第 34 卷第 6 期
2014 年 12 月
振动、测试与诊断
Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis
Vol. 34 No. 6
Dec. 2014

随机外干扰下齿轮传动系统的混沌振动分析*

王靖岳[1,2]， 王浩天[3]， 郭立新[2]
（1. 沈阳理工大学汽车与交通学院 沈阳，110159） （2. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳，110819）
（3. 沈阳航空航天大学研究生学院 沈阳，110136）

摘要 为了考察输入力矩的随机扰动对系统动力学的影响，综合考虑由扭矩波动引起的低频外激励、齿轮阻尼比、齿侧间隙、激励频率和啮合刚度的随机扰动因素，根据牛顿定律建立单对三自由度直齿齿轮传动系统的随机动力学方程。利用系统的分岔图、相图、时间历程图、Poincaré 映射图、李雅普诺夫指数和功率谱图分析齿轮传动系统在齿轮激励频率变化下的动力学特性，并分析输入力矩引起的随机外扰动对系统分岔特性的影响。数值仿真表明：随机非光滑齿轮传动系统存在着丰富的倍周期分岔现象；随着齿轮激励频率的增大，齿轮传动系统先通过周期倍化分岔从周期运动到混沌运动，再通过逆周期倍化分岔从混沌运动通向周期运动；随着输入力矩随机扰动的增大，会对系统的随机分岔区域和系统动力学特性产生本质影响。

关键词 齿轮传动系统；随机扰动；李雅普诺夫指数；周期倍化分岔；随机分岔
中图分类号 O322；TH132.41；U463.21

引 言

在实际工程领域中，系统往往受到随机因素的影响，国内外专家学者对随机非线性系统进行了深入的研究。文献[1]利用 Hertz 理论描述接触，得到了高斯白噪声激励下的具有间隙的单自由度碰撞振动系统的精确平稳解。文献[2]研究了 van der Pol-Duffing 型的非线性振子在随机干扰和随机参数联合作用下的 Hopf 分叉现象。文献[3]研究了宽带随机激励下强非线性振子的平稳响应和稳定性。文献[4]对受到随机外激励因素作用下含间隙和时变啮合刚度的齿轮系统的全局动力学特性进行了分析。文献[5]用拟不可积哈密顿系统的随机平均法研究了多自由度碰撞振动系统的随机响应。文献[6]采用时序分析法建立了轧制力的自回归滑动平均(auto-regressive and moving average，简称 ARMA)模型及轧机动态干扰功率谱密度模型，分析了轧制力的 ARMA 谱特性，采用麦夸特法＋通用全局优化算法，得出便于工程应用的轧制力功率谱表达式，构建轧制力随机干扰模型。文献[7]针对随机干扰环境下的车辆座椅悬架系统，给出鲁棒 H_∞控制器设计方法。文献[8]研究了具有滞后非线性的汽车悬架系统在路面随机激励下发生混沌运动的可能性。

笔者在文献[9]的研究基础上，考虑齿轮阻尼比、齿侧间隙、激振频率、啮合刚度和输入力矩的随机扰动，建立一个单对三自由度的直齿齿轮副的动力学模型，分析了输入力矩的随机扰动对系统动力学的影响。

1 系统的动力学模型

图 1 为采用集中质量法建立的一个单对三自由度的直齿齿轮副的动力学模型。在此模型中仅考虑齿轮的扭转振动，忽略传动轴的扭转和弯曲变形。

图 1 中：y_{g1} 和 y_{g2} 为两齿轮中心的位移；F_{b1} 和 F_{b2} 为主、从动轴上轴承对齿轮的作用力；r_{g1} 和 r_{g2} 为主、从动齿轮的基圆半径；m_{g1} 和 m_{g2} 为主、从动齿轮的质量；f_{b1} 和 f_{b2} 为主、从动轴上轴承的位移函数；c_{b1} 和 c_{b2} 为主、从动轴上轴承的阻尼系数；$c_{b1\Delta}$ 和 $c_{b2\Delta}$ 为主、从动轴上轴承的阻尼的随机扰动量；c_h 为齿轮副的啮合阻尼系数；$c_{h\Delta}$ 为齿轮副的啮合阻尼的随机扰动量；f_h 为轮齿啮合的位移函数；θ_{g1} 和 θ_{g2} 为主、从动齿轮的扭转角位移；k_{b1} 和 k_{b2} 为主、从动轴上

