含时滞半主动天棚悬架系统的解析研究*

申永军， 田佳雨， 赵永香， 杨绍普
（石家庄铁道大学机械工程学院　石家庄，050043）

摘要　研究了含时滞的半主动天棚悬架系统的非线性动力学。首先，采用平均法求出了半主动悬架系统的近似解析解，并通过 Matlab 仿真得到了数值解，以位移传递率作为评判指标对二者进行了比较，发现近似解析解具有令人满意的精度；然后，利用 Lyapunov 理论对该系统进行了稳定性分析，发现无时滞时系统始终是稳定的，含时滞系统的稳定性是随着时滞大小周期变化的，且变化周期等于激励周期，说明时滞对半主动天棚悬架系统有着重要的影响。

关键词　天棚控制；半主动悬架；时滞；平均法；Lyapunov 稳定性
中图分类号　O322；TU31；TH113

引　言

自 20 世纪 70 年代以来，工业发达国家开始研究基于振动主动控制的主动/半主动悬架系统[1-5]。悬架作为汽车的重要组成之一，对汽车的乘坐舒适性和行驶安全性有着重要的影响。传统的被动悬架参数是固定的，振动控制效果很难达到最优，而主动/半主动悬架具有一定的在线调节能力，振动控制效果较好，受到了国内外汽车工业界的广泛重视。

振动控制系统内存在着不可避免的时滞因素，而时滞对振动系统的稳定性和控制效果有着非常重要的影响。一方面，时滞可能会导致该系统出现突跳现象，甚至会导致系统失稳，造成振动控制系统的性能严重恶化；另一方面，合理设计的时滞或是对时滞实施一定的补偿，可以有效地改善控制性能。以往工程界通常采用忽略时滞的影响来简化问题，但是从 20 纪 90 年代起，国内外工程界和学术界开始关注对时滞系统的研究[6-11]。由于时滞动力系统的理论分析和求解较为困难，再加上半主动控制系统带有强非线性，所以目前针对含时滞的半主动控制系统研究较少。申永军等[10-11]初步研究了两类含时滞的单自由度半主动隔振系统的非线性动力学。

笔者在文献[10-11]的基础上，进一步研究 2 自由度半主动天棚悬架系统的动力学。通过平均法得到了系统的近似解，并且利用 Lyapunov 理论分析了时滞对系统动力学的影响。

1　含时滞半主动天棚控制悬架模型

考虑到 1/4 车体模型的简单性、普遍性和便于实验研究的特性，笔者采用如图 1 所示的 1/4 车体模型作为半主动悬架系统的模型。其中：m_1, k_1, c_1 分别为轮胎质量、轮胎刚度和轮胎阻尼系数；m_2，k_2, c_2 分别为 1/4 车身质量、悬架弹簧刚度和可调阻尼器的阻尼系数；x_{in} 为路面干扰，$x_{in}=b\cos(\omega t)$，b 为常数。

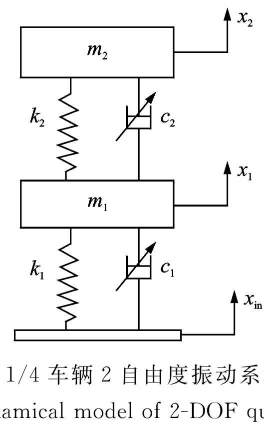

图 1　1/4 车辆 2 自由度振动系统模型

Fig. 1　Dynamical model of 2-DOF quarter vehicle

由牛顿第二定律，系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_2\ddot{x}_2+c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_2(x_2-x_1)=0 \\ m_1\ddot{x}_1+c_1(\dot{x}_1-\dot{x}_{in})+c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+ \\ \qquad k_1(x_1-x_{in})+k_2(x_1-x_2)=0 \end{cases} \tag{1}$$

* 国家自然科学基金资助项目(11072158,10932006)；教育部新世纪优秀人才资助项目(NCET-11-0936)；河北省高等学校创新团队领军人才计划资助项目(LJRC018)
收稿日期：2012-11-20；修回日期：2013-06-06

