

重频结构大修改动力重分析的矩阵摄动法*

刘志军, 王晓军, 干为民

(常州工学院江苏省数字化电化学加工重点实验室 常州, 213002)

摘要 为拓展矩阵摄动法在结构重分析中的适用范围, 提高重分析计算精度, 针对重频结构参数大修改提出了重频结构动力重分析的矩阵摄动法。采用高次增量法将反映重频结构参数改变的质量矩阵和刚度矩阵的增量分别表示为小参数 ϵ 的一次与二次幂项之和, 根据矩阵摄动理论推导得到重特征值的二阶摄动解及相应特征向量的一阶摄动解。数值算例表明, 所提出方法极大提高了重频结构大修改下的动力重分析计算精度。

关键词 重频结构; 结构动力重分析; 结构大修改; 矩阵摄动法

中图分类号 O302

引言

在结构动态设计过程中, 反复修改后结构的计算问题成为了主要困难, 重分析方法能够用来减少计算量, 提高工作效率, 受到了广泛的重视和研究^[1-6]。工程实际中常会有重频率的退化系统, 例如, 飞机、宇航飞行器和海洋平台等比较复杂的空间结构^[7-10]。当结构具有重特征值时, 已有的孤立特征值的矩阵摄动理论不能直接应用, 而密集频率结构振动分析的矩阵摄动问题往往是将密集模态处理成为重频模态来进行研究^[1, 11], 因此研究重频结构大修改动力重分析的矩阵摄动法具有重要意义。

重特征值结构参数变化后, 原来的一组重特征值可能分离为非重特征值, 特征向量可能产生跳跃现象。确定重频的特征向量的一阶摄动需要用到二阶摄动方程, 如果重特征值的一阶摄动量仍然是重的, 就需要使用高阶摄动方程才能确定特征向量的一阶摄动量^[1]。传统经典矩阵摄动法将结构修改后的质量矩阵和刚度矩阵的增量分别表示为小参数 ϵ 的一次幂项形式, 而重特征值的一阶摄动解与小参数平方 ϵ^2 对应的二阶摄动方程相关, 因此仅适用于结构的小修改重分析。当结构参数修改较大时, 计算精度变差甚至变得没有意义。笔者提出重频结构大修改动力学重分析的矩阵摄动法, 采用高次增量法将反映重频结构参数改变的质量矩阵和刚度矩阵的增量分别表示为小参数 ϵ 的高次幂项之和, 结构

修改后的质量矩阵和刚度矩阵, 与其特征值和特征向量一样, 同时进行高阶摄动展开。根据矩阵摄动理论推导得到重频特征值及特征向量的一阶摄动解, 极大提高了重频结构大修改下的重分析计算精度。

1 重频结构的改进矩阵摄动法

考虑结构振动特征值问题

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{U}_0 = \mathbf{M}_0 \mathbf{U}_0 \boldsymbol{\Lambda}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{U}_0^T \mathbf{M}_0 \mathbf{U}_0 = \mathbf{I} \quad (2)$$

其中: \mathbf{K}_0 和 \mathbf{M}_0 为 $n \times n$ 的实对称矩阵; $\boldsymbol{\Lambda}_0$ 为特征值对角阵; \mathbf{U}_0 为 $n \times n$ 的模态矩阵。

设结构修改后的质量矩阵 \mathbf{M} 、刚度矩阵 \mathbf{K} 由下式表示

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \epsilon \mathbf{M}_1 + \epsilon^2 \mathbf{M}_2 \quad (3)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \epsilon \mathbf{K}_1 + \epsilon^2 \mathbf{K}_2 \quad (4)$$

其中: $\epsilon \mathbf{M}_1 + \epsilon^2 \mathbf{M}_2$ 和 $\epsilon \mathbf{K}_1 + \epsilon^2 \mathbf{K}_2$ 分别代表原系统的质量矩阵 \mathbf{M}_0 和刚度矩阵 \mathbf{K}_0 的变化; \mathbf{M}_1 和 \mathbf{M}_2 分别为质量矩阵的一阶摄动和二阶摄动; \mathbf{K}_1 和 \mathbf{K}_2 分别为刚度矩阵的一阶摄动和二阶摄动。

