

# 基于 Normal Form 方法的电机系统分岔控制\*

袁惠群<sup>1</sup>, 张中华<sup>1,2</sup>

(1. 东北大学理学院 沈阳, 110819) (2. 东北电力大学理学院 吉林, 132012)

**摘要** 研究了无刷直流电机系统等效非线性数学模型, 分析了系统的 Hopf 分岔行为, 并设计了 washout 滤波器, 对系统产生的分岔行为进行控制。引入直接 Normal Form(规范型)计算方法, 求出系统的 Hopf 分岔规范式。通过规范式系数讨论控制参数的选择原则以及对 Hopf 分岔类型及极限环幅值的影响。理论和仿真结果表明: 在施加控制器之前, 系统发生亚临界 Hopf 分岔, 极限环不稳定, 系统进入混沌状态; 在施加控制器之后, 当受控系统规范式系数实部小于零时, 系统发生超临界 Hopf 分岔, 原系统不稳定极限环被控制为稳定极限环, 从而抑制了混沌的产生, 保证了电机运行性能的稳定性。

**关键词** 无刷直流电机; Hopf 分岔; washout 滤波器; 规范型; 分岔控制

**中图分类号** TM331; TM271; O231. 2

## 引言

无刷直流电动机系统是集永磁同步电机、位置检测元件和驱动控制电路于一体的机电一体化产品, 它既具备交流电动机结构简单、运行可靠、维护方便等优点, 又具备直流电动机运行效率高、无励磁损耗等优点, 在伺服和驱动系统中得到广泛应用。但在实际运行当中, 在一定的参数条件下, 系统会出现分岔行为, 进而导致混沌运动, 表现为电流波形出现不规则的电流噪声, 电机转速忽大忽小, 随机波动, 电机运行性能不稳定等。这种混沌现象在机床, 特别是在精密机床的传动系统中是不允许出现的, 因此对直流电机系统分岔、混沌及其控制方面的研究显得尤为重要。文献[1-2]研究了无刷直流电机的分岔与混沌现象, 但没有进行这方面的控制研究。文献[3-5]在此基础上分别采用不同的方法进一步研究了无刷直流电机的混沌控制, 但没有进行分岔控制方面的研究。分岔控制的主要任务是研究分岔控制理论, 提出分岔控制的方法。对于具体的工程系统来说, 就是设计一个控制器来改变系统的非线性特性, 从而获得所需要的动力学行为。典型的分岔控制内容如下: 将原系统固有的分岔行为延迟; 设计参数值, 使之产生新的分岔或者改变平衡点的位

置; 改变原非线性系统的拓扑结构, 进而改变分岔类型; 改变原系统极限环的多样性、幅值、频率等<sup>[6-9]</sup>。笔者采用文献[5]中的电机数学模型, 分析了系统的分岔行为, 设计了 washout-filter 控制器控制系统的分岔行为, 并引入 Normal Form 计算方法, 求出系统的 Hopf 分岔规范式, 通过规范式系数讨论控制参数的选择原则及对 Hopf 分岔类型及周期解振幅的影响。

## 1 系统分岔分析

对无刷直流电机开环系统, 建立等效数学无量纲模型<sup>[5]</sup>如下

$$\begin{cases} dx_1/dt = -x_1 - x_2x_3 + \rho x_3 \\ dx_2/dt = -x_2 + x_1x_3 \\ dx_3/dt = \sigma(x_1 - x_3) \end{cases} \quad (1)$$

其中: 状态变量  $x_1, x_2, x_3$  分别为永磁电机等效的  $q$  轴电流  $i_q, d$  轴电流  $i_d$  以及转速  $\omega$ ; 参数  $\rho, \sigma$  为系统特性的正参数。

在仿真实验中, 状态变量及特性参数均为无量纲物理量。当  $\rho < 1$  时, 系统只有 1 个稳定平衡点  $O(0, 0, 0)$ ;  $\rho > 1$  时, 系统有 3 个平衡点  $O(0, 0, 0), M^+(a, a^2, a), M^-( -a, a^2, -a), a = \sqrt{\rho - 1}$ , 平衡点

\* 国家自然科学基金资助项目(51275081); 沈阳市科技攻关计划资助项目(F13-01-21-00); 辽宁省科技创新重大专项资助项目(201303004)

