

# 广义惯性损伤转子系统的非线性动力学\*

于涛<sup>1,2,3</sup>, 王娇<sup>1,2</sup>, 李英杰<sup>1,2</sup>, 孙伟<sup>3</sup>, 韩清凯<sup>3</sup>

(1. 烟台大学机电汽车工程学院 烟台, 264005) (2. 山东省高校先进制造与控制技术重点实验室 烟台, 264005)  
(3. 大连理工大学机械学院 大连, 116024)

**摘要** 采用有限单元方法, 建立了质量慢变损伤转子系统动力学模型。将质量慢变转子系统推广为惯性损伤转子系统, 研究了质量慢变转子系统相位突变导致的动力学响应问题, 对比研究了不同碰摩程度下质量慢变转子-轴承系统孪生碰摩损伤非线性动力学响应, 结合三维轴心轨迹, 指出考虑了质量慢变因素的碰摩损伤转子-轴承系统时频响应特点。所得结果为惯性损伤转子系统动力学研究和故障诊断提供了理论参考。

**关键词** 转子系统; 质量慢变; 非线性动力学; 惯性损伤; 碰摩; 相位突变

**中图分类号** TH113.1; O322

## 引言

在分离机械、纺织机械、起重机械、电动机械、发电机械等领域中, 作为机械主要部件的转子系统, 由于工作环境及工况要求导致转子质量在工作中不断发生变化。如燃气轮机的转子叶片, 工作中受到工作介质的冲刷腐蚀、粘连堆积, 导致叶片质量发生改变。纺织机械中的转子部件, 其质量随着缠绕其上的织物或线纱的多少而随时间缓慢变化。传统上, 将这类转子系统称为慢变转子系统<sup>[1-5]</sup>。在此基础上, 将转子质量、偏心等与惯性量相关的参量在转子系统运转过程中随时间发生慢变或突变<sup>[6]</sup>的情况, 统称为惯性慢变损伤转子系统<sup>[7]</sup>。Cveticanin<sup>[8-9]</sup>研究了质量慢变转子系统的非线性特性, 包括其自激振动和混沌运动等。王宗勇等<sup>[10-12]</sup>研究了质量慢变转子系统松动、碰摩故障下的周期运动和拟周期运动。笔者将惯性慢变损伤转子系统进一步向更广义的惯性损伤转子系统推广, 研究了质量慢变转子系统相位突变导致的动力学响应问题, 对比研究了不同碰摩程度下质量慢变转子-轴承系统孪生碰摩损伤非线性动力学响应, 结合重分布小波尺度图和三维轴心轨迹, 指出考虑了质量慢变因素的碰摩损伤转子-轴承系统时频响应特点。

## 1 质量慢变转子系统非线性动力学响应

图 1 所示为含单一慢变质量的单转子-轴承系统有限元模型。其中转轴有限元模型见图 2。

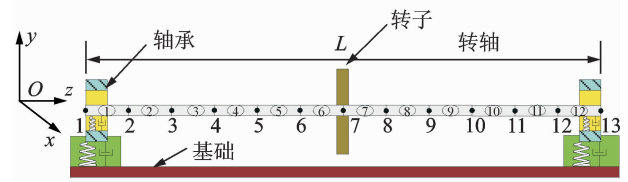


图 1 质量慢变转子有限元模型

Fig. 1 Finite element model of rotor system with slowly-varying mass

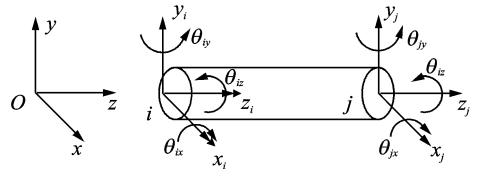


图 2 转子轴段单元有限元模型

Fig. 2 Finite element model of rotor shaft

转轴单元的广义坐标为两端节点的位移, 仅考虑弯截面横向位移和偏转角, 忽略扭转变形和轴向变形, 则两端点的广义坐标为

$$\mathbf{u}_i = [x_i \ \theta_{ix} \ y_i \ \theta_{iy}]^T \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目(11202179); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(教外司留[2010]1561); 山东省自然科学基金资助项目(ZR2012EEQ006)

收稿日期: 2013-12-20; 修回日期: 2014-02-24

$$\mathbf{u}_j = [x_j \ \theta_{ix} \ y_j \ \theta_{jy}]^T \quad (2)$$

采用三次多项式插值函数的形函数矩阵,得到相应的移动惯性单元矩阵  $\mathbf{M}_r^e$ 、转动惯性单元矩阵  $\mathbf{M}_R^e$ 、陀螺力矩矩阵  $\mathbf{G}^e$  和刚度单元矩阵  $\mathbf{K}^e$ [7]。其中: $l$  为单元的长度; $EI$  为抗弯刚度; $\mu$  为单位长度的质量; $r$  为单元半径。

设刚性圆盘的质量、过轴心的直径转动惯量和极转动惯量分别为  $m, J_d$  和  $J_p$ ,圆盘的广义坐标为  $\mathbf{u}_d = [x_d \ \theta_{dy} \ y_d \ \theta_{dx}]^T$ 。圆盘的质量和陀螺力矩如下