* 国家自然科学基金资助项目(51275082)；新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-08-0103)；辽宁省教育厅科技研究资助项目(L2012068)；沈阳理工大学机械设计及理论重点学科开放基金资助项目(4771004kfx08)
收稿日期：2012-12-09；修回日期：2013-05-31

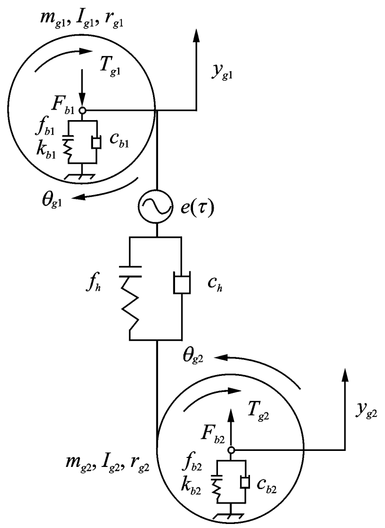


图 1 齿轮传动系统的动力学模型

Fig. 1 Dynamic model of gear transmission system

轴承的平均支撑刚度；$e(\tau)$为齿轮啮合综合误差；τ为时间；I_{g1}和I_{g2}为主、从动齿轮的转动惯量；T_{g1}和T_{g2}为作用在主、从动齿轮上的转矩。

考虑静态传递误差引起的高频内部激励和因输入扭矩波动引起的低频外激励，忽略输出扭矩的波动，则有

$$\begin{cases} T_{g1}(\tau) = T_{g1m} + T_{g1a}(\tau) \\ T_{g2}(\tau) = T_{g2m} \end{cases} \tag{1}$$

其中：$T_{g1}(\tau)$为输入扭矩；T_{g1m}为输入扭矩的平均值；$T_{g1a}(\tau)$为输入扭矩的变化部分；$T_{g2}(\tau)$为输出扭矩，T_{g2m}为输出扭矩的平均值。

对齿轮系统进行受力分析，根据牛顿定律可以得系统的动力学方程

$$\begin{cases} m_{g1}\ddot{y}_{g1} + (c_{b1} + c_{b1\Delta})\dot{y}_{g1} + (c_h + c_{h\Delta})(\dot{x} - \dot{y}_{g1} + \\ \quad \dot{y}_{g2} - \dot{e}(\tau)) + k_{b1} f_{b1}(y_{g1}) + k_h(\tau) f_h(x - y_{g1} + \\ \quad y_{g2} - e(\tau)) + F_{b1} = 0 \\ m_{g2}\ddot{y}_{g1} + (c_{b2} + c_{b2\Delta})\dot{y}_{g2} - (c_h + c_{h\Delta})(\dot{x} - \dot{y}_{g1} + \\ \quad \dot{y}_{g2} - \dot{e}(\tau)) + k_{b2} f_{b2}(y_{g2}) - k_h(\tau) f_h(x - y_{g1} - \\ \quad y_{g2} - e(\tau)) - F_{b2} = 0 \\ m_{c1}\ddot{x} - (c_h + c_{h\Delta})(\dot{x} - \dot{y}_{g1} + \dot{y}_{g2} - \dot{e}(\tau)) - \\ \quad k_h(\tau) f_h(x - y_{g1} + y_{g2} - e(\tau)) - F_m - F_{aT}(\tau) + \\ \quad F_\Delta = 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中：“·”表示对时间的导数。

令

$$\begin{aligned} & x = r_{g1}\theta_{g1} - r_{g2}\theta_{g2} \\ & F_m = T_{g1m}/r_{g1} = T_{g2m}/r_{g2} \\ & F_{aT}(\tau) = m_{c1} T_{g1a}(\tau)/2I_{g1} \\ & k_h(\tau) = k_h(\tau + 2\pi/(\omega_h + \omega_\Delta)) = \\ & \quad k_{hm} + \sum_{r=1}^{\infty} k_{har}\cos(r(\omega_h + \omega_\Delta)\tau + \varphi_{hr}) \\ & m_{c1} = I_{g1} I_{g2}/(I_{g1} r_{g2}^2 + I_{g2} r_{g1}^2) \\ & e(\tau) = e\sin(\omega_h\tau + \varphi_h) \end{aligned}$$

其中：$k_h(\tau)$为齿轮啮合刚度，随时间周期变化；F_Δ为输入力矩的随机扰动量；k_{har}为各谐波分量的系数；k_{hm}为平均啮合刚度表示为谐波分量的系数；ω_h为激励频率；ω_Δ为激励频率的随机扰动量；φ_{hr}为相位角。