收稿日期: 2012-05-12; 修回日期: 2012-09-21

$O$  不稳定;当  $\rho=1$  时,系统在平衡点  $O$  发生叉形分岔。当  $1 < \rho < \sigma(\sigma+4)/(\sigma-2)$  时,系统平衡点  $M^+$  渐近稳定;当  $\rho = \rho_h = \sigma(\sigma+4)/(\sigma-2)$  时,系统平衡点  $M^+$  不稳定,且在  $M^+$  处系统发生 Hopf 分岔;当  $\rho > \sigma(\sigma+4)/(\sigma-2)$  时,系统进入混沌状态<sup>[5]</sup>。

## 2 分岔控制

选  $\sigma=4$ ,用 washout 滤波器控制的等效无刷直流电机受控系统如下

$$\begin{cases} dx_1/dt = -x_1 - x_2x_3 + \rho x_3 + w \\ dx_2/dt = -x_2 + x_1x_3 \\ dx_3/dt = 4(x_1 - x_3) \\ \dot{v} = x_1 - cv \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x_1$  为 washout 滤波器的输入变量; $c$  为滤波器时间常数。

$c > 0$  时,为稳定的 washout 滤波器; $c < 0$  时,为不稳定的 washout 滤波器。现取控制器

$$w = k(x_1 - cv)^3 \quad (3)$$

其中: $k$  为非线性控制增益。

由于 washout 滤波器不改变原系统平衡点,此时受控系统平衡点为  $(a, a^2, a, a/c)$ ,  $a = \sqrt{\rho-1}$  ( $\rho > 1$ )。将受控系统的平衡点移到原点,做变换

$$y_1 = x_1 - a, y_2 = x_2 - a^2, y_3 = x_3 - a, \tilde{v} = v - \frac{a}{c}$$

系统(2)变为

$$\dot{Y} = BY + f(Y) \quad (4)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{\rho-1} & 1 & 0 \\ \sqrt{\rho-1} & -1 & \sqrt{\rho-1} & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \tilde{v} \end{bmatrix};$$

$$f(Y) = \begin{bmatrix} -y_2y_3 + k(y_1 - c\tilde{v})^3 \\ y_1y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

取  $c=1, \rho=16$ , 则

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{15} & 1 & 0 \\ \sqrt{15} & -1 & \sqrt{15} & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$f(Y) = \begin{bmatrix} -y_2y_3 + k(y_1 - \tilde{v})^3 \\ y_1y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5b)$$

矩阵  $B$  有一对纯虚特征根  $\lambda_{1,2} = \pm 4.47214i$  以及两个负实根  $\lambda_3 = -6, \lambda_4 = -1$ 。假设  $\lambda_{1,2} = \pm 4.47214i$  对应特征向量分别为  $\varphi, \bar{\varphi}$ , 其中

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.06252 + 0.55917i \\ 0.72639 \\ 0.25007 + 0.27959i \\ 0.11610 + 0.03994i \end{bmatrix}$$

引入文献[7]中的方法,作变换

$$Y = \varphi u + \bar{\varphi} \bar{u} + \sum_{j+k \geq 2} H_{jk} u^j \bar{u}^k \quad (6)$$

即可求得方程(4)的 Hopf 分岔 Normal Form

$$\dot{u} = 4.47214iu + Cu^2\bar{u} \quad (7)$$

其中: $C = \langle \psi, F_{21} \rangle$ ;  $\psi$  满足  $(B^T - 4.47214i)\psi = 0, \langle \psi, \varphi \rangle = 1$ , 解得

$$\psi = \begin{bmatrix} -0.09521 - 0.72368i \\ 0.61458 + 0.05497i \\ -0.01431 - 0.31371i \\ 0 \end{bmatrix}$$

将非线性变换式(6)代入非线性项式(5)中整理成关于  $u, \bar{u}$  的多项式形式

$$f(Y) = \sum_{j+k \geq 2} F_{jk} u^j \bar{u}^k \quad (8)$$

其中: $F_{21}$  为  $u^2\bar{u}$  对应的系数向量。

$$F_{21} = [F_{21,1} \quad F_{21,2} \quad 0 \quad 0]^T$$

$$F_{21,1} = -(\bar{\varphi}_3 H_{20,2} + \bar{\varphi}_2 H_{20,3} + \varphi_2 H_{11,3} + \varphi_3 H_{11,2}) + 3(\varphi_1 - \varphi_4)^2 (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_4) k = 0.03751 - 0.16156k + (0.01075 + 0.46965k)i$$