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_d \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p \end{bmatrix} \quad (3b)$$

将图 1 所示的转子-轴承系统划分为具有  $n$  个梁单元、 $n+1$  个节点的有限元模型。转盘质量和轴承质量集中在相应节点上。组集各单元质量、刚度、阻尼及陀螺力矩,构成转子系统的动力学模型为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{M}$  为质量矩阵; $\mathbf{D}$  为转子轴承阻尼和陀螺力矩; $\mathbf{K}$  为刚度矩阵; $\mathbf{Q}$  为由不平衡量等引起的激振力。

考虑基于质量慢变模型  $m(\tau) = m_0(1 + \lambda \cos \omega_m \tau)$  的慢变转子系统,当给定模型参数  $m_0 = 1 \text{ kg}, \omega_m = 100 \text{ rad/s}, \epsilon = 0.1, \lambda = 0.5$ ,转子轴系参数半径  $R = 10 \text{ mm}$ ,长度  $L = 480 \text{ mm}, e = 0.0001 \text{ m}$ ,弹性模量  $E = 2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  时,求得系统固有频率随质量变化范围为  $26.4 \text{ Hz} < f_0 < 41.5 \text{ Hz}$ 。

对应圆盘质量矩阵随时间慢变,将系统单元总质量矩阵圆盘节点处质量替换为时变质量,则系统总质量矩阵即为时变矩阵。同样,考虑到不平衡力和重力列阵,相对应的质量参数也为时变质量。图 3、图 4 分别给出了基于有限元模型的质量慢变转子系统稳态转速为 35 Hz 时的时频响应曲线和重排 Morle 尺度图。

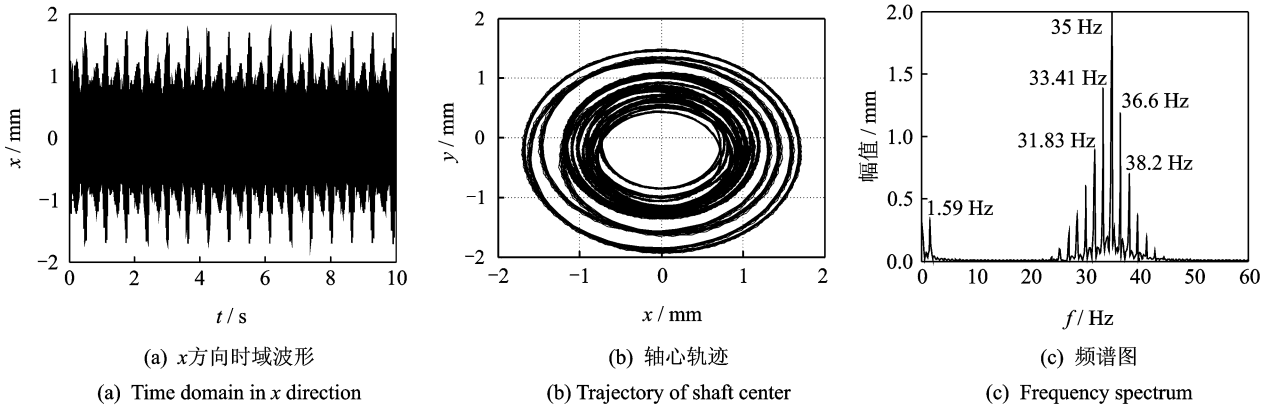


图 3 基于有限元模型的单质量慢变转子系统时频响应曲线( $\omega = 35 \text{ Hz}, \epsilon = 0.1$ )

Fig. 3 FEM-model-based time-frequency response of rotor system with slowly-varying mass

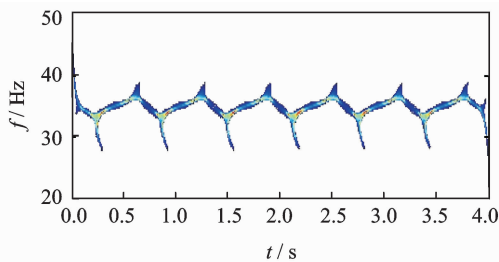


图 4 单质量慢变转子系统重排 Morlet 尺度图 ( $\omega = 35 \text{ Hz}, \epsilon = 0.1$ )

Fig. 4 The reassigned Morlet scalograms of rotor system with slowly-varying mass based on FEM model ( $\omega = 35 \text{ Hz}, \epsilon = 0.1$ )

从图中可以看出,基于有限元模型的质量慢变转子系统响应较基于解析解的情况,从时域波形和频谱图上看没有太大区别。不过从频谱图上发现,位于低频处有低频成分 1.59 Hz,该频率成分即为时间  $t$  尺度下,慢变质量模型的变化频率  $\Delta f = \omega_m \epsilon / 2\pi$ ,且高频部分以工频转速 35 Hz 为基准,以质量变化频率  $\Delta f$  为增减量,依次向高频和低频方向延伸。从系统重排 Morlet 尺度图中,可以看出系统频率依然随时间作周期性波动,频率从低到高变化范围为转子系统固有频率变化范围,且频率波动周期  $T = 2\pi / \omega_m \epsilon$ 。从以上分析可以确定,基于有限元模型的质量慢变转子模型比基于渐近法的慢变转子系