令齿轮传动的相对扭转位移为

$$p = r_{g1}\theta_{g1} - r_{g2}\theta_{g2} - y_{g1} + y_{g2} - e(\tau) \tag{3}$$

齿轮副的间隙为$2b$，齿轮侧隙与受力关系如图 2所示，则无量纲间隙$\bar{b} = b/b_e$，b_e为给定的标称尺寸。定义$t = \omega_n\tau$，$\bar{y}_{g1} = y_{g1}/b_e$，$\bar{y}_{g2} = y_{g2}/b_e$，$\bar{p} = p/b_e$，$\bar{k}_{b1} = k_{b1}/b_e$，$\bar{k}_{b2} = k_{b2}/b_e$，$\bar{k}_h = k_h/b_e$，$\bar{\omega}_h = \omega_h/\omega_n$，$\bar{\omega}_t = \omega_t/\omega_n$，$\omega_n = \sqrt{k_h/m_{c1}}$，$\omega_1 = \sqrt{k_{b1}/m_{g1}}$，$\omega_2 = \sqrt{k_{b2}/m_{g2}}$。

参考文献[4]，对式(2)进行无量纲化，令$x_1 = \bar{y}_{g1}$，$x_2 = \dot{\bar{y}}_{g1}$，$x_3 = \bar{y}_{g2}$，$x_4 = \dot{\bar{y}}_{g2}$，$x_5 = \bar{p}$，$x_6 = \dot{\bar{p}}$，则得到系统的状态方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2(\xi_{11} + \xi_{11\Delta})x_2 - 2(\xi_{13} + \xi_{13\Delta})x_6 - \\ \quad k_{11}x_1 - k_{13}(t) f_h(x_5) - F'_{b1} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2(\xi_{22} + \xi_{22\Delta})x_4 + 2(\xi_{23} + \xi_{23\Delta})x_6 - \\ \quad k_{22}x_3 + k_{23}(t) f_h(x_5) + F'_{b2} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = \dot{x}_2 - \dot{x}_4 - 2(\xi_{33} + \xi_{33\Delta})x_6 - k_{33}(t) f_h(x_5) + \\ \quad F'_m + F_{ah1}(\omega'_h + \omega'_\Delta)^2\cos((\omega'_h + \omega'_\Delta)t) + F'_\Delta \end{cases} \tag{4}$$

其中：F'_{b1}和F'_{b2}为主、从动轴上轴承对齿轮的无量纲作用力；$F'_{b1} = F_{b1}/m_{g1} b_e \omega_n^2$；$F'_{b2} = F_{b2}/m_{g2} b_e \omega_n^2$；$k_{33}(t) = 1 - (\varepsilon + \varepsilon_\Delta)\cos(\omega_h t)$；$\varepsilon$为无量纲齿轮啮合刚度，$\varepsilon = k_{har}/k_{hm}$；$\varepsilon_\Delta$为无量纲齿轮啮合刚度随机扰动量；$k_{13}(t) = k_{23}(t) = k_{33}(t)/4$；无量纲阻尼比$\xi_{11} = c_{b1}/2m_{g1}\omega_n$；$\xi_{22} = c_{b2}/2m_{g2}\omega_n$；$\xi_{13} = c_h/2m_{g1}\omega_n$；$\xi_{23} = c_h/2m_{g2}\omega_n$；$\xi_{33} = c_h/2m_{c1}\omega_n$；$k_{11} = \omega_1^2/\omega_n^2$；$k_{22} = \omega_2^2/\omega_n^2$；$\xi_{11\Delta}$，$\xi_{13\Delta}$，$\xi_{22\Delta}$，$\xi_{23\Delta}$和$\xi_{33\Delta}$为无量纲阻尼比随机扰动量；$\xi_{11\Delta} = c_{b1\Delta}/2m_{g1}\omega_n$；$\xi_{22\Delta} = c_{b2\Delta}/2m_{g2}\omega_n$；$\xi_{13\Delta} = c_{h\Delta}/2m_{g1}\omega_n$；$\xi_{23\Delta} = c_{h\Delta}/2m_{g2}\omega_n$；$\xi_{33\Delta} = c_{h\Delta}/2m_{c1}\omega_n$；$F'_m$为无量纲切向平均作用力，$F'_m = F_m/m_{c1} b_e \omega_n^2$；$F_{ah1}$为齿轮啮合综合误差，$F_{ah1} = e/b_e$；$F'_\Delta$为无量纲输入力矩的随机扰动量，$F'_\Delta = F_\Delta/m_{c1} b_e \omega_n^2$；$\omega'_h$为无量纲激振频率；$\omega'_\Delta$为无量纲激振频率的随机扰动量。