$$F_{21,2} = \bar{\varphi}_3 H_{20,1} + \bar{\varphi}_1 H_{20,3} + \varphi_1 H_{11,3} + \varphi_3 H_{11,1} = -0.00039 - 0.02566i$$

$$F_{11} = \begin{bmatrix} -(\varphi_2 \bar{\varphi}_3 + \varphi_3 \bar{\varphi}_2) \\ (\varphi_1 \bar{\varphi}_3 + \bar{\varphi}_1 \varphi_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.36330 \\ 0.28141 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{20} = \begin{bmatrix} -\varphi_2 \varphi_3 \\ \varphi_1 \varphi_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18165 - 0.20309i \\ -0.17197 + 0.12235i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{11} = -B^{-1}F_{11} = \begin{bmatrix} -0.04844 \\ -0.09380 \\ -0.04844 \\ -0.04844 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$H_{20} = [2 \times 4.47214i - B]^{-1}F_{20} = \begin{bmatrix} -0.04030 + 0.02848i \\ 0.03029 + 0.03837i \\ 0.00390 + 0.01976i \\ 0.00265 + 0.00480i \end{bmatrix} \quad (10)$$

由以上各式计算 C 得

$$C = 0.005\ 38 + 0.355\ 26k + (-0.043\ 92 + 0.072\ 20k)i$$

所以,受控制系统的 Normal Form 为

$$\dot{u} = 4.472\ 14iu + [0.005\ 38 + 0.355\ 26k + (-0.043\ 92 + 0.072\ 20k)i]u^2\bar{u}$$

由 Hopf 分岔理论得到以下几点。

1) 当  $k=0$  时,  $\text{Re}\{C\}=0.005\ 38>0$ , 说明在施加 washout 控制器之前, 系统的 Hopf 分岔类型为亚临界分岔。当  $1<\rho<16$  时, 系统平衡点  $M^+$  稳定; 当  $\rho=16$  时, 系统在平衡点  $M^+$  处发生 Hopf 分岔, 并在其附近产生不稳定的极限环; 当  $\rho>16$  时, 系统平衡点  $M^+$  发散, 为不稳定的平衡点, 系统产生混沌。取  $k=0, \rho=8$ , 此时系统平衡点  $M^+$  渐近稳定, 如图 1 所示。取  $k=0, \rho=16$ , 此时系统在平衡点  $M^+$  处不稳定, 发生 Hopf 分岔且在其附近产生不稳定的极限环, 如图 2 所示。取  $k=0, \rho=25$ , 系统平衡点发散, 出现混沌行为, 如图 3 所示。

2) 当  $k<-0.015$  时,  $\text{Re}\{C\}<0$ , 说明在施加 washout 控制器之后, 系统 Hopf 分岔类型变为超临界分岔。当分岔参数  $1<\rho<16$  时, 系统有渐近稳定的平衡点; 当  $\rho\geq 16$  时, 系统平衡点不稳定且在其附近产生稳定的极限环。取  $k=-0.12, \rho=9$ , 此时系统平衡点  $M^+$  渐近稳定, 如图 4 所示。分别取  $k=-0.12, \rho=16$  和  $k=-0.35, \rho=16$ , 此时系统在平衡点  $M^+$  处发生超临界 Hopf 分岔, 且在平衡点附近

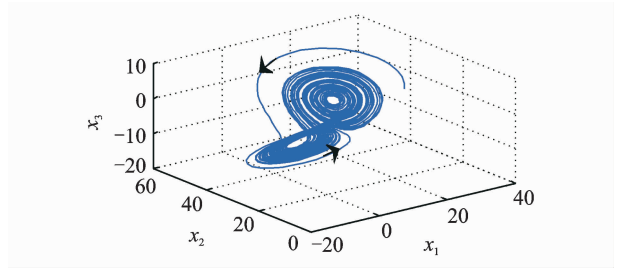


图 3  $k=0, \rho=25$  时的系统相图  
Fig. 3 Phase chart of system at  $k=0, \rho=25$

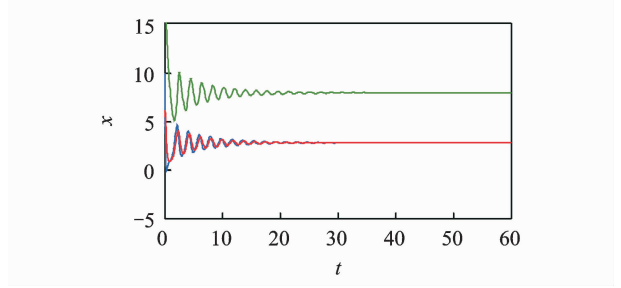


图 4  $k=-0.12, \rho=9$  时的系统时域波形图  
Fig. 4 Time-domain waveform chart of system at  $k=-0.12, \rho=9$