统解析解法<sup>[4]</sup>更能体现频率的细节信号,且由于系统响应不受解的逼近次数的限制,系统时频响应更为真实。

## 2 质量慢变转子系统相位突变非线性动力学响应

考虑质量慢变转子系统动力学方程

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{X}} + i\dot{\mathbf{Y}}\} + \mathbf{C}\{\dot{\mathbf{X}} + i\dot{\mathbf{Y}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{X} + i\mathbf{Y}\} = \{\mathbf{F}_{ux} + i\mathbf{F}_{uy}\} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{X} = \{x_1, \theta_{x1}, \dots, x_n, \theta_{xn}\}^T$ ,  $\mathbf{Y} = \{y_1, \theta_{y1}, \dots, y_n, \theta_{yn}\}^T$  分别为转子  $n$  个结点的  $x$  方向和  $y$  方向横向振动位移和转角组成的位移矢量; $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  分别为转子有限元模型的质量、阻尼和刚度矩阵; $\mathbf{F}_{ux}$ 、 $\mathbf{F}_{uy}$  分别为转子  $x$  方向和  $y$  方向的不平衡力矢量。

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ux} = m\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \\ \mathbf{F}_{uy} = m\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \quad (6)$$

考虑转子系统相位突变,此处假设相位  $\alpha$  突变情况为由初始相位  $0^\circ$  突变为  $\pi/2$ ,且相位突变起始时间为总时间的  $1/4$  处,结束时间为总时间的  $1/3$  处。系统时频响应如图 5、图 6 所示。从图 5(a), (b) 的时域信号可以看出,当相位由初始  $0^\circ$  变为  $\pi/2$  时, $y$  方向时域波形较  $x$  方向时域波形更为明显。图 5(c) 的轴心轨迹显示,当相位发生突变时,轴心轨迹整体逆时针旋转。从图 5(d) 的频谱图中看出,相位突变并未导致频率成分的变化,与单纯质量慢变转子系统频谱响应并无区别。但是从图 6 的重排 Morlet 尺度图中可以清楚地发现,当相位发生突变时,即对应于时刻  $0.5$  s(总时间历程的  $2.5$  s 时刻)时,图中出现明显的频率冲击成分,且由于相位的突变,导致突变至结束历程中时域峰值对应的频率幅值明显高于其他频率成分。

## 3 质量慢变碰摩损伤转子-轴承系统非线性动力学响应

质量慢变转子系统运转时,由于质量的慢变导致系统固有特性的时变和振幅的波动,这种波动在很大程度上容易引起转子(转轴、叶轮)和静子(密封、机匣)之间的碰摩,因此,在前述无碰摩质量慢变转子系统的基础上,研究质量慢变情况下的碰摩损伤转子系统的非线性动力学具有一定的工程实际和理论意义。图 7 所示为碰摩转子-轴承系统有限元

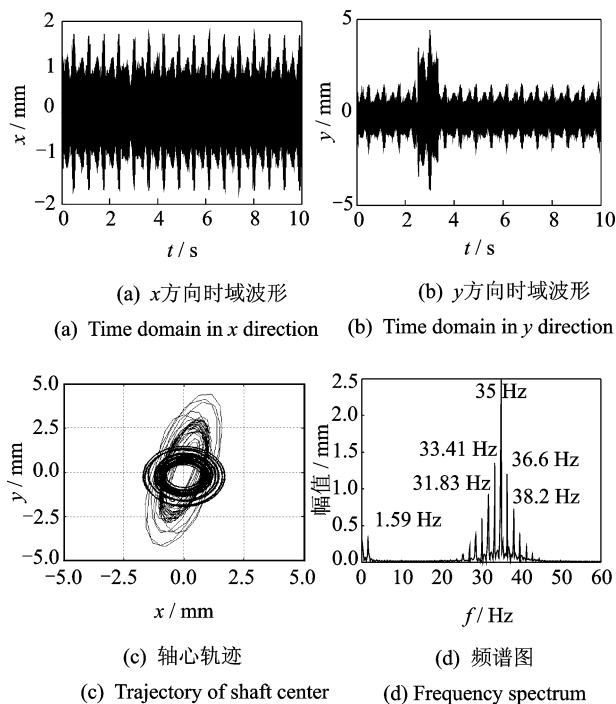


图 5 质量慢变转子系统相位突变时频响应曲线  
( $\omega = 35$  Hz,  $\epsilon = 0.1$ )

Fig. 5 Time-frequency response of rotor system with slowly-varying mass when phase change abruptly