这里的半主动控制规律采用天棚阻尼控制。天棚阻尼控制方法[12]是最早提出的半主动控制方法。其控制规律为

$$c_2=\begin{cases}c_{2\max} & (\dot{x}_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\geqslant 0)\\ c_{2\min} & (\dot{x}_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)<0)\end{cases} \tag{2}$$

其中：$\dot{x}_2$ 和 $\dot{x}_1$ 分别为车体速度和轮胎速度。

考虑半主动控制过程中的时滞，式(1)转换为

$$\begin{cases}m_2\ddot{x}_2+c_2[\dot{x}_2(t-\tau)-\dot{x}_1(t-\tau)]+k_2(x_2-x_1)=0\\ m_1\ddot{x}_1+c_1(\dot{x}_1-\dot{x}_{\mathrm{in}})+c_2[\dot{x}_1(t-\tau)-\dot{x}_2(t-\tau)]+\\ \quad k_1(x_1-x_{\mathrm{in}})+k_2(x_1-x_2)=0\end{cases} \tag{3}$$

2　天棚控制策略下系统的近似解析解

为了用平均法求式(3)的解析解，作以下代换：

$t_1=\omega t$；$\tau_1=\omega\tau$；$\omega_1=\sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}}$；$\omega_2=\sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$；$x_r=x_2-x_1$；$r_1=\dfrac{\omega}{\omega_1}$；$r_2=\dfrac{\omega}{\omega_2}$；$p=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$；$q=\dfrac{m_2}{m_1}$；$\zeta_1=\dfrac{2m_1\omega_1}{c_1}$；$\zeta_2=\dfrac{2m_2\omega_2}{c_2}$。

将以上各式代入式(3)，得到

$$\begin{cases}r_2^2\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t_1^2}-2\zeta_2r_2\dfrac{\mathrm{d}x_r(t_1-\tau_1)}{\mathrm{d}t_1}-x_r=0\\ r_1r_2\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t_1^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t_1^2}\right)+2\zeta_1r_2\left(\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t_1}+\dfrac{\mathrm{d}x_r}{\mathrm{d}t_1}\right)+\\ \quad 2\zeta_2qr_1\dfrac{\mathrm{d}x_r(t_1-\tau_1)}{\mathrm{d}t_1}+p(x_2+x_r)+\\ \quad \dfrac{q}{p}x_r=pb\cos t_1-2\zeta_1r_2b\sin t_1\end{cases} \tag{4}$$

其中：ζ_1 为轮胎的阻尼比；ζ_2 为可调阻尼器的阻尼比。

为简单起见，用 t 代替 t_1，用 τ 代替 τ_1，这样不会影响分析结果。下面应用平均法求解方程，假设振幅和相位为时间的慢变函数，则解的形式为

$$\begin{cases}x_2=a_2(t)\cos\varphi_2(t)\\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t=-a_2(t)\sin\varphi_2(t)\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}x_r=a_r(t)\cos\varphi_r(t)\\ \mathrm{d}x_r/\mathrm{d}t=-a_r(t)\sin\varphi_r(t)\end{cases} \tag{6}$$

其中：$\varphi_2(t)=t+\theta_2(t)$；$\varphi_r(t)=t+\theta_r(t)$。

式(5)、式(6)通过微分变成如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}\cos\varphi_2(t)-a_2(t)\sin\varphi_2(t)\left(1+\dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}=-\left[\dfrac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}\sin\varphi_2(t)+a_2(t)\cos\varphi_2(t)\left(1+\dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}\right)\right]\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}t}\cos\varphi_r(t)-a_r(t)\sin\varphi_r(t)\left(1+\dfrac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t}\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t^2}=-\left[\dfrac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}t}\sin\varphi_r(t)+a_r(t)\cos\varphi_r(t)\left(1+\dfrac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t}\right)\right]\end{cases} \tag{8}$$