齿轮啮合间隙非线性函数为

$$f_h(x_5)=\begin{cases}x_5-(\bar{b}+\bar{b}_\Delta) & (x>\bar{b}+\bar{b}_\Delta)\\ 0 & (-\bar{b}-\bar{b}_\Delta\leqslant x\leqslant\bar{b}+\bar{b}_\Delta)\\ x_5+(\bar{b}+\bar{b}_\Delta) & (x<-\bar{b}-\bar{b}_\Delta)\end{cases}\tag{5}$$

其中：$\bar{b}_\Delta$ 为无量纲齿轮齿侧间隙随机扰动量。

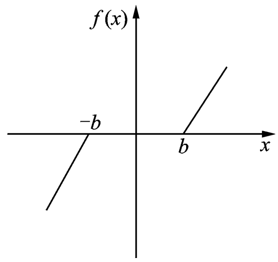


图 2　齿侧间隙与力的关系图

Fig. 2　Relation between gear backlash and force

2　分岔与混沌振动分析

不考虑齿轮阻尼比、齿侧间隙、激振频率、啮合刚度和输入力矩的随机扰动时，选取系统参数 $F_{ah1}=0.05$，$\xi_{11}=0.01$，$\xi_{22}=0.01$，$\xi_{13}=0.012$，$\xi_{23}=0.012$，$\xi_{33}=0.05$，$\bar{b}=1$，$F'_m=0.01$，$F'_{b1}=0.2$，$F'_{b2}=0.2$，$k_{11}=1.3$，$k_{22}=1.3$，$\xi_{11\Delta}=0$，$\xi_{22\Delta}=0$，$\xi_{13\Delta}=0$，$\xi_{23\Delta}=0$，$\xi_{33\Delta}=0$，$\omega'_\Delta=0$，$\bar{b}_\Delta=0$，$\varepsilon_\Delta=0$，$\varepsilon=0.1$。取初始状态 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=-0.1$，$x_3(0)=0$，$x_4(0)=-0.1$，$x_5(0)=0$，$x_6(0)=-0.1$，以激振频率 ω'_h 为分岔参数，令 $\omega=\omega'_h$，利用四阶龙格-库塔法对系统进行数值仿真，可得到系统的局部分岔图（见图 3）和 Poincaré 映射图（见图 4）。

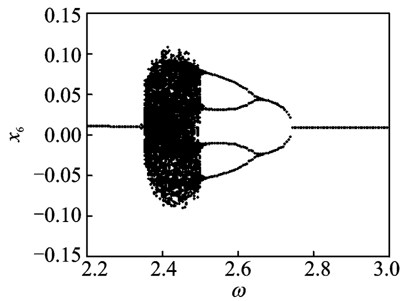
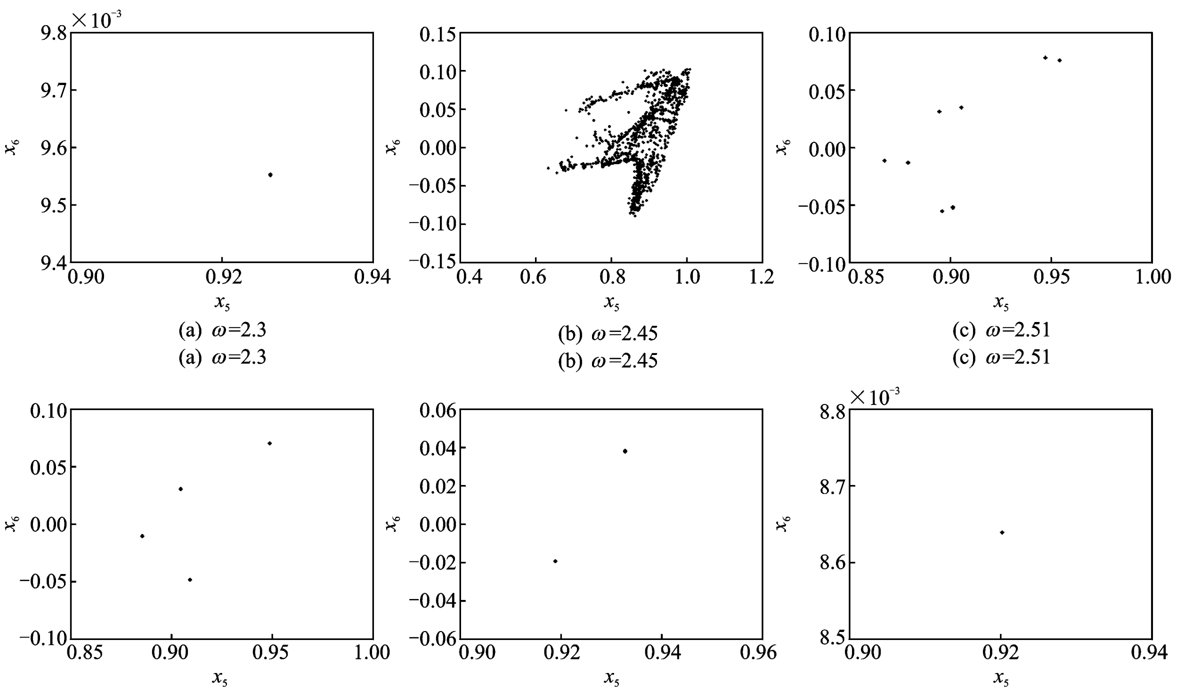