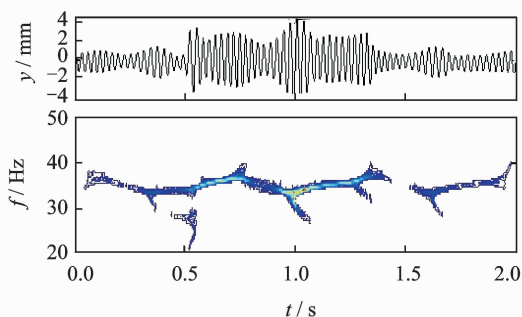
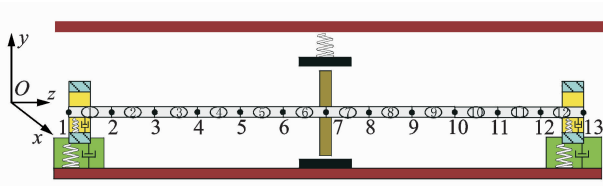


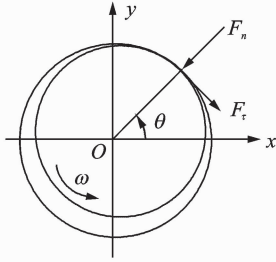
图 6 质量慢变转子系统相位突变情况重排 Morlet 尺度图  
Fig. 6 Reassigned Morlet scalograms of rotor system with slowly-varying mass when phase change abruptly

模型。

对于 Jeffcott 转子系统,当转子轴心位移小于转静件间隙时,转静件不接触,没有碰摩力。当转子轴心位移大于转静件间隙时转静件发生接触,产生碰摩力。假定定子径向变形为线性变形, $k_r$  为定子径向刚度,转子与定子间的摩擦符合库仑摩擦定律,摩擦因数为  $f$ ,并设初始时转子与定子之间的间隙为  $\delta$ ,则碰撞力和摩擦力分别为



(a) 碰摩转子-轴承系统有限元模型  
(a) FE model of rubbing rotor-bearing system



(b) 碰摩力模型  
(b) Model of rubbing force

图 7 质量慢变碰摩转子-轴承系统与碰摩力模型

Fig. 7 Model of rub-impact rotor system with slowly varying mass and rubbing forces

$$\begin{cases} F_n = 0 & (r < \delta) \\ F_n = (r - \delta)k_r & (r \geq \delta) \\ F_T = fF_n & (r \geq \delta) \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $F_n$  为径向碰撞力;  $F_T$  为切向摩擦力;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 为转子的径向位移。

令  $\varphi$  为碰摩点的向径与  $x$  轴的夹角, 在  $x-y$  坐标系上, 利用坐标变换

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_n \\ F_T \end{Bmatrix} \quad (8)$$

碰摩力为

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (r < \delta) \quad (9a)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -\frac{(r - \delta)k_r}{r} \begin{bmatrix} 1 & -f \\ f & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (r \geq \delta) \quad (9b)$$

则系统动力学方程为

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{X}} + i\dot{\mathbf{Y}}\} + \mathbf{C}\{\dot{\mathbf{X}} + i\dot{\mathbf{Y}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{X} + i\mathbf{Y}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{ux} + i\mathbf{F}_{uy} \\ \mathbf{F}_{bx} + i\mathbf{F}_{by} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x + i\mathbf{F}_y \end{Bmatrix} \quad (10)$$

为对比分析质量慢变对碰摩转子-轴承系统非线性动力学的影响, 首先分析基于有限元模型的无质量慢变碰摩损伤转子-轴承系统非线性动力学响应。对影响碰摩损伤转子系统非线性动力学响应的诸多因素, 如偏心量、摩擦因数、静子刚度、阻尼等, 已经作了大量的工作。此处以碰摩刚度为例, 模拟

实际旋转机械中不同静子刚度(不同密封材料)的情况, 对无质量慢变碰摩损伤转子-轴承系统进行讨论。取转速为 35 Hz, 图 8 给出了不同碰摩刚度下系统的响应。图 8(a1), (b1), (c1) 为无碰摩时转子系统响应, 从图中可以看出, 随着静子刚度, 即碰摩刚度的增大, 当静子刚度较小(小于  $1.7 \times 10^4$  N/m) 时, 频谱图中显示单一工频成分为主, 其对应的三维轴心轨迹显示当发生轻微碰摩时, 振幅减小, 轴心轨迹的形状没有明显改变。当静子刚度继续增大至  $1.7 \times 10^4$  N/m 时, 图 8(c2) 除工频和微弱的 2 倍频外, 出现了微弱的 1/2 倍频成分, 表明随着静子刚度的增加, 碰摩程度也随之增强, 其轴心轨迹单侧变厚, 表现出明显的碰摩转子系统行为迹象。随着静子刚度进一步增大至  $k_r = 2.0 \times 10^4$  N/m 时, 轴心轨迹出现明显的分频特性, 表现在其频谱图中 1/2 倍频成分越来越明显。如图 8(a3)~(c3) 所示, 轴心轨迹呈现“双环”形状, 与现场试验所得结果类似, 表明随着时间的推移, 稳态运转下的碰摩转子-轴承系统轴心轨迹呈现时变的特性。静子刚度继续增大, 从图 8(a4)~(c5) 可以发现, 轴心轨迹出现与低静子刚度类似的表现形式, 但是其轴心轨迹相位, 即碰摩位置却发生变化。同时, 除了 1/2 倍频成分继续占主导地位外, 出现了微弱的高次分频谐波成分, 即 3/2 倍频成分。当静子刚度达到  $3.45 \times 10^4$  N/m 时, 轴心轨迹再次呈现出“双环”形状。频谱图中仍以 1/2 倍频成分为主导, 工频、3/2 倍频、2 倍频成分共存。