ϵ 不必是小参数, 与 $\epsilon = 0$ 对应的系统称为原系统。

当 $\epsilon \mathbf{M}_1 + \epsilon^2 \mathbf{M}_2 \rightarrow 0$ 和 $\epsilon \mathbf{K}_1 + \epsilon^2 \mathbf{K}_2 \rightarrow 0$ 时, $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}_0, \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}_0$ 。

结构修改后相应的特征值问题为

$$(\mathbf{K}_0 + \epsilon \mathbf{K}_1 + \epsilon^2 \mathbf{K}_2) \mathbf{U} = (\mathbf{M}_0 + \epsilon \mathbf{M}_1 + \epsilon^2 \mathbf{M}_2) \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \quad (5)$$

* 国家重点基础研究发展计划(“九七三”计划)资助项目(2010CB736104);常州工学院自然科学基金资助项目(YN1407)
收稿日期:2013-07-29;修回日期:2013-09-25

$$U^T(M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2)U = I \quad (6)$$

设原结构有一 m 重特征值 $\lambda_0 = \lambda_{01} = \lambda_{02} = \dots = \lambda_{0m}$, 其相应的特征向量为 $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m}$, 其余特征值为孤立特征值。 u_{0j} ($j=1, 2, \dots, m$) 的线性组合仍为该重特征值的特征向量, 即

$$\bar{U}_{0m} = U_{0m}\alpha \quad (7)$$

$$U_{0m} = [u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m}] \quad (8)$$

$$\alpha^T \alpha = I \quad (9)$$

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m] \quad (10)$$

其中: α_j 为未知的待定系数。

摄动后的结构的重特征值和特征向量可表示为

$$\Lambda_m = \Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 + \varepsilon^2 \Lambda_2 \quad (11)$$

$$U_m = \bar{U}_{0m} + \varepsilon(\bar{U}_{0m}C_m + U_A C_A) + \varepsilon^2(\bar{U}_{0m}D_m + U_A D_A) = U_{0m}\alpha + \varepsilon(U_{0m}\alpha C_m + U_A C_A) + \varepsilon^2(U_{0m}\alpha D_m + U_A D_A) \quad (12)$$

其中: U_A 为 $n \times (n-m)$ 的矩阵, 其中各列为除 U_{0m} 之外的其他特征向量矩阵; Λ_m 为 $m \times m$ 的摄动后的特征值对角阵; Λ_1 和 Λ_2 为 $m \times m$ 的重特征值 Λ_0 的一阶和二阶摄动对角阵; C_m, D_m 和 E_m 为 $m \times m$ 待定的展开系数矩阵; C_A, D_A 和 E_A 为 $(n-m) \times m$ 待定的展开系数矩阵。

将式(11,12)代入式(5,6), 并用 U_m 和 Λ_m 代替

U 和 Λ , 比较 ε 的同次幂系数, 可得

$$\varepsilon^0: (K_0 - \lambda_0 M_0)U_{0m}\alpha = 0 \quad (13)$$

$$\alpha^T U_{0m}^T M_0 U_{0m}\alpha = I \quad (14)$$

$$\varepsilon^1: (K_0 - \lambda_0 M_0)U_{0m}\alpha C_m + (K_0 - \lambda_0 M_0)U_A C_A + (K_1 - \lambda_0 M_1)U_{0m}\alpha = M_0 U_{0m}\alpha \Lambda_1 \quad (15)$$

$$(C_A^T U_A^T + C_m^T \alpha^T U_{0m}^T)M_0 U_{0m}\alpha + \alpha^T U_{0m}^T M_0 \times (U_{0m}\alpha C_m + U_A C_A) = -\alpha^T U_{0m}^T M_1 U_{0m}\alpha \quad (16)$$

$$\varepsilon^2: (K_0 - \lambda_0 M_0)(U_{0m}\alpha D_m + U_A D_A) + (K_1 - \lambda_0 M_1) \times (U_{0m}\alpha C_m + U_A C_A) + (K_2 - \lambda_0 M_2)U_{0m}\alpha = M_0 U_{0m} \times \alpha(C_m \Lambda_1 + \Lambda_2) + M_0 U_A C_A \Lambda_1 + M_1 U_{0m}\alpha \Lambda_1 \quad (17)$$