图 3　未受扰动系统的分岔图

Fig. 3　Bifurcation diagram of the system without random perturbation

由图 3 中可以看出，随着激振频率的增大，首先，系统从周期 1 运动经倍化分岔到混沌运动，再从混沌运动经逆倍化分岔到周期 8 运动；然后，再由周期 8 运动经逆倍化分岔到周期 4 运动，再由周期 4 运动经逆倍化分岔到周期 2 运动；最后，由周期 2 运动经逆倍化分岔到周期 1 运动。当 $\omega<2.3$ 时，系统的运动为周期 1 运动，如图 4(a)所示；当 $\omega\in(2.355,2.505)$ 时，系统的运动为混沌运动，如图 4(b)所示；当$\omega\in(2.505,2.52)$时，系统的运动为



(a) ω=2.3
(a) ω=2.3
(b) ω=2.45
(b) ω=2.45
(c) ω=2.51
(c) ω=2.51
(d) ω=2.56
(d) ω=2.56
(e) ω=2.7
(e) ω=2.7
(f) ω=2.9
(f) ω=2.9

图 4　未受扰动系统的 Poincaré 映射图

Fig. 4　Poincaré map of the system without random perturbation

周期8运动，如图4(c)所示；当 $\omega \in (2.52, 2.675)$ 时，系统的运动为周期4运动，如图4(d)所示；当 $\omega \in (2.675, 2.745)$ 时，系统的运动为周期2运动，如图4(e)所示；当 $\omega > 2.745$ 时，系统的运动为周期1运动，如图4(f)所示。

周期运动意味着系统运行是稳定的；而发生分岔时，表明系统参数的微小扰动即可改变系统的稳定性；混沌运动意味系统运动的不可预测性，运动状态的不断变化会加剧系统零部件的疲劳。选择系统参数时应避开系统发生分岔和混沌的区域。

当考虑齿轮阻尼比、齿侧间隙、激振频率、啮合刚度和输入力矩的随机扰动时，F'_{Δ} 服从 $N(0, 0.001^2)$ 的正态分布，F'_{Δ} 在 $(-0.004, 0.004)$ 范围内取值；$\xi_{11\Delta}$，$\xi_{22\Delta}$，$\xi_{13\Delta}$，$\xi_{23\Delta}$，$\xi_{33\Delta}$，$\bar{b}_{\Delta}$ 和 ε_{Δ} 服从 $N(0, 0.01^2)$ 的正态分布，在 $(-0.04, 0.04)$ 范围之内取值；ω'_{Δ} 服从 $N(0, 0.000\ 005^2)$ 的正态分布，在 $(-0.000\ 02, 0.000\ 02)$ 范围内取值，随机量均满足 3σ 理论。图5和图6分别为系统的局部分岔图和Poincaré映射图。从分岔图5中可以看出，系统的形状与原系统的图形基本保持相同。从Poincaré映射图看：图6(a)和6(d)～(f)表示作周期运动的吸引子比以往更发散，但大部分被限制在原吸引子附近；图6(b)表示系统仍作混沌运动，其吸引子形状基本保持不变；图6(c)表示系统做混沌运动，不再做周期8运动。选取 $\omega = 2.56$，对系统的Poincaré映射图、时间历程图、功率谱图、相图和李雅普诺夫指数进行了对比，如图4(d)和6(d)以及图7～图10所示。从图6(d)可看出，吸引子变得发散，但仍被限制到原吸引子附近。时间历程图7和功率谱图8变化不大。从相图9上看，系统的轨迹没有脱离以前的轨迹，而呈现出“带”状分布，这种自组织结构是一种典型的非线性科学现象。从图10中可以看出，李雅普诺夫指数变化也不大，依旧小于零，系统仍为周期运动。由此可见，当扰动很小时，输入力矩的随机外扰动对系统的动力学产生了一定影响，但没有改变系统的倍周期分岔行为。