在上述单纯碰摩损伤转子-轴承系统的基础上, 继续讨论质量慢变情况下碰摩损伤转子-轴承系统的非线性动力学响应。给定质量慢变模型  $m(\tau) = m_0(1 + \lambda \cos \omega_m \tau)$ , 模型参数  $m_0 = 1$  kg,  $\omega_m = 100$  rad/s,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\lambda = 0.5$ , 当转速为 35 Hz 时, 系统响应见图 9。如图 9(a1)~(e1) 所示, 对于轴承油膜力支撑的质量慢变转子-轴承系统, 其  $y$  方向时域波形较  $x$  方向时域波形波动更为显著, 轴心轨迹呈连续椭圆状, 且随时间作周期性的波动。其频谱图中频率成分有明显的工频成分和时间  $t$  尺度下的质量慢变模型质量变化频率, 即  $\omega_m \epsilon / 2\pi = 1.59$  Hz, 较无质量慢变无碰摩转子-轴承系统响应(图 8(c1)), 其工频呈较明显的宽频特性。进一步与前面刚性支撑下质量慢变转子系统动力学响应比较, 可以发现考虑了油膜力支撑的质量慢变转子-轴承系统, 由于

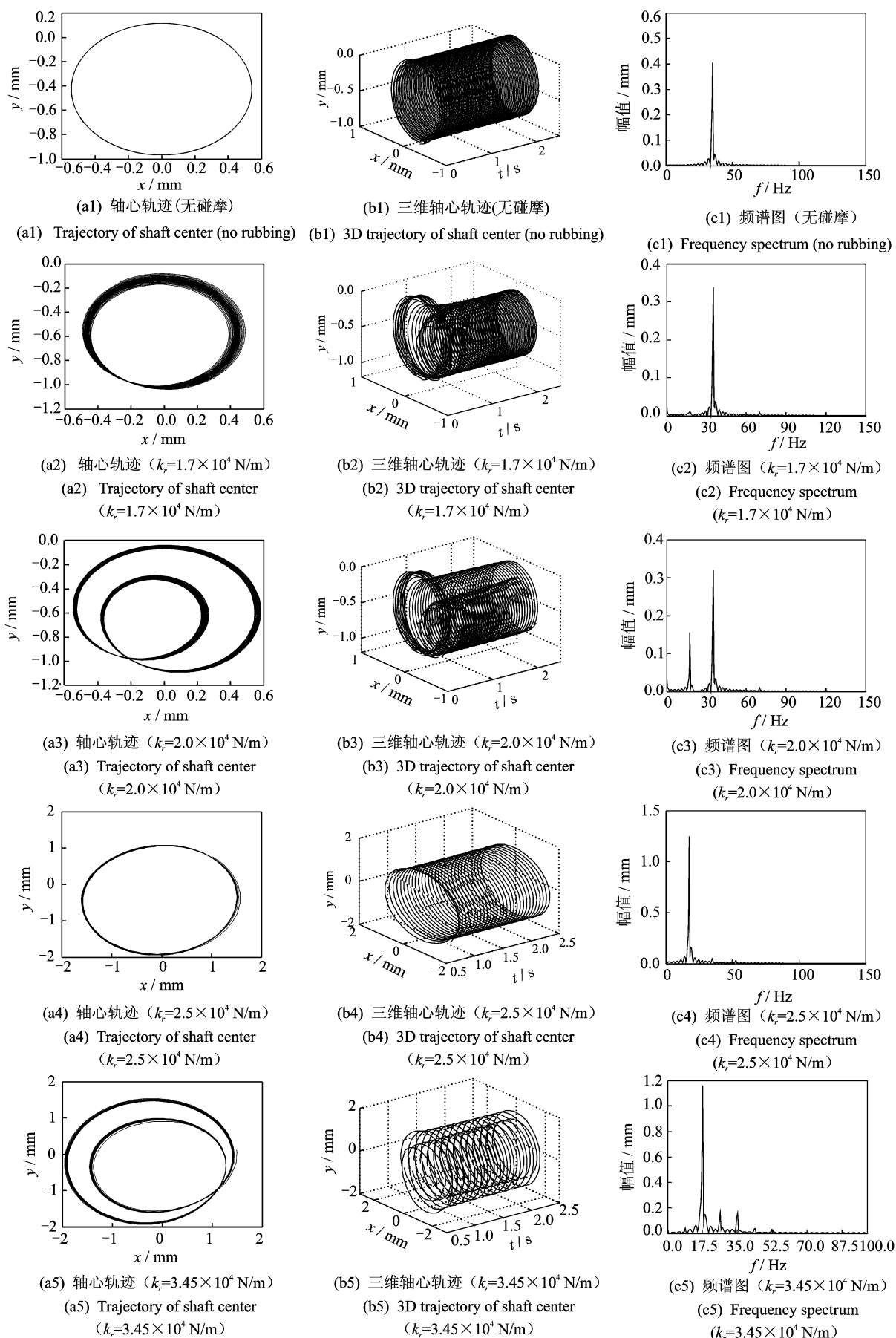


图 8 不同静子刚度情况下碰摩损伤转子-轴承系统响应

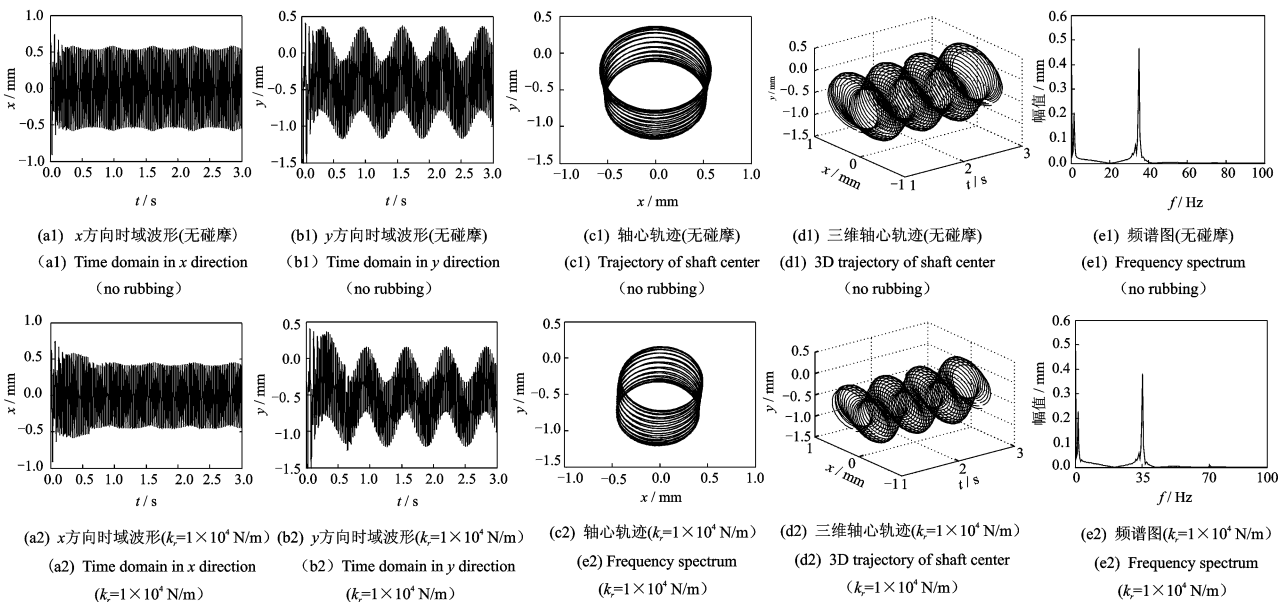
Fig. 8 Response of rotor-bearing system with rub-impact damage under different stator stiffness



