

# 分布参数双层隔振系统建模及其振动传递特性\*

杨明月, 孙玲玲, 王晓乐

(山东大学高效洁净机械制造教育部重点实验室 济南, 250061)

**摘要** 从振动能量传递观点及工程实际隔振设计的角度出发,建立了中间连续筏体和中间分散质量两类双层隔振系统的解析模型。考虑连续筏体、隔振器及安装基础的分布参数特性,基于导纳矩阵理论对两类双层隔振系统的动态特性传递方程进行了理论推导。以功率流为价值函数揭示了系统振动传递机理并阐述了实际双层隔振设计需遵循的一般规律。实例研究表明:力矩激励在隔振系统能量传输中扮演着重要角色,应尽量减少力矩扰动带来的能量注入;在能耗效率及安装空间允许条件下,适当放大中间质量可获得最佳的隔振效果;中间筏体的柔性、隔振器的分布参数特性以及安装基础的非刚性因素使得中高频隔振性能恶化,采用中间分散质量方案可有效避免筏体柔性模态影响,并能显著降低隔振器驻波同柔性筏体模态间的耦合交互引起的能量峰值。

**关键词** 双层隔振; 中间质量; 导纳矩阵; 分布参数; 驻波效应

**中图分类号** TB55; TH138

## 引言

在能源日益紧张的当今,为提高能耗利用效率,大量轻薄化结构广泛应用在车辆、舰船、航空航天器中,加之动力装置的高速重载化趋势,使得安装基础的柔性特质凸显,由此激发的基础结构高频振动及其辐射噪声成为亟待解决的工程实际问题。在振动控制措施当中,最常用的是振动隔离技术<sup>[1]</sup>。高频域的隔振研究开始较早,Unger等<sup>[2]</sup>及Snowdon<sup>[3]</sup>给出了高频隔振设计应遵循的一般准则,即隔振器的驻波效应、基础的模态特性均需考虑,并指出为提升高频隔振效果可采取双层隔振措施。在隔振器驻波效应研究方面,文献<sup>[4-5]</sup>将橡胶隔振器模化为分布参数的均直杆结构,以阐述隔振器的内共振对系统功率流、力传递率及辐射声功率的影响。文献<sup>[6-7]</sup>分别将安装基础考虑成分布参数的梁、板类结构,探讨了单层隔振系统中隔振器驻波效应及基础柔性对系统传递率、功率流特性的影响。

双层隔振系统的隔振效果主要取决于插入的中间质量大小。在车船等运载工具内,动力装置连同辅机设备往往通过隔振支承安装在大型筏体上,受限于机组维度及安装空间,筏体的柔性特质在中高频段极易被激发<sup>[8]</sup>。因而,相较于单层隔振系统,双层隔振系统中多出的中间质量结构同上、下两层隔

振支承以及安装基础结构间的耦合振动机理更加复杂。以往对于双层隔振系统的理论分析及试验研究大多采用近似处理方法,主要表现在外扰激励仅考虑垂向力,忽视力矩激励成分的影响<sup>[9-10]</sup>。忽略隔振器的分布参数特性,以复刚度弹簧模型表征其动态特性<sup>[11-14]</sup>;中间质量考虑成简单刚体结构<sup>[12-14]</sup>;安装基础认为绝对刚性<sup>[9-13]</sup>。尽管这些近似处理方法在特定条件下就研究对象取得了较为满意的结果,但难以精确阐明高频域隔振器驻波效应与中间质量的柔性以及安装基础弹性模态之间的耦合作用影响机理。鉴于当前双层隔振系统建模分析的不健全,对双层隔振系统进行完备的分布参数化建模十分必要。

笔者针对工程实际采用的两类由多向复合扰动振源(包含力、力矩激励)、橡胶隔振器、中间质量(柔性连续筏体或分散质量块)、弹性基础结构组成的双层被动隔振系统,建立其分布参数分析模型。基于导纳矩阵理论推导总体系统的动态特性传递方程。结合实例,以功率流为价值函数探讨双层隔振系统的振动传递机理及隔振效果。

## 1 双层隔振系统解析模型

从工程实际隔振设计的角度出发,大中型动力机械或发电机组的隔振装置一般相对坐标平面  $yOz$

\* 国家自然科学基金资助项目(51174126)

收稿日期:2014-04-17;修回日期:2014-07-16

呈弹性对称布置。建立图 1 所示的双层隔振系统解析模型。将其沿结构耦联界面分为机器 A、上层隔振支承 B、中间质量 C、下层隔振支承 D 和柔性安装基础 E 五个子系统。中间质量 C 以其不同的配置形式可划为两类<sup>[12]</sup>:连续筏体结构和分散质量结构。两类模型中,上层隔振支承包含  $m$  个隔振器,下层隔振支承包含  $n$  个隔振器。

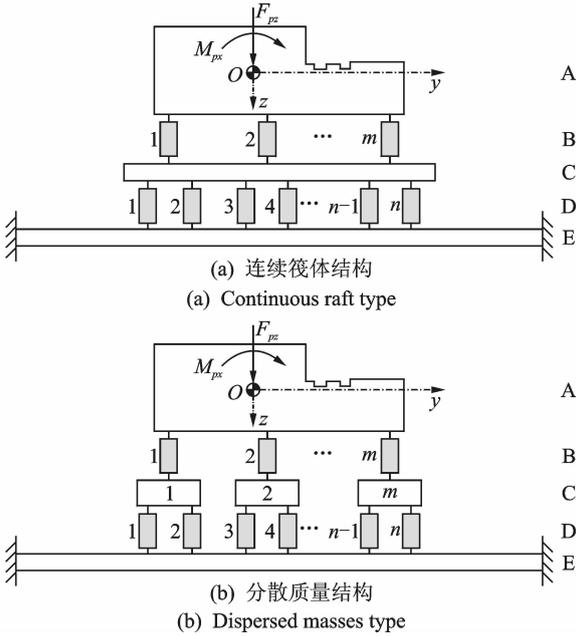


图 1 隔振系统示意图

Fig. 1 Scheme of a complete isolation system

为便于分析与综合,各子系统采用局部坐标系。局部坐标系的建立以及与全局坐标系的转化关系同文献[14]。按照振动传递方向定义各子系统的输入输出端及其广义扰动力和速度矢量,建立总体系统的耦合振动传递模型,如图 2 所示。

