正则化技术在状态空间载荷识别中的应用*

马 超， 华宏星
（上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室 上海，200240）

摘要 针对载荷识别问题中的不适定性，提出了一种基于局部最小准则（local minimum criterion，简称 LMC）的正则化技术处理方法。通过对线性系统离散状态空间方程的研究，建立了基于该正则化技术的状态空间载荷识别数学模型。仿真结果表明，该方法能有效地识别出载荷且计算效率较高，并结合数值试验结果分析研究了测点数、采样时间间隔和激励力频率因素对识别结果的影响，为载荷识别的高精度提供参考。

关键词 载荷识别；正则化技术；状态空间；采样时间间隔；测点数
中图分类号 TH113；TB122；O313

引 言

在许多实际工程问题中，精确地了解作用于结构上的外载荷对结构优化设计和故障诊断起着非常重要的作用。获得载荷最直接的方法是利用力传感器测量，然而在很多实际问题中，结构上一般无法布置力传感器，可是结构的响应却往往较易获得，因此载荷识别技术得以发展，涌现了很多新的技术[1-5]。Hwang 等[6]把卡尔曼滤波技术引入到对模态载荷的估计中，并取得了较好的效果。秦远田[7]根据张量积二维小波理论，利用 Daubechies 小波的正交性，建立了基于梁结构动力学方程和有限元方程的一维分布动载荷的识别方法。Lu 等[8]基于动响应对力参数的灵敏度技术对正弦力和冲击力进行了识别，取得了较满意的结果。朱广荣等[9]基于结构动力学正问题 Wilson-θ 算法的基本理论，推导了时域逆问题动载荷识别的改进算法，实现了多自由度系统的动载荷识别。虽然载荷识别技术近些年取得了巨大的成就，但是载荷识别技术属于动力学逆问题，该类问题往往具有不适定性。为了获得稳定解，笔者在建立的状态空间载荷识别模型上，采用正则化技术来辨识载荷。在正则化技术的应用过程中，正则化参数的选取起着关键的作用，笔者提出了采用局部最小准则来选取参数，并通过数值试验验证了方法的鲁棒性。

1 状态空间载荷识别模型

对于线性时不变动态系统，其离散状态空间方程可以表示为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_k \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{x}_k$ 为状态空间变量；$\boldsymbol{f}_k$ 为外载荷向量；$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别为系统矩阵、输入矩阵和输出影响矩阵；$\boldsymbol{y}_k$ 为响应向量。

假定初始状态量 $\boldsymbol{x}_0$ 已知，将式(1)代入式(2)中，则式(2)最终可用矩阵形式来表示

$$\boldsymbol{Y}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{CAx}_0\\ \boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{x}_0\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{CA}^k\boldsymbol{x}_0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{CB} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{CAB} & \boldsymbol{CB} & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{CA}^{k-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{CA}^{k-2}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{CB}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_0\\ \boldsymbol{f}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{f}_{k-1}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{HF} \tag{3}$$

式(3)即为笔者进行状态空间载荷识别的数学模型。

---

* 国家自然科学基金资助项目(11172166)
收稿日期：2014-03-22；修回日期：2014-05-13

2　Tikhonov 正则化参数确定准则

2.1　Tikhonov 正则化技术

由于实测的响应数据中都含有噪声，因此式(3)中的等式是不成立的。定义误差函数为

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{HF} \tag{4}$$

为了使误差最小，Tikhonov 给出目标函数

$$J=(\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e})+\lambda(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})=(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{HF})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{HF})+\lambda(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) \tag{5}$$

其中：λ 为正则化参数；T 为 Hermitian 转置。

为了使目标函数最小，将函数 J 对载荷 $\boldsymbol{F}$ 求导，并令其等于零。因此载荷可表示为

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}+\lambda\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{6}$$

对结构系数矩阵 $\boldsymbol{H}$ 进行奇异值分解

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{USV}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{u}_i s_i \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

将式(7)代入式(6)可得正则解为

$$\boldsymbol{F}_\lambda=\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^2}{s_i^2+\lambda^2}\frac{\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}}{s_i}\boldsymbol{v}_i \tag{8}$$

下面将对确定正则化参数的准则作简要介绍。

2.2　局部最小准则(LMC)