油膜力的软支撑特性,使得工频附近的对称频带消失,取而代之的是较宽的工频频带基础。当静子刚度为  $k_r=1\times 10^4$  N/m 时,即碰摩从轻微程度开始时,时域波形振幅减小,轴心轨迹向一侧倾斜,频谱图中没有明显的频率成分变化,但出现了微弱的 2 倍频成分。当静子刚度增至  $1.4\times 10^4$  N/m 时,轴心轨迹倾斜更为明显,频谱图中增加了 1/2 倍频成分,表明碰摩因素渐渐占据主导作用。随着静子刚度的继续增大,当  $k_r=1.5\times 10^4$  N/m 时,系统时域信号变化剧烈,轴心轨迹呈一系列互相重叠的“双环”状。从三维连续轴心轨迹中发现,随着静子刚度的增大、碰摩的加剧,轴心轨迹之间间隙加大,说明系统响应中存在低频成分并逐渐加强。从图 9(e4)的频谱图中看出,由于碰摩作用的加强和质量慢变的影响,使得 1/2 倍频成分附近出现以 1/2 倍频为中心的左右对称频带,说明随着碰摩的加剧,使得质量慢变特性附着在低频成分附近,表现出特有的质量慢变碰摩损伤转子-轴承系统特性。当静子刚度为  $2\times 10^4$  N/m 时,时域波形振动进一步加强,轴心轨迹呈较为紊乱的重叠或嵌套“双环”状。但是从三维连续轴心轨迹图中可以发现,由于碰摩的作用,使得部分轴心轨迹局部凹陷,同时,轴心轨迹之间的间隙进一步加大,疏密间隔,说明系统响应低频成分的增大的趋势。从频谱图中可以看出,系统响应的各频率成分中 1/2 倍频成分幅值超越工频成分,且频率成分呈连续状频带分布,并且随着碰摩的加强,频谱图中出现 3/2 倍频成分。当静子刚度

