int_{P_0}^{\infty} P\mu(G) dP$$

$$\langle P_- \rangle = \int_{-\infty}^{P_0} P\mu(G) dP$$

为了能够具体进行计算, 不稳定平衡 P_0 常常被正的和负的拐点取代, 方程如下

$$\begin{cases} \langle P_+ \rangle = \frac{\int_{P_l}^{\infty} P e^{-G(E, P)/kT} dP}{\int_{P_l}^{\infty} e^{-G(E, P)/kT} dP} \\ \langle P_- \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{-P_l} P e^{-G(E, P)/kT} dP}{\int_{-\infty}^{-P_l} e^{-G(E, P)/kT} dP} \end{cases} \quad (11)$$

式(11)的分母是式(3)中 C 的估计, 即当评估完所有的允许状态时, 保证积分是一个统一的整体, 通过限制被积函数成为一个分段函数, 这样就简化了整个积分。当考虑力 $\partial G/\partial P$ 时, 最大恢复力发生在 P_I 和 $-P_I$ 。

当获得足够的能量时, 偶极子从正方向向负方向突变的概率和相反情况下的概率为

$$\left\{ \begin{aligned} p_{+-} &= \frac{1}{\tau(T)} \frac{\int_{P_I-\epsilon}^{P_I} e^{-G\langle E, P \rangle / kT} dP}{\int_{P_I-\epsilon}^{\infty} e^{-G\langle E, P \rangle / kT} dP} \\ p_{-+} &= \frac{1}{\tau(T)} \frac{\int_{-P_I}^{-P_I+\epsilon} e^{-G\langle E, P \rangle / kT} dP}{\int_{-\infty}^{-P_I+\epsilon} e^{-G\langle E, P \rangle / kT} dP} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

式(12)中, ϵ 为一个很小的正数常量, 积分的商是一个概率, 弛豫的时间 τ 是偶极子试着突变频率的倒数, 这里 τ^2 与相关的热能成反比, 即 $\tau(T) = \tau_1 \sqrt{V/kT}$, 因此提高温度会导致热弛豫行为的提高。

1.3 宏观极化模型

首先, 由于材料或应力的非均匀性, 杂质、晶粒边界、各向异性等整合晶格变化会导致 Helmholtz 或 Gibbs 能量发生变化, 为结合这些变化, 考虑局部矫顽场为 $E_c = \eta(P_R - P_I)$, 它表明是一个函数分布而不是常量, 由 ν_1 表示相关的密度。

其次, 在晶格中考虑有效场的变化^[8-9], 应用外部电场 E 由于相邻的偶极子的机电相互作用产生一个电场 E_I 而倍增, 当微电能量分析能够量化这些机制时, 假设有效场 $E_e = E + E_I$, 它是关于应用外部电场的潜在密度 ν_2 的分布, 为了保证集成的分段线性内核服从于有限极化值, 设一个可供选择的密度 ν_1 和 ν_2 为

$$\left\{ \begin{aligned} \nu_1(E_c) &= c_1 e^{-[\ln \langle E_c / \bar{E}_c \rangle / 2c]^2} \\ \nu_2(E_I) &= c_2 e^{-E_I^2 / 2b^2} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

因此, 极化模型为

$$\begin{aligned} |P(E)| (t) &= \\ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \nu_1(E_c) \nu_2(E_I) \bar{P}(E + E_I, E_c, \xi) (t) dE_c \end{aligned} \quad (14)$$

1.4 机电耦合本构关系

结合弹性效应和机电耦合关系的 Gibbs 能量关系为

$$\begin{aligned} G(E, \sigma, P, \epsilon) &= \psi(P) + \frac{1}{2} E_y \epsilon^2 - \\ &\alpha_1 \epsilon P - \alpha_2 \epsilon P^2 - EP - \sigma \epsilon \end{aligned} \quad (15)$$

其中: 方程右边前 4 项为 Helmholtz 能量; 最后一项 $\sigma \epsilon$ 为弹性能; E_y 为材料的弹性模量; α_1 和 α_2 为铁弹性耦合系数。