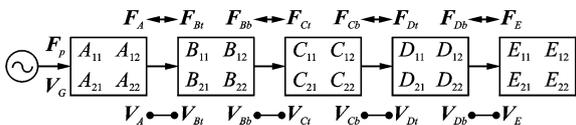


图 2 隔振系统耦合振动传递模型

Fig. 2 Coupled vibration transfer model of isolation system

$F_p = [F_{pz}, M_{px}]^T$  表示作用于机器各惯性主轴上的广义扰动力矢量。 $V_G = [\dot{w}_{Gz}, \dot{\theta}_{Gx}]^T$  为机器重心处的速度响应矢量。 $F_A$  和  $V_A$  分别为机器输出端的广义力与速度响应,所含具体元素分别为

$$F_A = [F_{Ax}^1, M_{Ax}^1, F_{Ax}^2, M_{Ax}^2, \dots, F_{Ax}^m, M_{Ax}^m]^T$$

$$V_A = [\dot{w}_{Ax}^1, \dot{\theta}_{Ax}^1, \dot{w}_{Ax}^2, \dot{\theta}_{Ax}^2, \dots, \dot{w}_{Ax}^m, \dot{\theta}_{Ax}^m]^T$$

上层隔振支承子系统中  $m$  个隔振器输入、输出端的广义力与速度响应矢量分别为

$$F_{Bt} = [F_{Bzt}^1, M_{Bzt}^1, F_{Bzt}^2, M_{Bzt}^2, \dots, F_{Bzt}^m, M_{Bzt}^m]^T$$

$$V_{Bt} = [\dot{w}_{Bzt}^1, \dot{\theta}_{Bzt}^1, \dot{w}_{Bzt}^2, \dot{\theta}_{Bzt}^2, \dots, \dot{w}_{Bzt}^m, \dot{\theta}_{Bzt}^m]^T$$

$$F_{Bb} = [F_{Bzb}^1, M_{Bzb}^1, F_{Bzb}^2, M_{Bzb}^2, \dots, F_{Bzb}^m, M_{Bzb}^m]^T$$

$$V_{Bb} = [\dot{w}_{Bzb}^1, \dot{\theta}_{Bzb}^1, \dot{w}_{Bzb}^2, \dot{\theta}_{Bzb}^2, \dots, \dot{w}_{Bzb}^m, \dot{\theta}_{Bzb}^m]^T$$

上层隔振支承输入到中间质量子系统的广义力及相应速度矢量分别为

$$F_{Ct} = [F_{Czt}^1, M_{Czt}^1, F_{Czt}^2, M_{Czt}^2, \dots, F_{Czt}^m, M_{Czt}^m]^T$$

$$V_{Ct} = [\dot{w}_{Czt}^1, \dot{\theta}_{Czt}^1, \dot{w}_{Czt}^2, \dot{\theta}_{Czt}^2, \dots, \dot{w}_{Czt}^m, \dot{\theta}_{Czt}^m]^T$$

中间质量子系统对下层隔振支承输出的力与相应的速度矢量分别为

$$F_{Cb} = [F_{Czb}^1, M_{Czb}^1, F_{Czb}^2, M_{Czb}^2, \dots, F_{Czb}^n, M_{Czb}^n]^T$$

$$V_{Cb} = [\dot{w}_{Czb}^1, \dot{\theta}_{Czb}^1, \dot{w}_{Czb}^2, \dot{\theta}_{Czb}^2, \dots, \dot{w}_{Czb}^n, \dot{\theta}_{Czb}^n]^T$$

下层隔振支承子系统中  $n$  个隔振器输入、输出端的广义力与速度响应矢量分别为

$$F_{Dt} = [F_{Dzt}^1, M_{Dzt}^1, F_{Dzt}^2, M_{Dzt}^2, \dots, F_{Dzt}^n, M_{Dzt}^n]^T$$

$$V_{Dt} = [\dot{w}_{Dzt}^1, \dot{\theta}_{Dzt}^1, \dot{w}_{Dzt}^2, \dot{\theta}_{Dzt}^2, \dots, \dot{w}_{Dzt}^n, \dot{\theta}_{Dzt}^n]^T$$

$$F_{Db} = [F_{Dzb}^1, M_{Dzb}^1, F_{Dzb}^2, M_{Dzb}^2, \dots, F_{Dzb}^n, M_{Dzb}^n]^T$$

$$V_{Db} = [\dot{w}_{Dzb}^1, \dot{\theta}_{Dzb}^1, \dot{w}_{Dzb}^2, \dot{\theta}_{Dzb}^2, \dots, \dot{w}_{Dzb}^n, \dot{\theta}_{Dzb}^n]^T$$