当输入力矩的随机扰动 F'_{Δ} 分别服从 $N(0, 0.01^2)$ 和 $N(0, 0.1^2)$ 的正态分布，并在 $(-0.04, 0.04)$

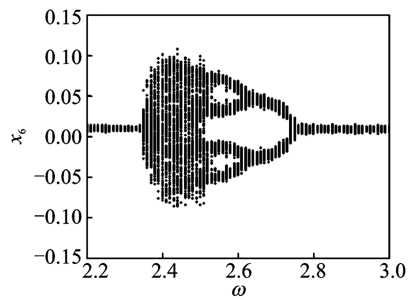


图5 受扰动系统的分岔图

Fig. 5 Bifurcation diagram of the system with random perturbation

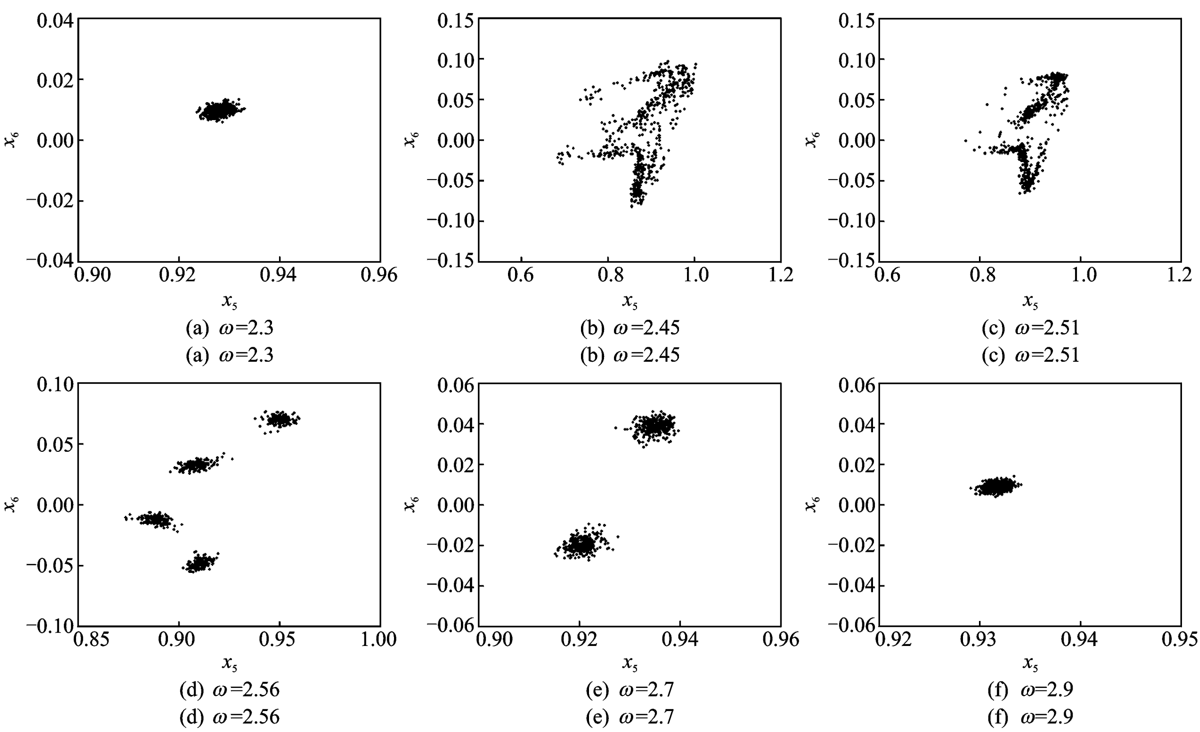
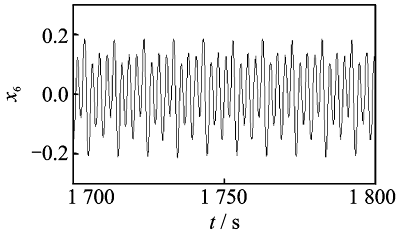