为了获得弹性本构关系, 由平衡条件 $\partial G/\partial \epsilon = 0$ 可得

$$\sigma = E_y \epsilon - \alpha_1 P - \alpha_2 P^2 \quad (16)$$

当 $P=0$ 时, 式(16)就简化成胡克定律。为了考虑材料的内部阻尼, 假设 $P=0$ 时应力和应变服从开尔文-沃伊特阻尼假设, 即是线性关系, 则本构关系为

$$\sigma = E_y \epsilon - c_D \dot{\epsilon} - \alpha_1 P - \alpha_2 P^2 \quad (17)$$

即式(17)和式(14)构成了材料的非线性本构关系。

由式(14)可得到如图 2 所示的极化强度与电场强度的关系, 它提供了大范围对称性和偏置次滞环行为的能力。从图 3 显示的极化强度中可以看出, 误差能通过 dP 的限制在某些区域进行高效率的线性化。

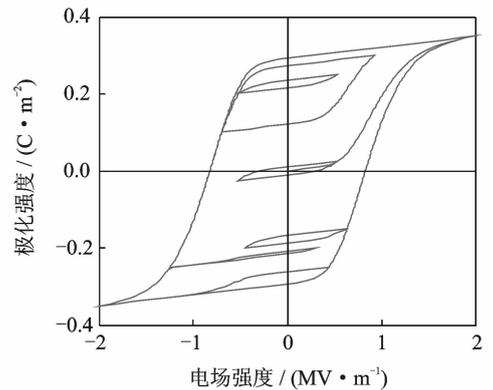


图 2 极化强度与电场强度的关系

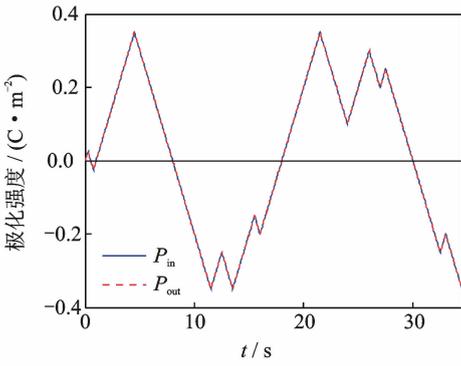
Fig. 2 The relationship between polarization and electric field

2 压电复合悬臂梁的动力学模型

悬臂梁结构如图 4 所示, 其宽度为 b , 长度为 L , 压电层的厚度为 h_a , 基底的厚度为 h_p , Z_n 表示中性层, 设压电层和基底接触面 $z=0$ 。

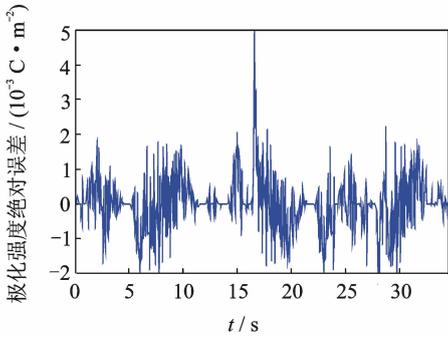
结合非线性方程(17)并假设偏置极化为 P_R , 则复合悬臂梁的应力关系如下

$$\sigma = \begin{cases} E_{ya} \epsilon - c_{Da} \dot{\epsilon} - \alpha_1 (P - P_R) - \alpha_2 (P - P_R)^2 & \text{(压电层)} \\ E_{yp} \epsilon + c_{Dp} \dot{\epsilon} & \text{(基底层)} \end{cases} \quad (18)$$



(a) P_{in} 和 P_{out} 之间的比较

(a) Comparison between P_{in} and P_{out}



(b) 完全可逆过程中的绝对误差

(b) Absolute error for complete inversion process

图3 极化强度的误差

Fig. 3 The polarization error

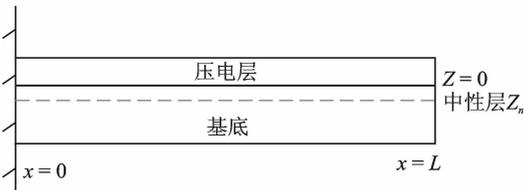


图4 压电复合悬臂梁结构示意图

Fig. 4 The structure diagram of piezoelectric composite cantilever beam

整体力矩表达式为

$$M = \int_{-h_p}^{h_a} b(z - z_n) \sigma dz \quad (19)$$

假设梁是平面应变, 则 $\epsilon(z) = m(z - z_n)$, 其中

m 为中性面的曲率, 根据力平衡方程得

$$\int_{-h_i}^0 mbE_{yp}(z - z_n) dz + \int_0^{h_a} mbE_{ya}(z - z_n) dz = 0$$

进而中性面的表达式为

$$z_n = \frac{E_{ya}h_a^2 - E_{yp}h_p^2}{2(E_{ya}h_a + E_{yp}h_p)} \quad (20)$$

式(18)和式(19)的另外一种形式为 $\sigma = \sigma_e + \sigma_d + \sigma_{ext}$, 其中: $\sigma_e, \sigma_d, \sigma_{ext}$ 分别为弹性应力、阻尼应力和外部应力。同理 $M = M_e + M_d + M_{ext}$, 其中: $M_e,$