安装基础上  $n$  个输入接点处的力与速度矢量分别为

$$F_E = [F_{Ez}^1, M_{Ez}^1, F_{Ez}^2, M_{Ez}^2, \dots, F_{Ez}^n, M_{Ez}^n]^T$$

$$V_E = [\dot{w}_{Ez}^1, \dot{\theta}_{Ez}^1, \dot{w}_{Ez}^2, \dot{\theta}_{Ez}^2, \dots, \dot{w}_{Ez}^n, \dot{\theta}_{Ez}^n]^T$$

其中: $t, b$  分别代表各子系统的输入端、输出端;上标数字代表隔振支承包接点个数;为简化叙述,文中提到的力、力矩皆指简谐力、力矩,具有时间项  $\exp(j\omega t)$ ;  $j = \sqrt{-1}$  为虚数单位; $\omega$  为外扰频率。

## 2 子系统分析与综合

### 2.1 机器子系统

通常,机器(尤其是大型设备)的基频远大于外扰频率,可视为一般刚性结构。根据牛顿运动定律及结构几何关系,建立机器子系统在外扰激励下的动态方程,以导纳矩阵形式表述为

$$\begin{Bmatrix} V_G \\ V_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_p \\ F_A \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中:导纳矩阵各元素子矩阵具体为  $A_{11} = -A_2^{-1}A_1$ ;  $A_{12} = A_2^{-1}A_4$ ;  $A_{21} = -A_{12}$ ;  $A_{22} = A_3A_2^{-1}A_4$ ;  $A_1 = \text{diag}(-1, -1)$ ;  $A_2 = j\omega M_A$ ;  $A_3 = A_4^T$ ;  $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 & 1 & \dots & \lambda_m & 1 \end{bmatrix}$ ;  $M_A = \text{diag}(m_A, I_{Ax})$  为机器的惯性矩阵,包含机器质量  $m_A$  及绕  $x$  轴向的转动惯量  $I_{Ax}$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  分别为  $m$  个上层隔振支承输入端接点相对机器重心的横向距离。

## 2.2 隔振支承子系统

因黏弹性橡胶隔振器的分布参数特性会在高频诱发驻波效应,降低隔振效率。传统的集总参数模型无法准确预估此时的隔振效果,故将其模化为具有分布质量和迟滞阻尼的圆筒形杆。

导纳矩阵形式描述的上、下层隔振支承子系统动态特性传递方程分别为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{Bc} \\ \mathbf{V}_{Bb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{Bc} \\ \mathbf{F}_{Bb} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{Dc} \\ \mathbf{V}_{Db} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{Dc} \\ \mathbf{F}_{Db} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

其中:导纳矩阵中具体包含的元素子矩阵分别为  $\mathbf{B}_{ij} = \text{diag}(\mathbf{M}_{ij}^1, \mathbf{M}_{ij}^2, \dots, \mathbf{M}_{ij}^n)$ ;  $\mathbf{D}_{ij} = \text{diag}(\mathbf{M}_{ij}^1, \mathbf{M}_{ij}^2, \dots, \mathbf{M}_{ij}^n)$ ;  $i, j = 1, 2$ 。

$\mathbf{M}_{ij}$  中元素为两端同时受力与力矩激励自由杆的原点导纳 ( $i=j$ ) 及跨点导纳 ( $i \neq j$ ) 函数,具体表达式详见文献[7]。

## 2.3 基础子系统

充分考虑安装基础的柔性,以两端固定细长梁模拟基础子系统 E。描述其结构振动特性的导纳矩阵方程为

$$\mathbf{V}_E = \mathbf{E} \mathbf{F}_E \quad (4)$$

其中:导纳矩阵  $\mathbf{E}$  中具体元素为

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \dots & e_{1,n} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \dots & e_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n,1} & e_{n,2} & \dots & e_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$e_{k,l} = \begin{bmatrix} E_{w_{Ex}^k F_{Ex}}^{kl} & E_{w_{Ex}^k M_{Ex}}^{kl} \\ E_{\dot{\theta}_{Ex}^k F_{Ex}}^{kl} & E_{\dot{\theta}_{Ex}^k M_{Ex}}^{kl} \end{bmatrix} \quad (k, l = 1, 2, \dots, n)$$

其中: $l$  为激励点; $k$  为响应点。

$e_{k,l}$  中各导纳元素可采用模态叠加法获得,具体表达式为

$$E_{vf}^{kl} = \frac{j\omega}{R_E} \sum_{\xi=1}^{\infty} \frac{[\varphi_{c-c}^{\xi}(y_E^k)]_{\partial y} [\varphi_{c-c}^{\xi}(y_E^l)]_{\partial y}}{(\omega_{c-c}^{\xi})^2 (1 + j\eta_E) - \omega^2} \quad (5)$$

其中:下标  $v, f$  分别代表速度项(含平动速度  $\dot{w}_{Ex}$ , 转角速度  $\dot{\theta}_{Ex}$ ) 及激励项(含力激励  $F_{Ex}$ , 力矩激励  $M_{Ex}$ );  $R_E$  为模态质量;  $\eta_E$  为阻尼损耗因子;  $\omega_{c-c}^{\xi}$  和  $\varphi_{c-c}^{\xi}(y)$  分别为两端固定细长梁的第  $\xi$  阶模态固有频率及振型函数; 运算符号  $[*]_{\partial y}$  表示转角速度响应或力矩激励时对相应振型函数进行求导操作<sup>[15]</sup>。

## 2.4 中间量子子系统

当中间量子系统为连续筏体时,不能仅视为刚性结构,其柔性特质必须计及,故而模化为两端自

由边界条件细长梁,以导纳矩阵形式描述的整体动态特性方程为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{Ct} \\ \mathbf{V}_{Cb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{Ct} \\ \mathbf{F}_{Cb} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{其中:} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} \end{bmatrix}。$$