将式(5)中的 $\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$ 和式(4)中的 $\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}$ 代入式(7)，将(6)中的 $\dfrac{\mathrm{d}x_r}{\mathrm{d}t}$ 和式(4)中的 $\dfrac{\mathrm{d}^2x_r}{\mathrm{d}t^2}$ 代入式(8)，经过整理得

$$\cos\varphi_2\,\mathrm{d}a_2/\mathrm{d}t-a_2\sin\varphi_2\,\mathrm{d}\theta_2/\mathrm{d}t=0 \tag{9a}$$

$$\cos\varphi_r\,\mathrm{d}a_r/\mathrm{d}t-a_r\sin\varphi_r\,\mathrm{d}\theta_r/\mathrm{d}t=0 \tag{9b}$$

$$\sin\varphi_2\,\mathrm{d}a_2/\mathrm{d}t+a_2\cos\varphi_2\,\mathrm{d}\theta_2/\mathrm{d}t=\frac{1}{r_2^2}[2a_rr_2\zeta_2\sin(\varphi_r-\tau)-a_r\cos\varphi_r]-a_2\cos\varphi_2 \tag{9c}$$

$$\begin{aligned}\sin\varphi_r\frac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}t}+a_r\cos\varphi_r\frac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{r_1r_2}[&pb\cos t-2br_2\zeta_1\sin t+2r_2\zeta_1(a_2\sin\varphi_2+a_r\sin\varphi_r)+\\&2qa_rr_1\zeta_2\sin(\varphi_r-\tau)-pa_2\cos\varphi_2-\\&\frac{qa_r}{p}\cos\varphi_r]-\frac{2a_r\zeta_2}{r_2}\sin(\varphi_r-\tau)+\\&\left(\frac{1}{r_2^2}+\frac{p}{r_1r_2}-1\right)a_r\cos\varphi_r\end{aligned} \tag{9d}$$

利用 $t=\varphi_2-\theta_2$ 和 $t=\varphi_r-\theta_r$，由式(9)解得 $\dfrac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t}$ 如下

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sin\varphi_2}{r_2^2}\{r_2^2a_2\cos\varphi_2+a_r[\cos(\varphi_2+\theta_r-\theta_2)-2r_2\zeta_2\sin(\varphi_2+\theta_r-\theta_2-\tau)]\} \tag{10a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\cos\varphi_2}{a_2r_2^2}\{r_2^2a_2\cos\varphi_2+a_r[\cos(\varphi_2+\theta_r-\theta_2)-2r_2\zeta_2\sin(\varphi_2+\theta_r-\theta_2-\tau)]\} \tag{10b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sin\varphi_r}{pr_1r_2^2}\{&pr_2[bp\cos(\varphi_r-\theta_r)-2br_2\zeta_1\sin(\varphi_r-\theta_r)-pa_2\cos(\varphi_r-\theta_r+\theta_2)+\\&2a_2r_2\zeta_1\sin(\varphi_r-\theta_r+\theta_2)]-a_rr_2[(p^2+q)\cos\varphi_r-2pr_2\zeta_1\sin\varphi_r]+pa_rr_1[-\cos\varphi_r+\\&r_2^2\cos\varphi_r+2(q+1)r_2\zeta_2\sin(\varphi_r-\tau)]\}\end{aligned} \tag{10c}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t}=-\frac{\cos\varphi_r}{pa_rr_1r_2^2}\{&pr_2[bp\cos(\varphi_r-\theta_r)-2br_2\zeta_1\sin(\varphi_r-\theta_r)-pa_2\cos(\varphi_r-\theta_r+\theta_2)+\\&2a_2r_2\zeta_1\sin(\varphi_r-\theta_r+\theta_2)]-a_rr_2[(p^2+q)\cos\varphi_r-2pr_2\zeta_1\sin\varphi_r]+pa_rr_1[-\cos\varphi_r+r_2^2\cos\varphi_r+\\&2(q+1)r_2\zeta_2\sin(\varphi_r-\tau)]\}\end{aligned} \tag{10d}$$