M_d, M_{ext} 分别为弹性力矩、阻力力矩和外部力矩。

设悬臂梁有一个等效弹性模量 E_y , 根据力矩平衡方程

$$\int_{-h_p}^{h_a} bE_y(z - z_n)^2 dz = 0$$

则

$$E_y = \frac{E_{yp}[(h_p + z_n)^3 - z_n^3] + E_{ya}[(h_a - z_n)^3 + z_n^3]}{(h_p + z_n)^3 + (h_a - z_n)^3} \quad (21)$$

对于薄梁来说, $m = -\partial^2 \omega / \partial x^2$, 则弹性力矩表达式为

$$M_e = -\int_{-h_p}^{h_a} bE_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} (z - z_n)^2 dz = -YI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (22)$$

其中: $I = \frac{b}{3} [(h_a - z_n)^3 + (h_p + z_n)^3]$ 。

相似的分析同样适用于阻尼力矩 M_d

$$M_d = -cI \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial t} \quad (23)$$

式(23)中的阻尼耦合系数 c 无法获得, 因此, cI 可以通过拟合方法进行求解。

外部力矩为

$$M_{ext} = -\int_0^{h_a} bE_{ya}(z - z_n) [\alpha_1(P - P_R) + \alpha_2(P - P_R)^2] dz = -\frac{1}{2}b[(h_a - z_n)^2 - z_n^2] \times [\alpha_1(P - P_R) + \alpha_2(P - P_R)^2] \quad (24)$$

在 $x=0$ 处为固定端, 其边界条件为 $\omega(t, 0) =$

$\frac{\partial \omega}{\partial x}(t, 0) = 0$; 在 $x=L$ 处为自由端, 其边界条件为

$$M(t, L) = \frac{\partial M}{\partial x}(t, L) = 0。$$

初始位移和速度定义如下

$$\omega(0, x) = \omega_0(x)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(0, x) = \omega_1(x)$$

设梁符合欧拉-贝努力梁假设: a. 变形前垂直梁中心线的平剖面, 变形后仍然为平面(刚性横截面假定); b. 变形后横截面的平面仍与变形后的轴线相垂直, 则其强结构形式为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = f(t, x) \\ \omega(t, 0) = \frac{\partial \omega}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ M(t, L) = \frac{\partial M}{\partial x}(t, L) = 0 \\ \omega(0, x) = \omega_0(x) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t}(0, x) = \omega_1(x) \end{cases} \quad (25)$$

其中: $\rho = h_a b \rho_a + h_p b \rho_p$ 。

3 弱解及其离散化的数值解

为对式(25)进行离散化求解,定义空间

$$V = H_0^2(0, L) = \{\varphi \in H_0^2(0, L) \mid \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\} \quad (26)$$

方程两端乘以权重函数 φ , 方程的弱解形式为

$$\int_0^L \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \varphi dx + \int_0^L \gamma \frac{\partial \omega}{\partial t} \varphi dx + \int_0^L E_y I \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} dx + \int_0^L c I \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial t} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} dx = \int_0^L f \varphi dx + [\alpha_1 (P - P_R) + \alpha_2 (P - P_R)^2] \int_0^L \frac{d^2 \varphi}{dx^2} dx \quad (27)$$