方程(13)~(17)就是确定 $\Lambda_1, U_1, \Lambda_2$ 和 α 的基本方程。

1.1 特征值一阶摄动 Λ_1 的确定

用 U_{0m}^T 前乘式(15)可得到 $m \times m$ 的特征值问题

$$W\alpha = \alpha \Lambda_1 \quad (18)$$

其中

$$W = U_{0m}^T (K_1 - \lambda_0 M_1) U_{0m} \quad (19)$$

求解特征值问题(18)可得到 Λ_1 和 α 。

如果矩阵 W 无重特征值, 则 α 可唯一确定; 如果 W 有重特征值, 就要补充高阶摄动方程才能确定 α 。矩阵 W 无重特征值时有 $\lambda_{1i} \neq \lambda_{1j}$ ($i \neq j$), 其中, λ_{1k} ($0 < k \leq m$) 为 Λ_1 的对角元素。

1.2 特征向量一阶摄动 U_1 的确定

特征向量一阶摄动 U_1 为

$$U_1 = U_{0m}\alpha C_m + U_A C_A \quad (20)$$

用 U_A^T 前乘式(15), 可得

$$C_A = (\Lambda_A - \lambda_0 I)^{-1} U_A^T (\lambda_0 M_1 - K_1) U_{0m}\alpha \quad (21)$$

用 $\alpha^T U_{0m}^T$ 前乘式(17), 由式(13)、式(14)和式(18)可得

$$C_m \Lambda_1 - \Lambda_1 C_m + \Lambda_2 = \alpha^T U_{0m}^T (K_1 - \lambda_0 M_1) U_A C_A + \alpha^T U_{0m}^T (K_2 - \lambda_0 M_2) U_{0m}\alpha - \alpha^T U_{0m}^T M_1 U_{0m}\alpha \Lambda_1 = R \quad (22)$$

由于矩阵 $C_m \Lambda_1 - \Lambda_1 C_m$ 的对角元素为零, 而 Λ_2 的非对角元素为零, 故可求出

$$\Lambda_2 = \text{diag}(R_{11}, R_{22}, \dots, R_{mm}) \quad (23)$$

$$C_{ij}^m = \frac{R_{ij}}{\lambda_{jm}^{(1)} - \lambda_{im}^{(1)}} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (24)$$

其中: R_{ij} 为矩阵 R 的元素; C_{ij}^m 为矩阵 C_m 的元素; $\lambda_{jm}^{(1)}$ 为矩阵 Λ_1 对角线上的第 j 个元素。

由式(16)可得

$$C_m + C_m^T = Q \quad (25)$$

其中

$$Q = -\alpha^T U_{0m}^T M_1 U_{0m}\alpha \quad (26)$$

由式(25)可知

$$C_{ii}^m = \frac{1}{2} Q_{ii} \quad (27)$$

2 数值算例

如图1所示的一个二自由度的系统, 由3个弹簧支承的质点 m 在 $x_1 x_2$ 平面内微幅振动, 取质点质量 $m=1$ kg, 当3个弹簧的刚度系数相同, 取 $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ N/m, 这时该二自由度系统的两个特征值相等, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$, 相应特征向量 $u_1 = [1 \ 0]^T$, $u_2 = [0 \ 1]^T$ 。