产生稳定的极限环, 原系统不稳定极限环被控制为稳定极限环, 如图 5~图 8 所示。说明当  $k$  满足一定的条件时, 原系统的分岔类型可以被改变, 并且从图 6 和图 8 可看出, 极限环幅值随着  $k$  的减小而减小。取  $k=-0.12, \rho=25$ , 此时系统平衡点  $M^+$  不稳定且在其附近存在稳定的极限环, 如图 9 所示。

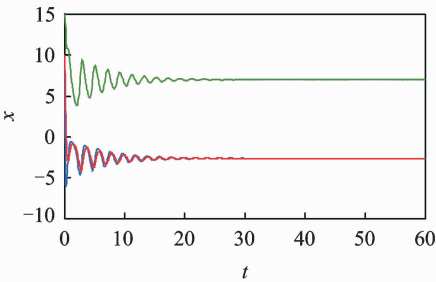


图 1  $k=0, \rho=8$  时的系统时域波形图  
Fig. 1 Time-domain waveform chart of system at  $k=0, \rho=8$

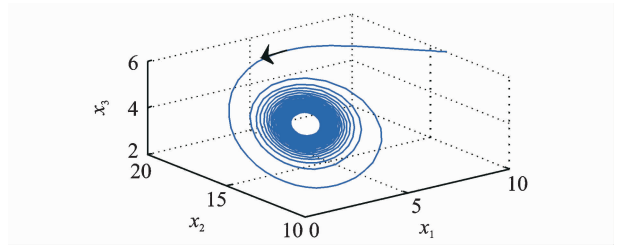


图 5  $k=-0.12, \rho=16$  时的系统相图  
Fig. 5 Phase chart of system at  $k=-0.12, \rho=16$

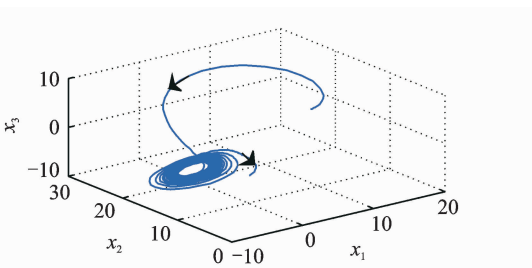


图 2  $k=0, \rho=16$  时的系统相图  
Fig. 2 Phase chart of system at  $k=0, \rho=16$

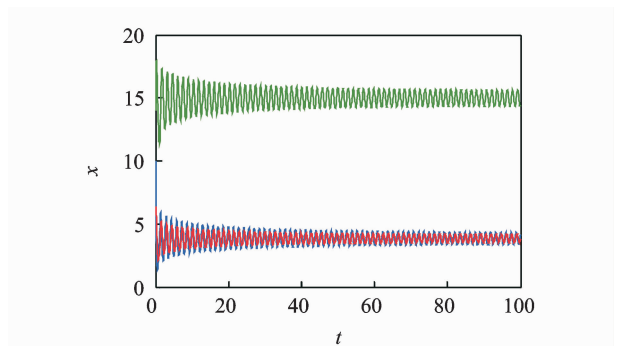
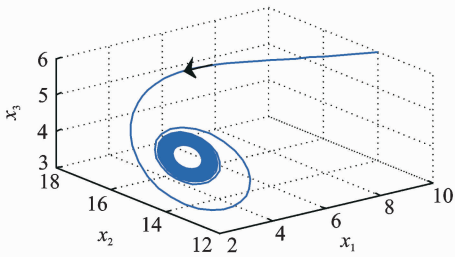
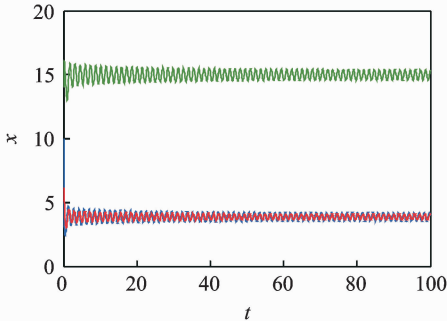
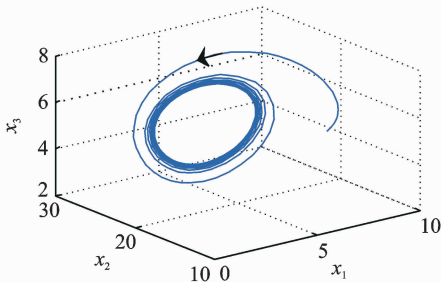