利用三次 B 样条对式(27)进行离散化, 将复合悬臂梁分成 N 个单元, 则 $x_j = jh$ 。其中 $h = L/N$, $j = 0, 1, \dots, N$, 当 $j = -1, 0, \dots, N+1$ 时, 其三次 B 样条定义如下

$$\hat{\varphi}_j(x) = \begin{cases} (x - x_{j-2})^3 & (x \in [x_{j-2}, x_{j-1})) \\ h^3 + 3h^2(x - x_{j-1}) + 3h(x - x_{j-1})^2 - 3(x - x_{j-1})^3 & (x \in [x_{j-1}, x_j)) \\ \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{j+1} - x) + 3h(x_{j+1} - x)^2 - 3(x_{j+1} - x)^3] & (x \in [x_j, x_{j+1})) \\ (x_{j+2} - x)^3 & (x \in [x_{j+1}, x_{j+2})) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (28)$$

为了适应边界条件 $\omega(t, 0) = \frac{\partial \omega}{\partial x}(t, 0) = 0$ 和相应的限制 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, 设基函数 $\{\varphi_j\}$ 为

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \hat{\varphi}_0(x) - 2\hat{\varphi}_{-1}(x) - 2\hat{\varphi}_1(x) & (j = 1) \\ \hat{\varphi}_j(x) & (j = 2, 3, \dots, N+1) \end{cases} \quad (29)$$

由于 $\varphi_1 \in V$ 的修改, 在近似空间 $H^N(0, L) = \text{span}\{\varphi_j\}$ 满足在固定端 $x = 0$, 故其近似采用 Galerkin 法展开, 可以表示为

$$\omega^N(t, x) = \sum_{j=1}^{N+1} \omega_j(t) \varphi_j(x) \quad (30)$$

为了得到式(27)的离散解, 将其映射到空间 $H^N(0, L) \subset V = H_0^2(0, L)$, 得如下向量系统

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{f} + \mathbf{b} [\alpha_1 (P - P_R) + \alpha_2 (P - P_R)^2] \quad (31)$$

其中: $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_{N+1}(t)]^T$;

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_0^L \rho \varphi_i \varphi_j dx; \quad \mathbf{Q}_{ij} = \int_0^L [\gamma \varphi_i \varphi_j + c I \varphi_i'' \varphi_j] dx;$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_0^L E_y I \varphi_i'' \varphi_j'' dx; \quad \mathbf{f}_i = \int_0^L f \varphi_i dx; \quad [\mathbf{b}]_i = \int_0^L \varphi_i'' dx.$$

4 数值算例

以文献[10]所提供的压电悬臂梁为研究对象, 其参数如表 1 所示。

表 1 复合悬臂梁的基本参数

Tab. 1 The parameters of composite cantilever beam

参数/单位	模型及实验值
悬臂梁长度 L/m	0.03
悬臂梁宽度 b/m	0.013
压电主动层厚度 h_a/m	5.2×10^{-5}
基底厚度 h_p/m	1.37×10^{-4}
压电层密度 $\rho_a/(kg \cdot m^{-3})$	1.78×10^3
基底密度 $\rho_p/(kg \cdot m^{-3})$	1.3×10^3
压电层弹性模量 $E_{ya}/(N \cdot m^{-2})$	2.0×10^9
基底弹性模量 $E_{yp}/(N \cdot m^{-2})$	2.7×10^9

将参数代入式(31)中, 当输入电压的峰峰值分别为 25, 50, 75 和 100 V 时, 计算出悬臂梁自由端的位移, 并将计算结果与文献[10]所提供的实验结果进行比较, 结果如图 5 所示。