为了研究当结构参数改变时本研究方法的计算精度, 假设质点质量的改变量从10%增加到60%, 而第3个弹簧刚度改变量从-10%减少到-60%。与式(3,4)相应的摄动质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; M_2 = \frac{1}{2} M_1; K_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 4 & 4 \\ -\sqrt{3} & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix};$$

$$K_2 = \frac{1}{2} K_1。$$

将笔者提出的方法与文献[1]中的重频结构经典摄动解进行比较, 定义固有频率相对误差 $\text{err} =$

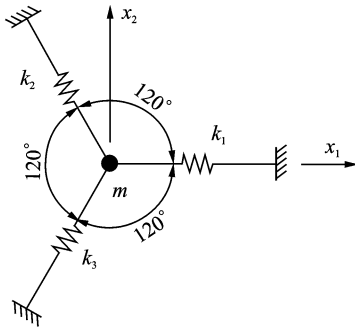


图 1 二自由度弹簧质点系统

Fig. 1 Mass-spring system with 2 degrees of freedom

$(|\omega - \omega_a| / \omega_a) \times 100\%$, 其中: ω_a 为结构修改后的精确固有频率; ω 为用重分析方法计算得到的结构修改后的固有频率。表 1 列举了 1, 2 阶固有频率的计算结果。

从表 1 中的数值结果可以看出, 无论重频结构参数改变多少, 按笔者摄动分析方法给出的重分析结果远远好于按重特征值经典摄动法给出的结果。

例如, 当质点质量增加 20% 而第 3 个弹簧的刚度系数减少 20% 时, 按笔者摄动分析方法给出的第 1 阶特征值和第 2 阶特征值的重分析相对误差分别为 0.054 2% 和 0.028 2%, 而按重特征值经典摄动法给出的第 1 阶特征值和第 2 阶特征值的重分析相对误差分别为 1.538 5% 和 0.800 0%。随着重频结构参数改变增大, 两种方法计算误差均有所增大; 当重频结构参数改变 30% 时, 采用重特征值经典摄动法计算得到的两阶固有频率的最大相对误差超过 5.6%, 而笔者方法在重频结构参数改变 40% 时计算得到的两阶固有频率的最大相对误差不超过 0.3%, 相同计算精度要求下, 笔者方法的适用范围更广; 当重频结构参数改变量超过 30% 以后, 经典摄动法的重分析计算结果误差急剧增大, 因此重特征值经典二阶摄动法的适用范围是重频结构参数改变量在 30% 之内, 而笔者方法在重频结构参数改变 60% 时重分析计算得到的两阶固有频率的最大相对误差也未超过 3.8%, 因此笔者方法的适用范围更广, 适用于重频结构大修改情况。

表 1 固有频率比较

Tab. 1 Comparison of natural frequencies

结构参数改变/%		10	20	30	40	50	60
1 阶	精确解	1.272 7	1.083 3	0.923 1	0.785 7	0.666 7	0.562 5
	经典二阶解误差/%	1.275 0 0.178 6	1.100 0 1.538 5	0.975 0 5.625 0	0.900 0 14.545	0.875 0 31.250	0.900 0 60.000
	改进二阶解误差/%	1.272 8 0.003 7	1.083 9 0.054 2	0.925 4 0.256 5	0.791 8 0.774 0	0.678 9 1.839 8	0.583 8 3.786 9
2 阶	精确解	1.363 6	1.250 0	1.153 8	1.071 4	1.000 0	0.937 5
	经典二阶解误差/%	1.365 0 0.100 0	1.260 0 0.800 0	1.185 0 2.700 0	1.140 0 6.400 0	1.125 0 12.500	1.140 0 21.600
	改进二阶解误差/%	1.363 7 0.002 1	1.250 4 0.028 2	1.155 3 0.123 1	1.075 1 0.340 6	1.007 4 0.735 9	0.950 3 1.363 3

3 结束语

笔者提出了一种应用高次增量法来提高摄动解的精度并扩大其适用范围的重频结构动力重分析方法, 该方法保留了经典摄动法简单易行的特点, 比文献[1]中的经典方法只增加了少许的计算量, 但计算精度和效率却有了很大的提高。数值算例结果表明, 笔者提出的方法具有很高的重分析精度, 能够用来解决重频结构大修改情况下的近似重分析问题。

参 考 文 献

[1] Chen Suhuan. Matrix perturbation theory in structural dynamic designs[M]. Beijing, China: Science Press, 2007:97-131.