继续增大至  $2.2\times 10^4$  N/m 时,系统响应进一步加强,频谱图中清晰地表现了 1/2 倍频、工频、3/2 倍频成分及其附近由于质量慢变特性引起的连续频带。当静子为  $2.5\times 10^4$  N/m 时,1/2 倍频完全占据主导地位,工频和 3/2 倍频成分相对微弱,整个频谱图中出现连续状的频率分布特性。在以上的分析中,随着静子刚度的增大和碰摩作用的增强,着重讨论了碰摩引起的 1/2 倍频和 3/2 倍频的出现,但是从频谱图中依然可以发现高频成分的存在,如 2 倍频成分等,只是相对低频和高次分频谐波成分而言,更高次的频率成分较为微弱,因此没有作重点的讨论。

从以上分析可以看出,考虑了油膜支撑作用的质量慢变碰摩损伤转子-轴承系统的非线性动力学响应更为复杂。具体说来,当静子刚度较小,即碰摩作用较弱时,系统表现出工频成分和  $t$  时间尺度下的慢变频率特性,没有表现出慢变作用导致的多成分频带现象;随着静子刚度的增大,即碰摩作用的加强,系统出现低次谐波(分数工频)成分,且碰摩作用愈强,低次谐波成分愈明显;当静子刚度增大至一定水平时,质量慢变作用产生的多成分频带开始附着在低次谐波(分数工频)成分附近,且随着碰摩程度的进一步增强,慢变作用产生的频带附着现象更为明显,在系统出现的各次主谐波;当碰摩现象剧烈至一定程度,系统频率响应完全以低次谐波成分为主,其他各频率成分由于相对微弱,在频谱图中以连续状的频率成分出现。



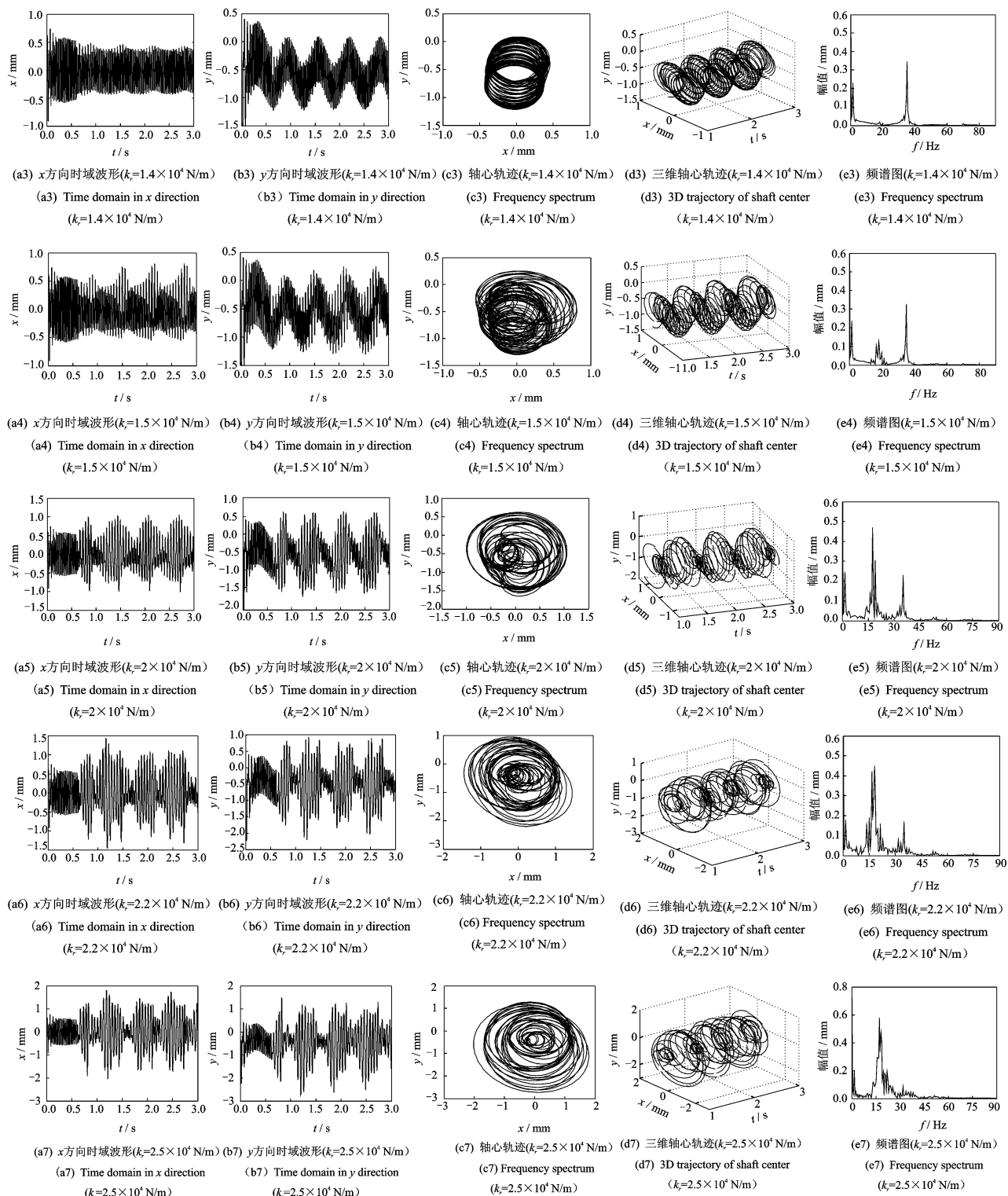


图9 不同静子刚度情况下质量慢变碰摩擦损伤转子-轴承系统响应

Fig. 9 Response of rotor-bearing system with slowly varying mass and rub-impact damage under different stator stiffness