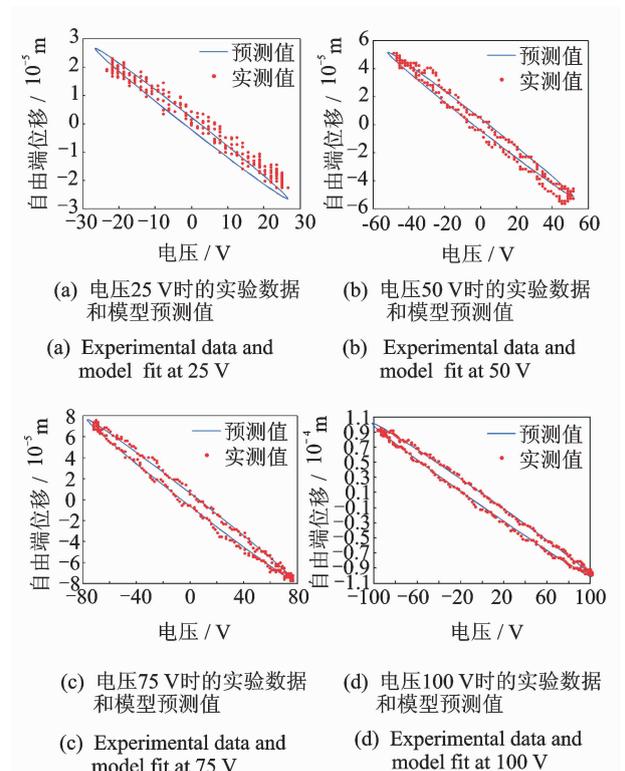


图 5 模型预测值和实验值

Fig. 5 The comparison of experimental data and model fit

从图 5 中可以看出,本研究的模型对压电复合悬臂梁的迟滞非线性行为提供了较为准确的描述,尤其是当峰峰值电压逐渐增大时,模型的预测更为准确,这说明影响能量损失的主要是结构阻尼而不是介电损耗。当对阻尼参数 cI 和刚度参数 $E_y I$ 进行数值求解时,发现阻尼系数的数量级(10^{-7})比刚度系数的数量级(10^{-5})要小的多,这可能是阻尼系数中没有考虑压电材料的黏弹性本质。

5 结 论

1) 以压电复合悬臂梁为研究对象,采用 Helmholtz-Gibbs 自由能关系,结合 Boltzmann 统计学分布原理,建立压电材料的非线性本构关系。

2) 将材料的非线性本构关系和悬臂梁进行耦合,利用边界条件和初始条件求出复合悬臂梁的强解形式,并使用权重函数对强解进行弱化,采用 Galerkin 法对弱解进行离散化,利用三次 B 样条函数求出复合悬臂梁的数值解。

3) 本研究的复合悬臂梁建模方法具有清晰的物理背景,对其他具有迟滞特性的功能材料复合悬臂梁的非线性建模亦可提供参考。

参 考 文 献

[1] 程军,季宏丽,裘进浩. 基于神经网络的压电自感知主动控制仿真试验[J]. 振动、测试与诊断, 2011, 31(3): 327-330.
Cheng Jun, Ji Hongli, Qiu Jinhao. Active vibration control using piezoelectric self-sensing actuator based on neural network[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2011, 31(3): 327-330. (in Chinese)

[2] Iyer R V, Tan Xiaobo, Krishnaprasad P S. Approximate inversion of the preisach hysteresis operator with application to control of smart actuators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(6): 798-810.

[3] Huang Wenmei, Wang Bowen, Cao Shuying, et al. Dynamic strain model with eddy current effects for giant magnetostrictive transducer [J]. IEEE Transac-

tions on Magnetics, 2007, 43(4): 1381-1384.

[4] Smith R, Dapino M J, Braun T R, et al. A homogenized energy framework for ferromagnetic hysteresis [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42(7): 1747-1769.

[5] Hu Zhengzheng, Smith R C, Hays M, et al. Statistical parameter estimation and uncertainty quantification for macro fiber composite actuators operating in nonlinear and hysteretic regimes[C]// Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando, FL; IEEE, 2011; 2764-2769.

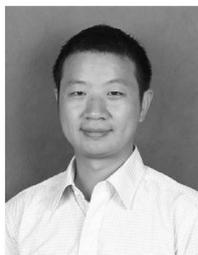
[6] Ernstberger J M, Smith R C. Efficient parameter estimation techniques for hysteresis models[C]// Behavior and Mechanics of Multifunctional Materials and Composites 2009. San Diego, California, United States: SPIE, 2009.

[7] Bilgen O, De Marqui C, Kochersberger Jr K B, et al. Macro-fiber composite actuators for flow control of a variable camber airfoil[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2011, 22(1): 81-91.

[8] Kim S J, Seelecke S. A rate-dependent three-dimensional free energy model for ferroelectric single crystals [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007(441): 1196-1209.

[9] Smith R C, Ounaies Z. A domain wall model for hysteresis in piezoelectric materials[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2000, 11(1): 62-79.

[10] Ralph C S. Smart material systems model development[M]. Philadelphia, Pennsylvania, US; Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005: 322-324.



第一作者简介:卢全国,男,1976年2月生,副教授。主要研究方向为功能材料的微纳驱动与控制。曾发表《超磁致伸缩致动器热变形影响及温控研究》(《中国机械工程》2007年第18卷第1期)等论文。

E-mail: LUQG2010@126.com