[2] 倪卫明, 王文亮. 具有重特征值的弱阻尼系统的摄动法[J]. 复旦学报: 自然科学版, 1995, 34(1): 69-77.

Ni Weiming, Wang Wenliang. A perturbation method for weakly damped systems with repeated eigenvalues [J]. Journal of Fudan University: Natural Science, 1995, 34(1): 69-77. (in Chinese)

- [3] 陈塑寰. 退化系统振动分析的矩阵摄动法[J]. 吉林大学学报, 1981, 11(4): 11-18.
Chen Suhuan. Matrix perturbation for vibration analysis of degenerate systems[J]. Chinese Journal of Jilin University of Technology, 1981, 11(4): 11-18. (in Chinese)
- [4] 王文亮, 胡海昌. 重特征值的小参数法[J]. 复旦学报: 自然科学版, 1993, 32(2): 168-176.
Wang Wenliang, Hu Haichang. Small parameter technique with repeated eigenvalues[J]. Journal of Fudan University: Natural Science, 1993, 32(2): 168-176. (in Chinese)
- [5] Hou G J W, Kenny S P. Eigenvalue and eigenvector approximate analysis for repeated eigenvalue problems [J]. AIAA Journal, 1992, 30(9): 2317-2324.
- [6] Choi K M, Cho S W, Ko M G, et al. Higher order eigensensitivity analysis of damped systems with repeated eigenvalues [J]. Computers & Structures, 2004, 82(1): 63-69.
- [7] 刘保国, 殷学纲, 韩国明, 等. 一维结构系统重频特征问题的摄动传递矩阵法[J]. 机械强度, 2002, 24(3): 335-338.
Liu Baoguo, Yin Xuegang, Han Guoming, et al. Perturbation transfer matrix method for one-dimensional structural system with repeated eigenvalues[J]. Journal of Mechanical Strength, 2002, 24(3): 335-338. (in Chinese)
- [8] 张家滨, 陈国平. 基于子空间算法的对称结构重频模态识别[J]. 南京航空航天大学学报, 2012, 44(2): 191-197.
Zhang Jiabin, Chen Guoping. Modal identification of symmetrical structure with repeated frequencies based on subspace method[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2012, 44(2): 191-197. (in Chinese)
- [9] 刘福林, 闫维明, 何浩祥. 重频结构的振型识别及处理方法[J]. 工业建筑, 2011, 41(S1): 368-372.
Liu Fulin, Yan Weiming, He Haoxiang. Mode shape identification and disposal in the structure of overlap frequencies [J]. Industrial Construction, 2011, 41(S1): 368-372. (in Chinese)
- [10] 于澜, 张文丹, 付向南. 非对称重频阻尼系统状态向量的摄动分析[J]. 长春理工大学学报: 自然科学版, 2011, 34(3): 170-172.
Yu Lan, Zhang Wendan, Fu Xiangnan. Rapid algorithm for gradients of state vectors in asymmetric damping system with repeated eigenvalues[J]. Journal of Changchun University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2011, 34(3): 170-172. (in Chinese)
- [11] 刘中生, 陈塑寰. 频率集聚时模态分析的移位摄动法[J]. 宇航学报, 1993, 14(1): 81-88.
Liu Zhongsheng, Chen Suhuan. Perturbation analysis of vibration modes with close eigenvalues by eigenvalue shift[J]. Journal of Astronautics, 1993, 14(1): 81-88. (in Chinese)



第一作者简介: 刘志军, 男, 1976年4月生, 博士后、副教授。主要研究方向为结构动力学分析与优化设计。曾发表《索力振动测量的传递矩阵法》(《振动与冲击》2011年第30卷第10期)等论文。
E-mail: uliuzj@163.com