## 4 结束语

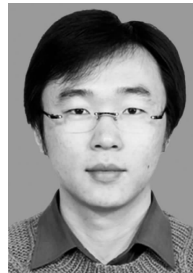
将质量慢变转子系统推广为广义惯性损伤转子

系统,研究了质量慢变转子系统相位突变导致的动力学响应问题,指出相位突变除了带来时域信号的局部突变和轴心轨迹的“扭转”外,其时域信号的Morlet重排尺度图中频率冲击成分更能说明相位突变带来的动力学响应变化。对比研究了质量慢变

转子-轴承系统孪生碰摩损伤的非线性动力学响应,指出考虑了质量慢变因素的碰摩损伤转子-轴承系统除了具有无质量慢变碰摩损伤转子-轴承系统的时频响应特点外,前者由于质量慢变因素的影响,使得频率响应的各次主谐波频率成分附近,随着碰摩程度的不同,呈现以慢变频率为增减量的频带分布特点。同时,在分析过程中,使用三维轴心轨迹图不仅能体现轴心轨迹随时间的变化,更能够从时域上体现轴心轨迹之间间隔变化,从而发现和推断系统响应中频率成分的改变。

## 参 考 文 献

- [1] 闻邦椿,顾家柳,夏松波,等. 高等转子动力学—理论与应用[M]. 北京:机械工业出版社,2000:34-38.
- [2] 李以农,郑玲,闻邦椿. 一类具有参数慢变的非线性振动系统[J]. 重庆大学学报,2000,23(6):16-18.  
Li Yinong, Zheng Ling, Wen Bangchun. Study on the nonlinear vibration system with slow-changing parameters[J]. Journal of Chongqing University, 2000, 23(6): 16-18. (in Chinese)
- [3] Ю. А. 米特洛波利斯基. 非线性振动系统中的不平稳过程[M]. 吴沧浦,译. 北京:科学出版社,1958:18-22.
- [4] 韩清凯,刘杰,闻邦椿. 不对称滞回模型的一般形式及其参数慢变特性[J]. 振动与冲击,2000,19(3):14-16.  
Han Qingkai, Liu Jie, Wen Bangchun. General formulations of asymmetrical hysteretic models and the slowly-varying characteristics of their parameters[J]. Journal of Vibration and Shock, 2000, 19(3): 14-16. (in Chinese)
- [5] 周鹏,刘挺,冯霏,等. 松动-碰摩发展过程中的非线性慢变问题[J]. 振动、测试与诊断,2012,32(S):123-125.  
Zhou Peng, Liu Ting, Feng Fei, et al. Nonlinear slowly varying problems in development process of loose-rubbing[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(S): 123-125. (in Chinese)
- [6] 刘华峰,李建兰,余辰,等. 非线性转子系统碰摩故障的突变性能分析[J]. 振动、测试与诊断,2012,32(6):945-949.  
Liu Huafeng, Li Jiannan, Yu Chen, et al. Catastrophe performance analysis of rub-impact fault of nonlinear rotor system[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(6): 945-949. (in Chinese)
- [7] 于涛. 损伤转子动力学及其故障诊断若干关键问题研究[D]. 沈阳:东北大学,2007.
- [8] Cveticanin L. Chaos in rotors with slowly varying mass[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 185(5): 897-901.
- [9] Cveticanin L. Normal mode of vibration for continuous rotors with slow time variable mass[J]. Mechanism and Machine Theory, 1997, 32(7): 881-891.
- [10] 王宗勇,吴敬东,闻邦椿. 质量慢变转子-滚动轴承系统的支承松动故障分析[J]. 中国机械工程,2005,16(13):1197-1200.  
Wang Zongyong, Wu Jingdong, Wen Bangchun. Study on pedestal looseness faults of a rotor-roll bearing system with slowly varying mass[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(13): 1197-1200. (in Chinese)
- [11] 王宗勇,龚斌,闻邦椿. 激励幅值慢变转子系统的动力学研究[J]. 中国机械工程,2007,18(24):2969-2973.  
Wang Zongyong, Gong Bin, Wen Bangchun. Study on dynamics of rotor systems with slowly varying excitation magnitude[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(24): 2969-2973. (in Chinese)
- [12] 王宗勇. 参数慢变转子系统动力学及其故障研究[D]. 沈阳:东北大学,2004.



**第一作者简介:**于涛,男,1979年2月生,副教授。主要研究方向为机械动态设计、转子动力学与故障诊断。曾发表《双裂纹转子系统非线性动力学特性研究》(《振动与冲击》2013年第32卷第19期)等论文。

E-mail: yt\_126@126.com