$\bar{\mathbf{C}}$  为中间筏体的刚体模态导纳矩阵,可由刚体运动学及动力学定律获得,具体元素为  $\bar{c}_{11} = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_C^{-1} \mathbf{P}$ ,  $\bar{c}_{12} = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_C^{-1} \mathbf{Q}$ ,  $\bar{c}_{21} = \mathbf{Q}^T \mathbf{G}_C^{-1} \mathbf{P}$ ,  $\bar{c}_{22} = \mathbf{Q}^T \mathbf{G}_C^{-1} \mathbf{Q}$ 。其中:  $\mathbf{G}_C = j\omega \mathbf{M}_C$ ,  $\mathbf{M}_C = \text{diag}[m_C, I_{Cx}]$  为筏体惯性矩阵,包含筏体质量  $m_C$  及绕  $x$  轴向转动惯量  $I_{Cx}$ 。

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  分别为上、下层隔振支承接点相对筏体质心的位置矩阵,具体形式分别为  $\mathbf{P} = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ ,  $\mathbf{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ 。其中:  $p_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \kappa_i & 1 \end{bmatrix}$ ;  $q_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon_j & 1 \end{bmatrix}$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $\kappa_i, \epsilon_j$  分别为上、下层隔振支承接点相对筏体重心的横向距离。

$\tilde{\mathbf{C}}$  为筏体弹性模态导纳矩阵,具体形式为

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{1,1} & \tilde{c}_{1,2} & \dots & \tilde{c}_{1,n+m} \\ \tilde{c}_{2,1} & \tilde{c}_{2,2} & \dots & \tilde{c}_{2,n+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{c}_{n+m,1} & \tilde{c}_{n+m,2} & \dots & \tilde{c}_{n+m,n+m} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}_{k,l} = \begin{bmatrix} C_{w_{Cx}^k F_{Cx}}^{kl} & C_{w_{Cx}^k M_{Cx}}^{kl} \\ C_{\dot{\theta}_{Cx}^k F_{Cx}}^{kl} & C_{\dot{\theta}_{Cx}^k M_{Cx}}^{kl} \end{bmatrix} \quad (k, l = 1, 2, \dots, n+m)$$

其中: $l$  为激励点; $k$  为响应点。

采用模态叠加法获得  $\tilde{c}_{k,l}$  中具体元素表达式为

$$C_{vf}^{kl} = \frac{j\omega}{R_C} \sum_{\xi=1}^{\infty} \frac{[\varphi_{f-f}^{\xi}(y_C^k)]_{\partial y} [\varphi_{f-f}^{\xi}(y_C^l)]_{\partial y}}{(\omega_{f-f}^{\xi})^2 (1 + j\eta_C) - \omega^2} \quad (7)$$

其中: $R_C$  为模态质量;  $\eta_C$  为阻尼损耗因子;  $\omega_{f-f}^{\xi}$  和  $\varphi_{f-f}^{\xi}(y)$  分别为两端自由细长梁的第  $\xi$  阶模态固有频率及振型函数。

另外,  $\tilde{\mathbf{C}}$  划成的 4 个分块子矩阵对应维数分别是  $\tilde{c}_{11}$  为  $n \times n$  维,  $\tilde{c}_{12}$  为  $n \times m$  维,  $\tilde{c}_{21}$  为  $m \times n$  维,  $\tilde{c}_{22}$  为  $m \times m$  维。

当中间量子系统为分散质量时,视各分散质量块为刚体结构。由刚体运动理论,得到第  $h$  个分散质量块的动态特性传递方程为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{Ch}^h \\ \mathbf{V}_{Cb}^h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11}^h & \mathbf{c}_{12}^h \\ \mathbf{c}_{21}^h & \mathbf{c}_{22}^h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{Ch}^h \\ \mathbf{F}_{Cb}^h \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中:子矩阵  $\mathbf{c}_{ij}^h$ ,  $i, j = 1, 2$  具体包含元素推导方法同筏体刚体模态导纳矩阵  $\bar{\mathbf{C}}$  一样。

此时,式(6)中导纳矩阵元素变为  $\mathbf{C}_{ij} = \text{diag}(c_{ij}^1, c_{ij}^2, \dots, c_{ij}^m)$ ,  $i, j = 1, 2$ 。

### 2.5 子系统动态特性综合

根据各子系统的动态特性分析,按照子系统间作用力平衡及速度相等的原则,可推导出整体系统输入、输出端的传递力与速度响应表达式

$$\mathbf{V}_G = [\mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12}(\mathbf{E} + \mathbf{H}_{22})^{-1}\mathbf{H}_{21}] \mathbf{F}_p \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_E = (\mathbf{E} + \mathbf{H}_{22})^{-1}\mathbf{H}_{21}\mathbf{F}_p \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_E = \mathbf{E}(\mathbf{E} + \mathbf{H}_{22})^{-1}\mathbf{H}_{21}\mathbf{F}_p \quad (11)$$