式(10)在平均法中被称为关于振幅和相位的标准方程。

下面通过对式(10)的右端在一个周期(如 $\varphi_i=$

$[0, 2\pi]$，$i=1,r$）进行积分平均可以得到振幅导数和相位导数的近似解。由于 ζ_2 与系统状态有关，因此需要分段处理。

对于天棚控制策略，由于 $x_1=a_1\cos(t+\theta_1)$，$x_2=a_2\cos(t+\theta_2)$，可得

$$\begin{cases}\dot{x}_2=-a_2\sin(t+\theta_2)\\ \dot{x}_2-\dot{x}_1=-\dot{x}_r=a_r\sin(t+\theta_r)\end{cases} \tag{11}$$

并且 $a_2>a_1$，$\theta_2>\theta_1$，$\theta_2>\theta_r$。

这样式(2)可改写为

$$\zeta_2=\begin{cases}\zeta_{\max} & (-\theta_2<\varphi_i<-\theta_r)\\ \zeta_{\min} & (-\theta_r<\varphi_i<\pi-\theta_2)\\ \zeta_{\max} & (\pi-\theta_2<\varphi_i<\pi-\theta_r)\\ \zeta_{\max} & (\pi-\theta_r<\varphi_i<2\pi-\theta_2)\end{cases} \tag{12}$$

其中：下标 $i=1,r$。

这样通过对式(10)的右端在一个周期进行积分平均就可以得到振幅导数和相位导数的近似解为

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}=\frac{a_r}{2\pi r_2^2}\{-\pi\sin(\theta_2-\theta_r)-2r_2\zeta_{\max}[\cos(\tau+2\theta_2)\sin(\theta_2-\theta_r)+(\theta_r-\theta_2)\cos(\tau+\theta_2-\theta_r)]-2r_2\zeta_{\min}[(\pi-\theta_2+\theta_r)\cos(\tau+\theta_2-\theta_r)+\cos(\tau+2\theta_2)\sin(\theta_2-\theta_r)]\} \tag{13a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2\pi a_2r_2^2}\{\pi a_2r_2^2+a_r\pi\cos(\theta_2-\theta_r)+2r_2a_r\zeta_{\max}[\sin(\tau+2\theta_2)\sin(\theta_2-\theta_r)+(\theta_2-\theta_r)\sin(\tau+\theta_2-\theta_r)]+r_2a_r\zeta_{\min}[\cos(\tau+3\theta_2-\theta_r)-\cos(\tau+\theta_2+\theta_r)+(2\pi-2\theta_2+2\theta_r)\sin(\tau+\theta_2-\theta_r)]\} \tag{13b}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2\pi r_2r_2}\{bp\pi\sin\theta_r-2\pi r_2\zeta_1(b\cos\theta_r-a_r)+\pi a_2[p\sin(\theta_2-\theta_r)+2r_2\zeta_1\cos(\theta_2-\theta_r)]-(1+q)a_rr_1\zeta_{\max}[\sin(\tau+2\theta_2)-\sin(\tau+2\theta_r)-2\theta_2\cos\tau+2\theta_r\cos\tau]+(1+q)a_rr_1\zeta_{\min}[2\pi\cos\tau+\sin(\tau+2\theta_2)-\sin(\tau+2\theta_r)-2\theta_2\cos\tau+2\theta_r\cos\tau]\} \tag{13c}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2p\pi a_rr_1r_2^2}\{\pi r_2[-pa_2\cos(\theta_2-\theta_r)+2r_2\zeta_1a_2\sin(\theta_2-\theta_r)+bp\cos\theta_r+2br_2\zeta_1\sin\theta_r]+\pi a_rr_2(p^2+q)-pr_1a_r(-\pi+\pi r_2^2)+r_1r_2p(1+q)a_r\times\zeta_{\min}[-\cos(\tau+2\theta_2)+\cos(\tau+2\theta_r)-(2\pi-2\theta_2+2\theta_r)\sin\tau]+r_1r_2p(1+q)a_r\zeta_{\max}[\cos(\tau+2\theta_2)-\cos(\tau+2\theta_r)-(2\theta_2-2\theta_r)]\sin\tau\} \tag{13d}$$