从式(6)中发现参数 λ 的选取直接影响最终识别结果的成败，因此必须谨慎选取。笔者提出采用 LMC 准则来选取正则化参数，首先定义如下残差范数和解的范数

$$R_\lambda=\|\boldsymbol{HF}_\lambda-\boldsymbol{Y}\|_2^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda^2}{s_i^2+\lambda^2}\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}Y\right)^2+\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{UU}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Y}\|_2^2 \tag{9}$$

$$\eta_\lambda=\|\boldsymbol{F}_\lambda\|_2^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{s_i^2}{s_i^2+\lambda^2}\frac{\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}Y}{s_i}\right)^2 \tag{10}$$

根据文献[10]可知，当正则化参数 λ 递增时，解范数 η_λ 也逐渐递增，而残差范数 R_λ 却逐渐降低。因此为了平衡解范数和残差范数，获得最佳正则化参数，定义函数[11]

$$\mathrm{LMC}(\lambda)=R_\lambda\eta_\lambda \tag{11}$$

令 $\hat{R}_\lambda=\ln R_\lambda$，$\hat{\eta}_\lambda=\ln\eta_\lambda$，则式(11)可表示为

$$\mathrm{LMC}(\lambda)=R_\lambda\eta_\lambda=e^{(\hat{R}_\lambda+\hat{\eta}_\lambda)} \tag{12}$$

为了求出最佳正则化参数，对式(12)求参数 λ 的一阶导数，令其等于 0，得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{R}_{\bar{\lambda}}}{\mathrm{d}\hat{\eta}_{\bar{\lambda}}}+1=0 \tag{13}$$

从式(13)可知，函数曲线 LMC(λ)在点($\hat{R}(\bar{\lambda})$，$\hat{\eta}(\bar{\lambda})$)与直线 $\hat{R}_\lambda+\hat{\eta}_\lambda=M$($M$ 为常数)相切。当 LMC(λ)取得最小值时，从式(12)可以发现函数 $\hat{R}_\lambda+\hat{\eta}_\lambda$ 也达到最小值，即函数曲线 LMC(λ)在点($\hat{R}(\bar{\lambda})$，$\hat{\eta}(\bar{\lambda})$)的邻近区域内的所有点都位于直线 $\hat{R}_\lambda+\hat{\eta}_\lambda=\hat{R}(\bar{\lambda})+\hat{\eta}(\bar{\lambda})$ 的上方。结合式(9)和式(10)，式(13)可以表示为

$$\bar{\lambda}^2\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^2-\bar{\lambda}^2}{(s_i^2+\bar{\lambda}^2)^2}(\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}Y)^2-\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{UU}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Y}\|_2^2=0 \tag{14}$$

式(14)即为本研究进行正则化参数选取的公式。

3　数值仿真

图 1 为一简支梁模型示意图，其主要参数为：长 L=1 m；宽 W=5 mm；高 H=10 mm；弹性模量为 2.1×10^{11} Pa；泊松比为 0.3；密度为 7 800 kg/m^3。在梁的中心位置作用 $10\sin(2\pi ft)$ 正弦激励力，其中 f=23.5。测点布置在梁的 1/4L，1/2L 和 3/4L 位置处。为了模拟真实情况，利用式(15)在响应数据中添加噪声。

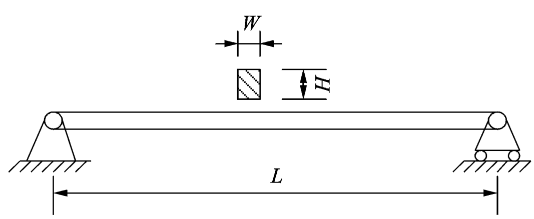

图 1　简支梁示意图

Fig.1　The schematic diagram of the simply supported beam

$$Y=Y_{\mathrm{cal}}+\alpha\,\mathrm{std}(Y_{\mathrm{cal}})R_{\mathrm{noise}} \tag{15}$$

其中：Y_{cal} 为计算响应值；R_{noise} 为正态随机噪声；α 为噪声因子；std(.)表示标准差。

下面定义量化指标来评估识别精度

$$E_{\mathrm{rror}}=\frac{\|f_{\mathrm{id}}-f_{\mathrm{true}}\|_2}{\|f_{\mathrm{true}}\|_2}\times100\% \tag{16}$$