式(9)~(11)中,各矩阵具体包含元素为  $\mathbf{H}_{11} = \mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{22} + \mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{G}_{21}$ ,  $\mathbf{H}_{12} = \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{22} + \mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{D}_{12}$ ,  $\mathbf{H}_{22} = \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21}(\mathbf{G}_{22} + \mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{G}_{12}$ ,  $\mathbf{H}_{21} = \mathbf{D}_{21}(\mathbf{G}_{22} + \mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{G}_{21}$ ;  $\mathbf{G}_{11} = \mathbf{F}_{11} - \mathbf{F}_{12}(\mathbf{F}_{22} + \mathbf{C}_{11})^{-1}\mathbf{F}_{21}$ ,  $\mathbf{G}_{12} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{F}_{22} + \mathbf{C}_{11})^{-1}\mathbf{C}_{12}$ ,  $\mathbf{G}_{21} = \mathbf{C}_{21}(\mathbf{F}_{22} + \mathbf{C}_{11})^{-1}\mathbf{F}_{21}$ ,  $\mathbf{G}_{22} = \mathbf{C}_{22} - \mathbf{C}_{21}(\mathbf{F}_{22} + \mathbf{C}_{11})^{-1}\mathbf{F}_{12}$ ;  $\mathbf{F}_{11} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{11})^{-1}\mathbf{A}_{21}$ ,  $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{11})^{-1}\mathbf{B}_{12}$ ,  $\mathbf{F}_{21} = \mathbf{B}_{21}(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{11})^{-1}\mathbf{A}_{21}$ ,  $\mathbf{F}_{22} = \mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{21}(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{11})^{-1}\mathbf{B}_{12}$ 。此时,机器复合扰动下输入到整个系统及通过上、下层隔振支承及中间质量后传递到安装基础的时间平均功率流可表述为

$$\begin{cases} P_p = 0.5 \text{Real}\{\mathbf{F}_p^H \mathbf{V}_G\} \\ P_r = 0.5 \text{Real}\{\mathbf{F}_E^H \mathbf{V}_E\} \end{cases} \quad (12)$$

其中:上标 H 表示相应矢量的共轭转置。

### 3 系统振动特性分析

根据力与力矩复合激励下双层隔振系统动态特性方程的理论推导,以功率流为价值函数,对工程实际中常用的  $m=2, n=4$  支承隔振系统进行实例分析。系统主要特征参数见表 1 所示。

表 1 中,当  $\alpha_C, \beta_C, \alpha_E$  取 0.5 时,表示隔振支承相对于中间质量子系统 C、安装基础子系统 E 对称布置。结合隔振设计原则及布局要求,分别取  $\alpha_C = \beta_C = 0.5, \alpha_E = 0.45$ ;  $\kappa_1 = \lambda_1 = 0.7, \kappa_2 = \lambda_2 = 0.7$ ;  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \tau_1 = \tau_3 = 1.25, \epsilon_2 = \epsilon_4 = \tau_2 = \tau_4 = 0.45$ 。

依据振动基础理论<sup>[15]</sup>,计算得到系统中机器的垂向及横摇振动固有频率分别为 4.13 Hz 和 14.44 Hz。分布参数隔振器前两阶纵向振动固有频率为 403.11 Hz 和 806.23 Hz。安装基础前七阶弯曲振动固有频率为 36.48, 101.34, 198.63, 328.35, 490.49, 685.07 和 912.07 Hz。中间连续筏体的横摇及垂向刚体振动固有频率分别为 6.77 Hz 和 9.94 Hz,前五阶弯曲振动固有频率为 73.68, 204.65, 401.12, 663.08 和 990.52 Hz。

图 3~9 绘制了输入到系统及通过上、下层隔振支承和中间质量传递到安装基础的功率流谱 ( $P = 10 \lg(\frac{P_i}{P_{ref}})$ ,  $i = p, r$ , 参考值取  $P_{ref} = 10^{-12} \text{W}$ ; 柔性筏

表 1 隔振系统主要特征参数

Tab. 1 Parameters used in the proposed isolation systems

	参量名称/单位	参数值
机器	质量/kg	$m_A = 240$
	转动惯量/( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	$I_{Ax} = 18$
上、下层隔振器	外径,内径,高度/m	$D_{B,D} \times d_{B,D} \times h_{B,D} = 0.06 \times 0.03 \times 0.1$
	密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\rho_{B,D} = 1000$
	弹性模量/( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ )	$E_{B,D} = 6.5 \times 10^6$
	泊松比,损耗因子	$\mu_{B,D} = 0.33, \eta_{B,D} = 0.05$
安装基础	长,宽,高/m	$L_E \times W_E \times H_E = 4.5 \times 0.2 \times 0.14$
	密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\rho_E = 7850$
	弹性模量/( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ )	$E_E = 2.1 \times 10^{11}$
	泊松比,损耗因子	$\mu_E = 0.3, \eta_E = 0.01$
中间质量(连续筏体)	长,宽,高/m	$L_C \times W_C \times H_C = 3.5 \times 0.14 \times 0.122$
	弹性模量/( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ )	$E_C = 2.11 \times 10^{11}$
	泊松比,损耗因子	$\mu_C = 0.3, \eta_C = 0.01$
	密度/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\rho_C = 4013$
安装尺寸	上层隔振器上端接点距机器重心位置/m	$\lambda_1 = 0.7$
	上层隔振器下端接点距筏体左端位置/m	$\lambda_2 = 0.7$
	下层隔振器上端接点距筏体左端位置/m	$y_C^1 = \alpha_C L_C - \kappa_1$
		$y_C^2 = \alpha_C L_C + \kappa_2$
	下层隔振器下端接点距基础左端位置/m	$y_E^1 = \alpha_E L_E - \tau_1, y_E^2 = \alpha_E L_E + \tau_2$
		$y_E^3 = \alpha_E L_E - \tau_2, y_E^4 = \alpha_E L_E + \tau_3$
		$\epsilon_3, y_C^6 = \beta_C L_C + \epsilon_4$
		$\tau_3, y_E^4 = \alpha_E L_E + \tau_4$