振动控制工程中稳态解更有意义。令 $\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}t}=0$ 和 $\frac{\mathrm{d}\theta_r}{\mathrm{d}t}=0$，这样就可以得到一个关于稳态振幅和相位 $\bar{a}_2,\bar{\theta}_2,\bar{a}_r,\bar{\theta}_r$ 的四元非线性代数方程组。求解相应的非线性代数方程组，就可以得到半主动悬架系统的稳态近似解析解。

3 数值仿真

选取一组基本的汽车悬架系统参数如表 1 所示，含时滞半主动天棚控制策略的参数选取如表 2 所示。

表 1 基本系统参数

Tab. 1 Basic system parameters

参数	轮胎质量 m_1/kg	车体质量 m_2/kg	轮胎刚度 k_1/(N·m^{-1})	轮胎阻尼比 ζ_1
数值	36	240	160 000	0.03

表 2 天棚控制参数

Tab. 2 The parameters for skyhook control

控制方法	悬架刚度 k_2/(N·m^{-1})	最大阻尼比 $\zeta_{\max}$	最小阻尼比 $\zeta_{\min}$	时滞 τ/s
天棚阻尼控制	16 000	0.15	0.001	0.01

为了证明近似解的精度，以解析解与数值解的位移传递率作为评价指标进行比较。根据式(13)可得到解析解的幅频曲线，如图 2 中实线所示。同时，采用 Matlab 软件中的 DDE 工具箱进行数值仿真，计算过程中步长 $h=0.003$，计算时间为 300 s，将前 200 s 响应略去并取后 100 s 响应的最大值作为稳态响应的幅值，所得数值积分的结果也示于图 2中，以带圆圈的虚线表示。可见二者吻合较好，证明了解析解的正确性和准确性。

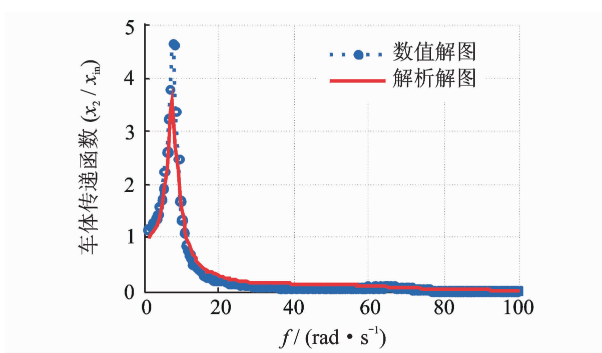

图 2 解析解与数值解的比较

Fig. 2 Comparison between the analytical and numerical solution

另外，为了更加形象直观地证明半主动控制相对于被动控制的优越性，笔者给出了可调阻尼器采用半主动天棚阻尼控制和采用被动控制时的位移传递函数的响应曲线，并通过近似解析解和数值解两种解法分别做了比较，比较结果分别示于图 3 和图 4中。两图中，带圆圈的虚线表示被动控制车体位移传递率，实线表示半主动天棚阻尼控制车体位移传递率。由图 3 和图 4 可以明显地看出，采用天棚控制策略时的半主动悬架系统车体的振动峰值明显小于被动控制悬架的车体振动峰值，验证了半主动控制相对于被动控制的优越性。

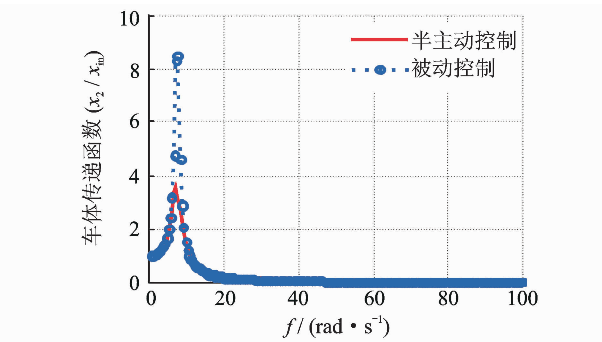

图 3　半主动控制与被动控制近似解比较

Fig. 3　Comparison between the approximate solutions of semi-active and passive systems