其中：f_{id} 为识别载荷；f_{true} 为真实载荷。

表 1 列出了该结构前 10 阶的固有频率。

在测量过程中，采样时间间隔为 0.001 s，采样时间定义为 0.2 s，在响应数据中加入 α=0.01 的噪

表 1 前 10 阶系统固有频率

Tab. 1 The lowest ten natural frequencies of structure

模态阶数	1	2	3	4	5
f/Hz	23.63	95.77	220.26	403.93	657.20
模态阶数	6	7	8	9	10
f/Hz	995.11	1 438.7	2 017.1	2 769.4	3 747.2

声模拟实测响应数据。图 2 为识别结果图，从图中可以看出，识别结果曲线与真实载荷曲线很好地吻合，说明该方法具有较高的识别精度。为了进一步研究该方法的特性，接下来从计算效率和不同噪声干扰下的识别效果两方面对 LMC 法、广义交叉检验准则(generalized cross-validation criterion，简称 GCV)和 L 曲线法进行了对比研究。表 2 列出了在不同噪声情况下，L 曲线法、GCV 和 LMC 法的 CPU 耗时。通过这些数据可以发现，采用 LMC 法的 CPU 耗时最少，这主要是因为当使用 L 曲线来选取正则参数时，其最佳正则参数的获得是通过 L 曲线上的最大曲率来选取的。曲率计算公式[12]为

$$L=\frac{\rho'\theta''-\rho''\theta'}{((\rho')^2+(\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{17}$$

其中：$\rho=\|\boldsymbol{HF}-\boldsymbol{Y}\|_2$；$\theta=\|\boldsymbol{F}\|_2$。

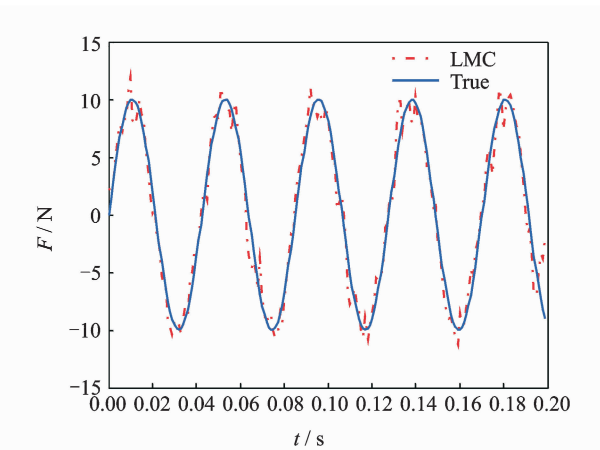

图 2 识别结果图

Fig. 2 The force identification result

表 2 在不同噪声情况下 3 种准则下的 CPU 耗时

Tab. 2 CPU time of the three methods with different noise level

噪声程度	CPU 耗时/s		
	L 曲线	GCV	LMC
0.01	0.013 174	0.005 964	0.004 454
0.03	0.013 856	0.006 217	0.005 992
0.05	0.016 004	0.009 413	0.006 269

在求解最佳正则参数的过程中需要计算残差范数和解范数的导数，从而导致耗时较多。当采用 GCV 方法时，其参数选取公式[13]为

$$G(\lambda)=\frac{\|\boldsymbol{HF}-\boldsymbol{Y}\|_2^2}{(\mathrm{trace}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{HH}^{\mathrm{reg}}))^2} \tag{18}$$

其中：$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}^{\mathrm{reg}}\boldsymbol{Y}$。

在求解过程中需要计算式(18)分母项中矩阵 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{HH}^{\mathrm{reg}}$ 的迹，因此耗时也相对较多。而 LMC 法却避免了求导和求迹的过程，因此计算效率相对较高。对比研究了 3 种准则下的识别效果，图 3 为在不同噪声情况下利用 3 种准则求得的识别误差曲线图。从图中可以看出：当在低噪声($a\leqslant0.025$)干扰下，利用 GCV 准则的识别精度最高，LMC 准则次之；当在中噪声($0.025<a<0.175$)干扰下，LMC 的识别精度最高；当在高噪声($a\geqslant0.175$)干扰下，LMC 的识别效果不如 L 曲线准则效果好。