体及基础导纳的模态截断均取  $\xi = 20$ )<sup>[7]</sup>。

图 3,4 为采用中间连续筏体的双层隔振系统在不同外扰激励下的功率流频谱。可以看出,由于系统的横向稳定性不及垂向,仅倾倒地矩作用对应的功率流幅值在机器横摇振动刚体模态(14.44Hz)以上频段内要明显高于仅垂向力激励情况,且与复合激励时的功率流谱几乎重合。这充分表明了力矩激励在隔振系统振动能量传输过程中起着重要作用,与文献[7,16]在单层隔振系统中的研究结论一致。因此,无论在理论建模分析以及具体工程实践中均需考虑力矩扰动成分产生的影响,安装隔振支承时要确保机器良好的对中性,尽量减少倾倒地矩激励带来的能量注入。

为了阐述振动机理、突出分析主要矛盾,以下各图中外扰激励均仅施加垂向力。图 5 为不考虑中间连续筏体柔性,中间质量  $m_C$  相对机器质量  $m_A$  变化时,对系统功率流谱的影响情况。可以看出,随着质量比逐渐增大,中间筏体对应的垂向刚体振动模态

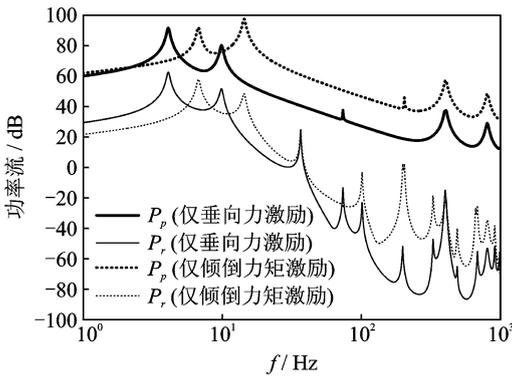


图3 力/力矩激励下的系统功率流谱

Fig. 3 Power flow spectrum under force/moment excitations

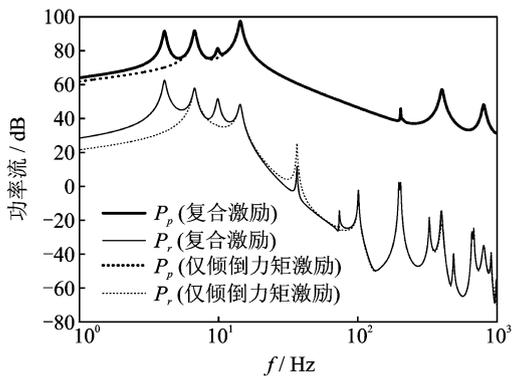


图4 力矩/复合激励下的系统功率流谱

Fig. 4 Power flow spectrum under moment/complex excitations

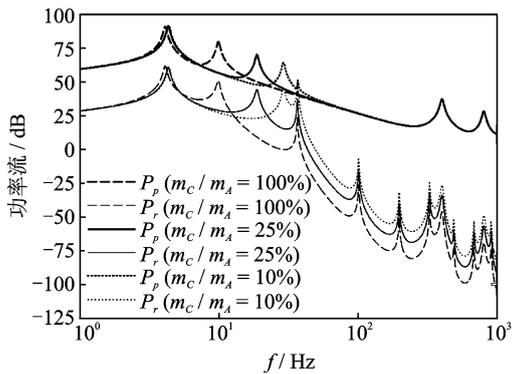


图5 中间质量大小对系统功率流的影响

Fig. 5 Influence of different intermediate masses on power flow

左移,同时使得输入安装基础的功率流幅值下降。这意味着中间质量越大,机器与中间质量的刚体振动模式更加聚拢,且其插入损失越大,系统的隔振效果越好;但过大的中间质量会增加整机负载,给设备安装布置带来困难,在实际隔振设计过程中需权衡利弊。

由于大型机器轴向尺寸的纵深及机器舱/室高度方向的制约,中间筏体的维度要与之匹配,使得其柔性特质愈发凸显。图6为中间筏体柔性对系统功率流谱的影响。可知,一旦外扰频率高于中间筏体的弯曲振动基频(73.68 Hz),筏体的柔性便明显反映到输入基础的功率流谱中,多出的各阶弯曲共振峰(图中尖箭头所指,仅出现奇数阶模态的原因在于上、下层隔振器均相对中间筏体对称布置,偶数阶模态未被激发)使得中高频率域隔振性能恶化。值得注意的是,中间筏体的第3阶弯曲振动模态(401.12 Hz)因与隔振器的第1阶纵向共振频率(403.11 Hz)接近,诱发强烈的弹性耦合效应,将该阶共振峰进一步放大约20 dB,大量振动能注入安装基础,导致基础振动加剧,并极易同空气介质耦合辐射噪声。此外,在隔振器的两阶纵向内共振范围内,安装基础的第5阶(490.49 Hz)、第6阶(685.07 Hz)、第7阶(912.07 Hz)弯曲振动模态以及中间筏体的第5阶弯曲振动模态(990.52 Hz)亦有不同程度的放大。同时发现,功率流谱中800 Hz左右多出一阶波峰(图中圆箭头所指),此附加波峰并非筏体或基础的共振峰而是因隔振器的第2阶纵向内共振(806.23 Hz)所引起的能量输入峰值。