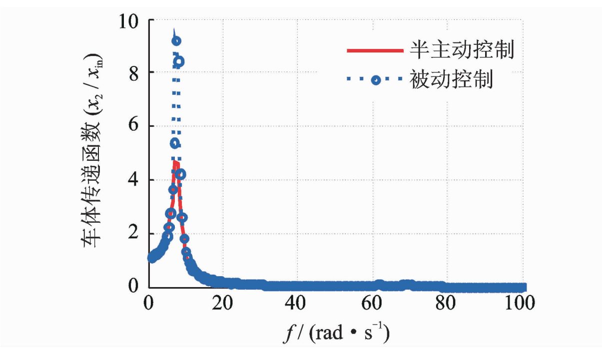

图 4　半主动天棚控制与被动控制数值解比较

Fig. 4　Comparison between the numerical solutions of semi－active and passive systems

4　稳定性分析

悬架系统内存在的时滞因素将会影响系统的响应，尤其是系统的稳定性。因此下面分析时滞对半主动悬架系统稳定性的影响。

对稳态解引入小扰动，即 $a_2=\bar{a}_2+\Delta a_2$，$\theta_2=\bar{\theta}_2+\Delta\theta_2$，$a_r=\bar{a}_r+\Delta a_r$，$\theta_r=\bar{\theta}_r+\Delta\theta_r$，代入式(13)中，进行 Taylor 展开并略去高阶项，可得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\Delta a_2}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta_2}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\Delta a_r}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta_r}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}&A_{24}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{34}\\A_{41}&A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta a_2\\ \Delta\theta_2\\ \Delta a_r\\ \Delta\theta_r\end{bmatrix}\tag{14}$$

式中元素 $A_{ij}(i=1,2,\cdots,4,j=1,2,\cdots,4)$为系统参数及稳态幅值和相位的函数，通过符号计算软件 Mathematica 得到。由于结果比较复杂，故不再在这里列出。

根据 Lyapunov 理论，系统周期解稳定的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部具有负实部。因此，系统的稳定性就可以通过求取特征根实部的最大值来判断，结果如图 5 和图 6 所示。由图可知，当时滞 $\tau=0$ 时无论激励频率是多少，特征根实部恒小于零，因此此时系统周期解是恒稳定的。进一步观察可发现，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部是时滞 τ 的周期函数，并且该周期与激励周期相同。这说明时滞对系统的稳定性有着非常重要的影响。

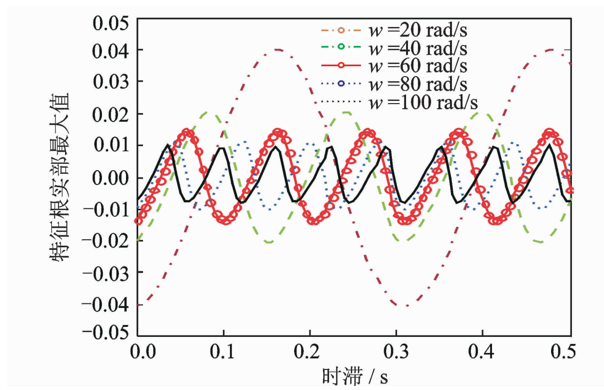

图 5　特征根实部最大值与时滞的关系

Fig. 5　The relationship of the maximum real part of the characteristic root and time delay

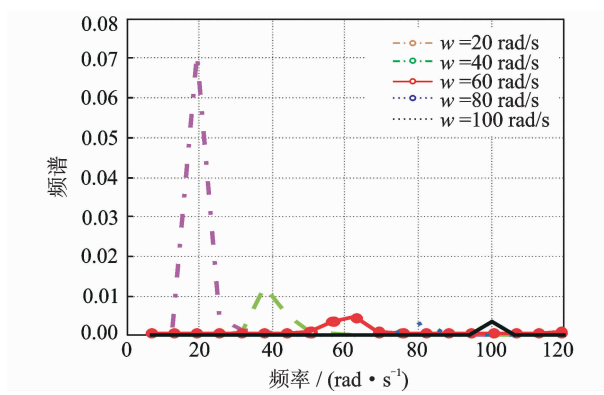

图 6　时滞对半主动悬架稳定性的影响

Fig. 6　Effect of time delay on the stability of semi-active system

5 结束语

研究了天棚控制策略下含时滞的半主动悬架系统,利用平均法得到了系统的近似解析解,并且和数值解进行了比较,结果表明近似解析解具有令人满意的精度。进行了半主动天棚阻尼控制和被动控制时车体位移传递曲线的比较,证明了半主动控制相对于被动控制的优越性。此外,对含时滞的半主动悬架系统进行了稳定性分析,发现时滞对系统的稳定性有着重要的影响,不考虑时滞时系统是始终稳定的,加入时滞以后系统的稳定性是周期变化的。