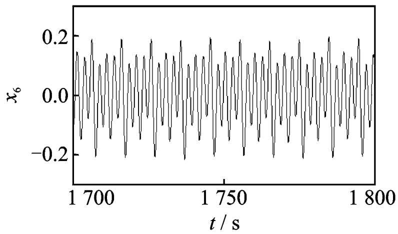
图6 受扰动系统的Poincaré映射图

Fig. 6 Poincaré map of the system with random perturbation



(a) 无随机扰动

(a) Without random perturbation

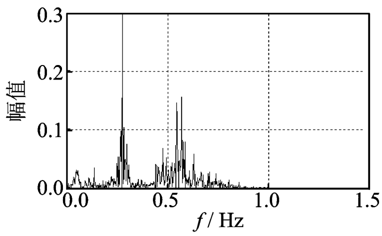


(b) 有随机扰动

(b) With random perturbation

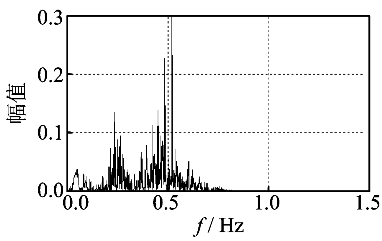
图 7　ω＝2.56 时系统的时间历程曲线

Fig. 7　Time course diagram of the system(ω＝2.56)



(a) 无随机扰动

(a) Without random perturbation

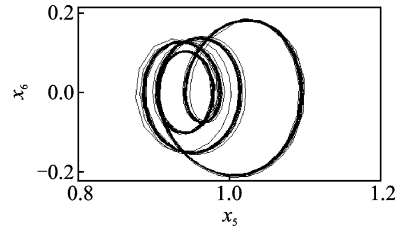


(b) 有随机扰动

(b) With random perturbation

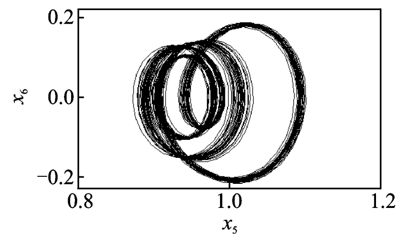
图 8　ω＝2.56 时系统的功率谱图

Fig. 8　Power spectrum of the system(ω＝2.56)



(a) 无随机扰动

(a) Without random perturbation

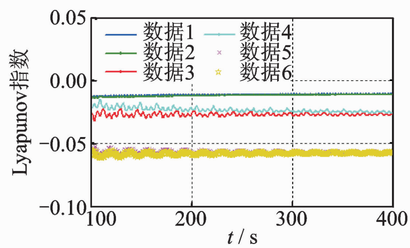


(b) 有随机扰动

(b) With random perturbation

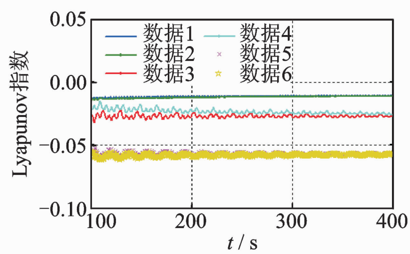
图 9　ω＝2.56 时系统的相图

Fig. 9　Phase diagram of the system(ω＝2.56)



(a) 无随机扰动

(a) Without random perturbation



(b) 有随机扰动

(b) With random perturbation

图 10　ω＝2.56 时系统的李雅普诺夫指数

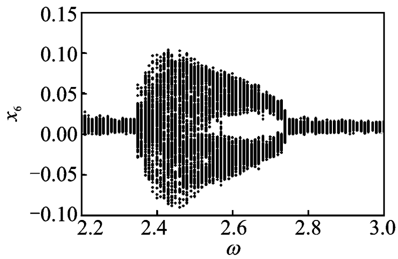
Fig. 10　Lyapunov exponents of the system(ω＝2.56)

和(−0.4，0.4)范围内取值时，系统的分岔图如图 11(a)和(b)所示。可以看出，随着随机扰动 F'_{Δ} 的增大，系统发生分岔区域逐渐消失，直接进入混沌运动，即随着系统外部输入力矩随机波动离散程度的增加，系统的不稳定性加剧，这与文献[10]的结论是一致的。