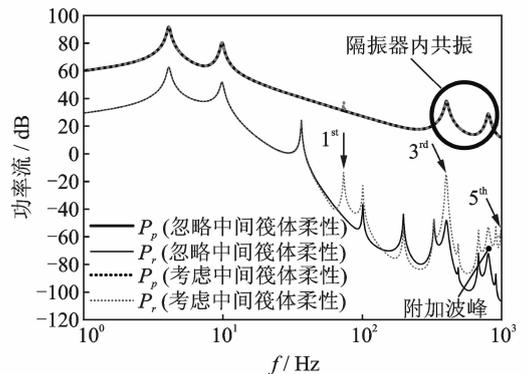


图6 中间筏体柔性对系统功率流的影响

Fig. 6 Influence of flexible raft on power flow

图7为安装基础的非刚性在隔振系统能量传递过程中产生的影响。需指出的是,工程实际中基础刚度的改变往往通过增加厚度或加筋处理实现而非改变材料弹性模量。随着基础厚度增大,基础的各阶共振峰逐渐移出所关心频带,输入基础的功率流在全频段内有所降低,尤其在1~70 Hz内下降明显。从图中尖箭头所指处发现,当基础厚度为0.28 m时,因其第1阶弯曲振动模态(72.97 Hz)与中间筏体的第1阶弯曲振动模态(73.68 Hz)相近,诱发强烈的弹性耦合效应,从而放大了该阶共振峰。更为严重的是,基础的第3阶弯曲振动模态(397.26 Hz)与中间筏体的第3阶弯曲振动模态(401.12 Hz)以及隔振器的第1

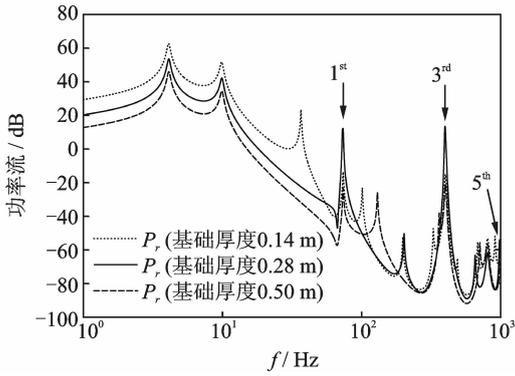


图7 安装基础刚度对系统功率流的影响

Fig. 7 Influence of foundation stiffness on power flow

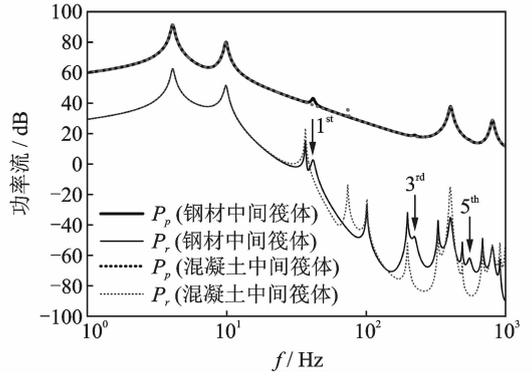


图8 中间筏体材质对系统功率流的影响

Fig. 8 Influence of raft material on power flow

阶纵向共振频率(403.11 Hz)均相近,弹性耦合效应更为强烈,峰值峭立突出,比0.14 m厚时高出近30 dB。因此在隔振设计时,应严格避免基础的弹性模态同中间筏体柔性模态以及隔振器驻波之间的耦合交互现象发生。

上述结论是以往忽略中间连续筏体柔性、安装基础的非刚性及隔振器分布参数特性的双层隔振研究所无法得出的。在隔振设计时,若忽略这些导致隔振效率下降的因素,势必会高估隔振能力,甚至导致隔振失败。双层隔振系统中应用连续的中间筏体有很多优势,尤其在多机组隔振设计时,连续筏体更易保证机组间的同轴度;还可作为半开式的隔声罩,阻挡机器噪声向基础传播。需注意的是,引入中间筏体后增加的刚体共振峰以及上、下层隔振器驻波和筏体柔性的不利影响。为削弱隔振器的驻波效应,采取的主要措施是安装同隔振器各阶内共振频率相协调的动力吸振器,此类多层传递式动力吸振器的具体实现形式及控制效果详见文献<sup>[17]</sup>。为减小中间连续筏体柔性的影响,可在筏体适当位置敷贴高阻尼材料或者采用含钢聚合物混凝土结构的中间筏体;在高频隔振(隔声)效率要求不高的场合,可采用分散中间质量结构。

若采用含钢聚合物混凝土结构的中间筏体,依据相关试验测得数据,取筏体的密度、弹性模量、阻尼损耗因子分别为: $\rho_c = 2\ 800\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $E_c = 2.23 \times 10^{10}\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\eta_c = 0.06$ 。图8为两种材质中间筏体对应的系统功率流频谱。可见,采用阻尼更大的混凝土中间筏体可明显削弱筏体弯曲振动各阶模态峰值(图中尖箭头所指)。由于筏体模态避开了隔振器的各阶内共振频率,所以筏体模态同隔振器驻波的耦合交互也得到了有效抑制。值得注意的是,混凝土筏体的弹性模量通常小于钢材类筏体一个数量级,这导致了混凝土筏体的弯曲振动模态更容易被激发,在具体隔振设计时筏体的材质及尺寸

需进行综合考量与规划。

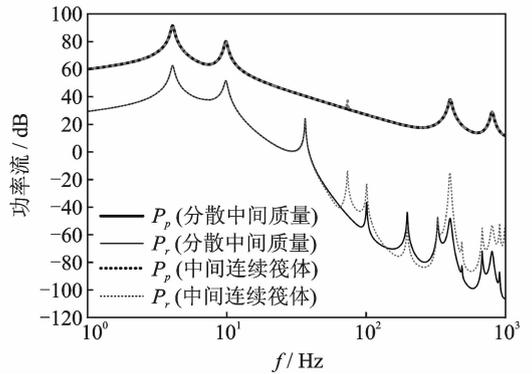


图9 分散中间质量方案系统的功率流谱

Fig. 9 Power flow spectrum of dispersed masses model

如图9所示,对比分析图1两类双层隔振系统的振动传递特性差异。为便于比较,取分散中间质量块均等且总质量等于连续筏体质量。可见,采用分散中间质量可有效避免中间连续筏体的柔性模态对中高频段的影响,对于输入基础功率流的削减效果同中间连续筏体方案中仅考虑筏体刚性时相当(对比图6);并且能明显抑制分布参数隔振器及柔性中间筏体模态间的耦合效应,隔振效果优于采用连续筏体方案。此外,分散中间质量系统因无需拆装整体中间质量,在隔振设备的安装以及日常维护便捷性方面亦好于连续筏体方案。