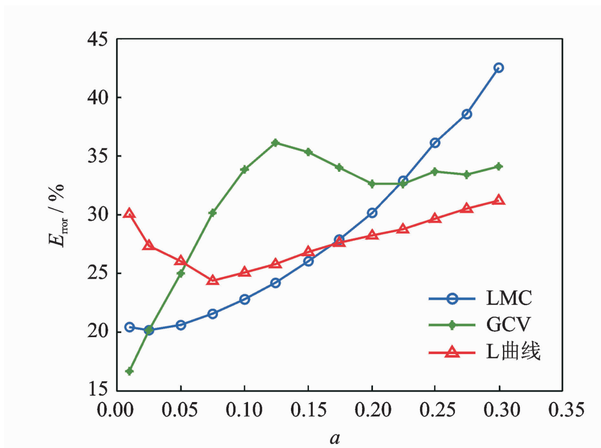

图 3 不同噪声情况下的识别误差曲线图

Fig. 3 Identification error curves with the different noise level

4 讨论与分析

下面从采样时间间隔、测点数和作用力频率方面研究这些因素对识别结果的影响。

4.1 采样时间间隔对识别结果的影响

为了研究采样时间间隔对识别结果的影响，笔者在以上测试条件不变的情况下，改变采样时间步长进行载荷识别研究。表 3 列出了不同采样时间间隔下的识别误差。从误差数据可以看出：当采样时间间隔从 0.005 s 减低到 0.001 s 时，识别误差值明显变小，识别精度显著提高；而当采样时间间隔从 0.001 s降到 0.000 5 s 时，识别误差值降低并不是

很明显。进一步对数据进行分析发现，当采样时间间隔为 0.001 s，其对应的采样频率为 1 000 Hz。结合表 1 发现，该范围包含了结构前 4 阶的模态信息，而再增加采样频率范围时(即降低采样时间间隔)，识别精度的影响并不是很明显，说明前几阶的模态信息对识别精度有很大影响。

表 3　不同采样时间间隔下的识别误差

Tab. 3　Identification errors with different sampling time interval

采样时间间隔/s	0.000 5	0.000 8	0.001	0.001 6
识别误差/%	19.38	19.78	20.38	21.56
采样时间间隔/s	0.002	0.002 5	0.004	0.005
识别误差/%	25.89	30.15	38.35	44.79

4.2　测点数对识别结果的影响

假定待识别载荷数为 n，测点数为 m，采样点数为 l，式(3)可以表示为

$$\boldsymbol{Y}_{ml\times 1}=\boldsymbol{H}_{ml\times nl}\boldsymbol{F}_{nl\times 1} \tag{19}$$

为了能反演出载荷值，需要满足 $ml\geqslant nl$，即 $m\geqslant n$，从而可知测点数至少应等于待识别的载荷数。为了分析测点数对识别结果的影响，笔者对不同测点数下的识别结果进行了研究。表 4 列出了在 $\alpha=0.01$噪声情况下不同测点数下的识别误差，从中可以看出：当测点数从 2 增加到 3 时，识别精度具有明显的改善；但是当测点数大于等于 3 后，随着测点数的增加，识别精度变化不大，趋于稳定，说明当测点数超过一定数值时再增加测点数对识别精度的提高并不是很明显。为了进一步说明在其他类型噪声干扰下的情况，对 1/4L 处的测点响应数据施加噪声程度为 0.001 的 50 Hz 的正弦噪声。表 5 列出了其在不同测点数下的识别误差值。从这些数据可以发现类似的现象，即测点数大于 3 时，识别精度的提高并不明显。

表 4　在 α=0.01 噪声情况下不同测点数下的识别误差

Tab. 4　Identification errors with α=0.01noise and different measuring number

测点数	测点位置	识别误差/%
2	1/4L,1/2L	28.25
3	1/4L,1/2L,3/4L	20.38
4	1/8L,1/4L,1/2L,3/4L	21.88
5	1/8L,1/4L,1/2L,3/4L,7/8L	20.41

表 5　在 α=0.001 的 50 Hz 正弦噪声情况下不同测点数下的识别误差

Tab. 5　Identification errors with α=0.001sinusoidal noise and different measuring number

测点数	测点位置	识别误差/%
2	1/4L,1/2L	43.54
3	1/4L,1/2L,3/4L	34.41
4	1/8L,1/4L,1/2L,3/4L	33.58
5	1/8L,1/4L,1/2L,3/4L,7/8L	33.18

4.3　作用力频率对识别结果的影响

在采样条件不变情况下逐渐改变作用力的频率值，研究了在不同频率作用下识别精度的变化情况。图 4 为 α=0.01 高斯噪声干扰下当作用力频率在 5～200 Hz范围下的识别误差图。从图中发现：当作用力频率在 5～24 Hz 范围内，识别误差曲线变化不是很大；当作用力频率大于 24 Hz 时，随着载荷频率的增大，识别误差逐渐增大，且频率与误差的关系接近于线性关系。