图 6  $k=-0.12, \rho=16$  时的系统时域波形图  
Fig. 6 Phase chart of system at  $k=-0.12, \rho=16$

图7  $k = -0.35, \rho = 16$  时的系统相图Fig. 7 Phase chart of system at  $k = -0.35, \rho = 16$ 图8  $k = -0.35, \rho = 16$  时的系统时域波形图Fig. 8 Phase chart of system at  $k = -0.35, \rho = 16$ 图9  $k = -0.12, \rho = 25$  时的系统相图Fig. 9 Phase chart of system at  $k = -0.12, \rho = 25$ 

### 3 结束语

分析了等效无刷直流电机数学模型的分岔行为,设计了 washout-filter 控制器进行分岔控制,并引入 Normal Form 计算方法,求出系统的 Hopf 分岔规范式。通过规范式系数讨论了控制参数  $k$  的选择原则及对 Hopf 分岔类型及极限环振幅的影响,得出当受控系统规范式系数实部小于零时,原系统不稳定极限环被控制为稳定极限环,从而抑制了混沌的产生,保证了电机运行性能的稳定性。

#### 参 考 文 献

[1] 张波,李忠,毛宗源,等. 电机传动系统的不规则运动和混沌现象初探[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(7):

40-45.

Zhang Bo, Li Zhong, Mao Zongyuan, et al. A primary study on an erratic behavior and chaotic phenomena of electric machine drive systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21(7):40-45. (in Chinese)

[2] 张波,李忠,毛宗源,等. 一类永磁同步电动机混沌模型与霍夫分叉[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(9):13-17.

Zhang Bo, Li Zhong, Mao Zongyuan, et al. The chaotic model and Hopf bifurcation of a type of permanent-magnet synchronous motor[J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21(9):13-17. (in Chinese)

[3] Mohamed Z, Ahmed O, Nejib S. Controlling chaos in the permanent magnet synchronous motor[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 41(3):1266-1276.

[4] Zhang Xizhi, Wanga Yaonan. A novel position-sensorless control method for brushless DC motors[J]. Energy Conversion and Management, 2011, 52(3):1669-1676.

[5] 王海军,李崎勇. 机床无刷直流电机的混沌状态控制仿真研究[J]. 制造业自动化, 2011, 33(3):70-73.

Wang Haijun, Li Jiyong. Simulating research on chaos system in brushless DC motor of machine[J]. Manufacturing Automation, 2011, 33(3):70-73. (in Chinese)

[6] Lan Yaoyao, Li Qingguo. Control of Hopf bifurcation in a simple plankton population model with a non-integer exponent of closure[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 200(1):220-230.

[7] 吴志强,孙立明. 基于 washout 滤波器的 Rössler 系统 Hopf 分岔控制[J]. 物理学报, 2011, 60(5):1-5.

Wu Zhiqiang, Sun Liming. Hopf bifurcation control of the Rösslersystem based on washout filter controller [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(5):1-5. (in Chinese)

[8] Denis de C B, Luis F M. Controllable Hopf bifurcations of codimension 1 and 2 in nonlinear control systems [J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(9):3046-3054.

[9] Chen Dong, Wang H O, Chen Guanrong. Anti-control of Hopf bifurcations through washout filters[C]//37th IEEE Conference on Decision and Control. Tampa: Control Theory and Application, 1998:3040-3045.



**第一作者简介:**袁惠群,男,1954年7月生,教授、博士生导师。主要研究方向为非线性动力学与控制、转子动力学与旋转机械故障诊断、机械动力学等。曾发表《航空发动机转子失谐叶片减振安装优化分析》(《振动、测试与诊断》2011年第31卷第5期)等论文。  
E-mail: yuan\_hq@163.com