3　结　论

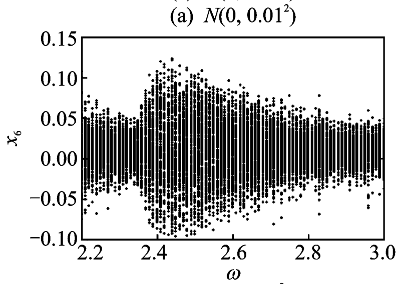
1）笔者考虑齿轮阻尼比、齿侧间隙、激振频率、啮合刚度和输入力矩引起的随机扰动等因素，根据牛顿定律建立了单对三自由度直齿齿轮传动系统的力学模型和动力学方程。

2）利用四阶龙格-库塔法对齿轮传动系统的运动微分方程进行数值求解，用系统的 Poincaré 映射图、相平面图、时间历程图、分岔图和功率谱图分析了系统在激振频率变化的情况下混沌的形成过程。随着激振频率的增大，齿轮传动系统先从周期运动经周期倍化分岔到混沌运动，再从混沌运动通过逆周期倍化分岔转向周期运动。



(a) $N(0, 0.01^2)$

(a) $N(0, 0.01^2)$



(b) $N(0, 0.1^2)$

(b) $N(0, 0.1^2)$

图11　不同输入力矩随机扰动下的系统分岔图

Fig.11　Bifurcation diagram of the various input torque random perturbation

3）随着输入力矩随机扰动量的增大，会影响到系统的随机分岔和动力学特性，在建模时要给予充分的考虑。

参　考　文　献

[1] Jing H S, Sheu K C. Exact stationary solutions of the random response of a single-degree-of-freedom vibro-impact system [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 141(3):363-373.

[2] 陈予恕，曹庆杰. 随机干扰与随机参数激励联合作用下的Hopf分叉[J]. 力学学报，1993，25(4)：411-418.

Chen Yushu, Cao Qingjie. The hope bifurcation of the van der pol-duffing oscillator in the presence of both parametric and the external influence [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1993, 25(4): 411-418. (in Chinese)

[3] Zhu Weiqiu, Huang Zhilong, Suzuki Y. Response and stability of strongly non-linear oscillators under wide-band random excitation [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2001, 36(8): 1235-1250.

[4] 刘梦军，沈允文，董海军. 随机外激励下齿轮非线性系统的全局分析[J]. 中国机械工程，2004，15(13)：1182-1185.

Liu Mengjun, Shen Yunwen, Dong Haijun. Global analysis for the nonlinear gear system with stochastic external excitation [J]. China Mechanical Engineering, 2004, 215(13): 1182-1185. (in Chinese)

[5] Huang Zhilong, Liu Zhonghua, Zhu Weiqiu. Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems under white noise excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 275: 223-240.

[6] 许宝玉，刘义伦，汪旭东，等. 板带轧机随机干扰模型与ARMA谱分析[J]. 振动与冲击，2012，31(7)：1-3，23.

Xu Baoyu, Liu Yilun, Wang Xudong, et al. Stochastic excitation model for a plate ant strip rolling mill and its ARMA spectral analysis [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(7): 1-3, 23. (in Chinese)

[7] 杨成云，浮洁，余淼. 具有随机干扰的车辆座椅悬架系统的鲁棒H_∞控制[J]. 重庆大学学报，2012，35(6)：9-14.

Yang Chengyun, Fu Jie, Yu Miao. Robust H_∞ control for vehicle seat suspension systems with stochastic disturbance [J]. Journal of Chongqing University, 2012, 35(6): 9-14. (in Chinese)

[8] 杨绍普，李韶华，郭文武. 随机激励滞后非线性汽车悬架系统的混沌运动[J]. 振动、测试与诊断，2005，25(1)：22-25，71.

Yang Shaopu, Li Shaohua, Guo Wenwu. Chaos in vehicle suspension system with hysteretic nonlinearity[J]. Journal of Vibration, Measurenment & Diagnosis, 2005, 25(1): 22-25, 71. (in Chinese)

[9] Kahraman A, Singh R. Nonlinear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances [J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 144(3): 469-506.

[10] 陈会涛，吴晓铃，秦大同，等. 随机内外激励对齿轮系统动态特性的影响分析[J]. 中国机械工程，2013，24(4)：533-537.

Chen Huitao, Wu Xiaoling, Qin Datong, et al. Dynamic characteristics of gear transmission system subjected to random internal and external excitation [J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(4): 533-537. (in Chinese)

第一作者简介：王靖岳，男，1978年4月生，博士研究生、讲师。主要研究方向为车辆系统动力学与控制、非线性振动与控制。曾发表《用小波函数控制汽车非线性悬架系统中的混沌》（《机械科学与技术》2010年第29卷第7期）等论文。

E-mail：abswell@126.com