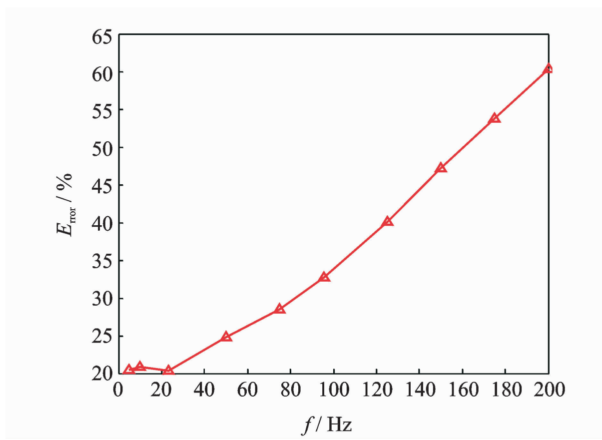

图 4　不同频率下识别误差图

Fig. 4　The identification error with different frequencies

5　结束语

针对状态空间载荷识别问题的不适定性，采用了正则化技术来处理，并采用局部最小准则来选取正则化参数。数值仿真结果表明，该法在载荷识别方面具有很好的鲁棒性和有效性。通过与传统的参数选取准则对比，该准则计算效率更高。

参　考　文　献

[1]　Allen M S, Carne T G. Delayed, multi-step inverse

structural filter for robust force identification[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22 (5): 1036-1054.

[2] 秦远田,陈国平,张方. 二维分布动载荷识别的矩量方法[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32 (1): 34-41.
Qin Yuantian, Chen Guoping, Zhang Fang. Moment method of two-dimension distributed load identification [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(1):34-41. (in Chinese)

[3] Lourens E , Edwim R ,Guido D R, et al. An augmented Kalman filter for force identification in structural dynamics[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 27:446-460.

[4] 毛玉明,郭杏林,赵岩, 等. 基于灵敏度分析的结构动态载荷识别研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(10): 1-3.
Mao Yuming, Guo Xinglin, Zhao Yan, et al. Force identification based on sensitivity analysis method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 19 (10): 1-3. (in Chinese)

[5] Lage Y, Maia N, Neves M, et al. Force identification using the concept of displacement transmissibility[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(7): 1674-1686.

[6] Hwang J, Kareem A, Kim W. Estimation of modal loads using structural response[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 326 (3): 522-539.

[7] 秦远田. 分布动载荷识别的二维小波-伽辽金方法[J]. 振动、测试与诊断, 2013, 32(6): 1005-1009.
Qin Yuantian. Two-dimension wavelet-galerkin method for distributed load identification[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2013, 32 (6): 1005-1009. (in Chinese)

[8] Lv Zhongrong, Law S. Force identification based on sensitivity in time domain[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2006, 132 (10): 1050-1056.

[9] 朱广荣,陈国平,张方, 等. 基于Wilson-θ算法的动载荷识别及影响因素[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32 (5): 709-713.
Zhu Guangrong, Chen Guoping, Zhang Fang, et al. Dynamic load identification based on wilson-θ method and influence factors[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012 , 32(5): 709-713. (in Chinese)

[10] Hansen P C. Regularization tools: a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems [J]. Numerical Algorithms, 1994, 6 (1): 1-35.

[11] Reginska T. A regularization parameter in discrete ill-posed problems[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1996, 17 (3): 740-749.

[12] 李绍新,许晓安,徐军发, 等. 基于L曲线法正则参数优化反演光子相关光谱[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2010, 38(6): 102-106.
Li Shaoxin, Xu Xiaoan, Xu Junfa, et al. Inversion of photon correlation spectroscopy by means of L-curve optiminzing regular parameters[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2010,38(6): 102-106. (in Chinese)

[13] Golub G H, Heath M, Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter[J]. Technometrics, 1979, 21(2): 215-223.

第一作者简介:马超,男,1982年10月生,博士研究生。主要研究方向为动载荷识别、结构振动与振动测试。曾发表《Acoustic radiation form thick laminiated cylindrical shells with sparse cross stiffeners》(《Journal of Vibration and Acoustics》2013,Vol. 135,No. 3)等论文。
E-mail:mike8210@163.com