## 4 结论

1) 力矩激励在隔振系统能量传输中扮演着重要角色,在理论建模分析以及具体工程实践中均应充分考虑力矩扰动成分产生的影响。

2) 中间质量越大,系统的隔振效果越好,但过大的中间质量会降低能耗效率并受具体设备布置空间限制。中间筏体的材质及尺寸在隔振设计时需进

行综合考量与规划。

3) 中间连续筏体的柔性、隔振器的分布参数特性以及安装基础的非刚性使得中高频隔振性能恶化,应严格限制三者模态间的耦合交互发生。

4) 采用中间分散质量方案可有效避免中间连续筏体柔性模态的影响,并能显著抑制隔振器驻波同连续筏体柔性模态耦合作用引起的能量输入峰值。

5) 尽管笔者用不同边界条件的一维杆、梁结构来分别模拟分布参数隔振器、柔性筏体及安装基础仅考虑引起结构面外波传播的激励组分,但采用的分析方法并不受子系统导纳矩阵维度延拓或缩聚的限制,可推广到板、壳类结构及多层、多振源、面内外波耦合传播的隔振系统振动特性的研究。对后续的双层隔振系统灵敏度分析、参数最优化设计、主动控制策略研究以及工程隔振设计实践具有一定的指导意义。

#### 参 考 文 献

- [1] Rivin E I. Passive vibration isolation[M]. New York: ASME Press, 2003:3-5.
- [2] Unger E E, Dietrich C W. High-frequency vibration isolation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1966, 4(2):224-241.
- [3] Snowdon J C. Vibration isolation: use and characterization[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1979, 66(5):1245-1274.
- [4] Kim S, Singh R. Vibration transmission through an isolator modelled by continuous system theory [J]. Journal of Sound Vibration, 2001, 248(5):925-953.
- [5] Du Y, Burdissoa R A, Nikolaidis E, et al. Effects of isolators internal resonances on force transmissibility and radiated noise[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 268(4):751-778.
- [6] Xiong Yeping, Song Kongjie, Ai Xing. Influence of flexible foundation on isolator wave effects[J]. Shock and Vibration, 1996, 3(1):61-67.
- [7] Sun L, Leung A Y T, Lee Y Y, et al. Vibrational power-flow analysis of a MIMO system using the transmission matrix approach[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(1):365-388.
- [8] Hansen C H, Snyder S D, Qiu Xiaojun, et al. Active control of noise and vibration, second edition[M]. Boca Raton: CRC Press, 2012:181-185.
- [9] 杨铁军, 顾仲权, 刘志刚, 等. 双层隔振系统耦合振动主动控制试验研究[J]. 振动工程学报, 2003, 16(2):149-152.
- Yang Tiejun, Gu Zhongquan, Liu Zhigang, et al. Experimental research on active control of coupled vibration for a two-stage isolation system[J]. Journal of

Vibration Engineering, 2003, 16(2):149-152. (in Chinese)

- [10] 段小帅, 梁青, 陈绍青, 等. 双层隔振系统隔振效果评价与试验[J]. 振动、测试与诊断, 2010, 30(6):694-697.
- Duan Xiaoshuai, Liang Qing, Chen Shaoqing, et al. Evaluation and experiment on vibration-isolation effect of double-stage vibration-isolation system[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2010, 30(6):694-697. (in Chinese)
- [11] Xie S, Or S W, Chan H L A, et al. Analysis of vibration power flow from a vibrating machinery to a floating elastic panel[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(1):389-404.
- [12] Moore S. Analytical modelling of single and two-stage vibration isolation systems[C]//Proceeding of Acoustics 2011. Gold Coast:[s. n.], 2011:1-8.
- [13] 肖斌, 李彪, 夏春艳, 等. 基于功率流法双层隔振系统振动传递[J]. 机械工程学报, 2011, 47(5):106-113.
- Xiao Bin, Li Biao, Xia Chunyan, et al. Power flow method used to vibration transmission for two-stage vibration isolation system[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(5):106-113. (in Chinese)
- [14] 史冬岩, 孔令成, 石先杰, 等. 导纳理论的隔振系统功率流分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2013, 34(6):748-752.
- Shi Dongyan, Kong Lingcheng, Shi Xianjie, et al. Power flow analysis of vibration isolation system with admittance theory[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2013, 34(6):748-752. (in Chinese)
- [15] Fahy F J, Gardonio P. Sound and structural vibration: radiation, transmission and response[M]. Oxford: Academic Press, 2007:115-121.
- [16] Sanderson M A. Vibration isolation: moments and rotations included[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 198(2):171-191.
- [17] Dylejko P G, MacGillivray I R. On the concept of a transmission absorber to suppress internal resonance [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(10):2719-2734.



**第一作者简介:**杨明月,女,1989年4月生,硕士研究生。主要研究方向为振动噪声分析与控制和现代隔振减振方法。  
E-mail:sduyangmy@163.com

**通信作者简介:**孙玲玲,女,1967年12月生,博士、教授。主要研究方向为振动理论与应用、结构振动噪声控制策略。  
E-mail:sunll@sdu.edu.cn