参 考 文 献

[1] Kim H, Yoon Y S. Semi-active suspension with preview using a frequency-shaped performance index [J]. Vehicle Systems Dynamics, 1995, 24:759-780.

[2] Shoshi Hidaka. Adaptive vibration control by a variable-damping dynamic absorber using ER fluid [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1999, 121(7): 373-378.

[3] 张文丰,翁建生,胡海岩. 时滞对车辆悬架"天棚"阻尼控制的影响 [J]. 振动工程学报, 1999, 12(4):486-491.
Zhang Wenfeng, Weng Jiansheng, Hu Haiyan. Effect of time delay on active vehicle suspensions equipped with "sky-hook" damper [J]. Journal of Vibration Engineering, 1999, 12(4): 486-491. (in Chinese)

[4] 申永军,杨绍普,刘献栋. 采用磁流变阻尼的一种改进型半主动控制汽车悬架研究 [J]. 振动、测试与诊断, 2001,21(4):253-257.
Shen Yongjun, Yang Shaopu, Liu Xiandong. Studies on improved type of semi-active car suspension with magnetorheological damper [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2001, 21(4):253-257. (in Chinese)

[5] 廖英英,刘永强,刘金喜,等. MRD 模型参数识别及其在振动控制中的应用[J]. 振动、测试与诊断,2012, 32(2): 223-228.
Liao Yingying, Liu Yongqiang, Liu Jinxi, et al. MRD model parameter identification and its application in vibration control of vehicle [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(2): 223-228. (in Chinese)

[6] Hu Haiyan, Wang Zaihua. Stability of linear time variant dynamic systems with multiple time delays [J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 14(3):274-282.

[7] 胡海岩,王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展 [J]. 力学进展, 1999, 29(4):501-512.
Hu Haiyan, Wang Zaihua. Review on nonlinear dynamic systems involving time delays [J]. Advances in Mechanics, 1999, 29(4): 501-512. (in Chinese)

[8] 徐鉴,裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望 [J]. 力学进展, 2006, 36(1):17-30.
Xu Jian, Pei lijun. Advances in dynamics for delayed systems [J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(1): 17-30. (in Chinese)

[9] Shen Yongjun, Wang Lin, Yang Shaopu, et al. Nonlinear dynamical analysis and parameters optimization of four semi-active on-off dynamic vibration absorbers [J]. Journal of Vibration and Control, 2013, 19(1): 143-160.

[10] Shen Yongjun, Yang Shaopu, Xing Haijun, et al. Analytical research on a single degree-of-freedom semi-active oscillator with time delay[J]. Journal of Vibration and Control, 2013,19(12):1895-1905.

[11] 申永军,祁玉玲,杨绍普,等. 含时滞的单自由度半主动悬架系统的动力学分析 [J]. 振动与冲击,2012,31(24):38-40.
Shen Yongjun, Qi Yuling, Yang Shaopu, et al. Dynamics analysis on SDOF semi-active control suspension system with time-delay [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(24): 38-40. (in Chinese)

[12] Karnopp D, Crosby M J, Harwood R A . Vibration control using semi-active force generators [J]. Journal of Engineering for Industry, 1974,5: 619-626.

第一作者简介:申永军,男,1973 年 12 月生,教授。主要研究方向为机械系统的非线性动力学、振动控制与故障诊断。曾发表《基于分数 Fourier 变换的自适应信号降噪方法》(《振动工程学报》2009 年第 22 卷第 3 期)等论文。
E-mail:shenyongjun@126. com