

非线性轮对陀螺系统的稳定性及分叉研究^{*}

张波, 曾京, 董浩

(西南交通大学牵引动力国家重点实验室 成都, 610031)

摘要 针对轮对陀螺效应, 运用能量法分析了轮对蛇形运动机理, 建立了蛇形运动能量流; 基于打靶法分析了非线性轮对陀螺系统的 Hopf 分叉, 并对比分析了陀螺系统和非陀螺系统的分叉解; 最后, 引入稳定性系数和陀螺力贡献率, 定量分析了陀螺力对蛇形运动稳定性的影响。研究结果表明, 在轮对陀螺系统中, 陀螺力不做功, 但具有增稳功能。陀螺力对系统稳定性的影响随速度的增大显著变大, 当轮对高速运行时, 陀螺力影响较为显著。因此, 在高速列车稳定性分析中应将陀螺力作为一个重点分析对象。

关键词 陀螺效应; 蛇形运动能量流; 打靶法; Hopf 分叉; 稳定性系数; 陀螺力贡献率

中图分类号 U270.1⁺¹

引言

随着高速列车速度的提高出现了一系列的问题, 车辆蛇行失稳就是其中的一个重要问题。蛇行稳定性是铁路车辆系统轮轨关系本身的固有特性, 直接决定了车辆能否高速安全运行。较高的蛇形临界速度是高速列车必须的前提, 否则将会对车辆的安全性和运行平稳性造成严重影响, 甚至导致脱轨等安全事故。同时, 剧烈的蛇行失稳时轮对的大幅横向振动产生巨大的轮轨横向力, 造成线路破坏。

车辆系统的蛇形运动现象最初由英国的 Stephenson 等^[1]发现, 并进而对蛇形运动进行了初步研究。DePater^[2]率先将车辆的蛇形运动创新性地考虑成动力学的运动稳定性问题。Wickens^[3-4]引入了重力刚度并详细研究了考虑重力刚度作用下磨耗型轮对和转向架的线性稳定性, 研究发现蠕滑力和车轮锥度是造成车辆系统不稳定的主要原因。Cooperider^[5]引入纵向和横向非线性蠕滑力, 对车辆系统进行了非线性动力学行为研究。丹麦 Trued^[6]教授用延续算法对非线性车辆系统分岔问题进行了分析。Polach^[7]总结出车辆系统非线性稳定性的分析方法和标准, 讨论了极限环的各种影响因素, 全面分析了车辆系统的运动分岔特性。

国内, 曾京^[8]采用打靶法研究了车辆系统的 Hopf 分叉及极限环。孙桐林等^[9]采用了非线性控

制方法, 将车辆系统的亚临界 Hopf 分岔转换为超临界 Hopf 分岔, 更有利于对车辆的失稳状态进行预警、控制, 保障行车安全。董浩等^[10]通过范式方法建立了判断系统的 Hopf 分叉类型的判别式, 很好地区分了亚临界与超临界分叉。

关于陀螺稳定性, 在机械领域已有很多研究^[11-12], 但车辆系统陀螺稳定性研究则相对较少。黄世凯^[13]研究轮对线性系统的陀螺力影响, 并定义了陀螺力贡献率, 研究发现当速度低于 300 km/h 时, 陀螺力影响较小可忽略, 当高于 300 km/h 时陀螺力影响较大, 不可忽略, 但是没有考虑非线性陀螺系统的分叉问题。笔者在此基础上, 考虑非线性轮对陀螺系统的分叉问题, 重点研究陀螺力对系统稳定性及分叉的影响, 对比分析陀螺力存在与否对系统分叉的影响。通过能量法定性阐述轮对蛇形运动的能量流, 通过能量机理解释陀螺力对稳定性的作用; 最后引用陀螺力贡献率对陀螺力的影响进行定量分析。

1 模型建立

高速列车具有陀螺效应, 其陀螺效应的根源在于轮对的锥形踏面, 故文中考虑简单悬挂轮对系统, 并考虑横移 y 、摇头 φ 运动和一系悬挂约束。假设轮对沿平直轨道以速度 v 运行, 轮对做微幅振动, 轮轨蠕滑较小, 蠕滑率与蠕滑力规律可等效为线性关

^{*} 国家重点基础研究发展计划("九七三"计划)资助项目(2011GB711106); 国家高技术研究发展计划("八六三"计划)资助项目(2012AA112001-02); 国家自然科学基金资助项目(51005189)

收稿日期: 2014-09-12; 修回日期: 2014-11-21

系,在此采用 Kalker 线性轮轨蠕滑理论^[14]。考虑非线性轮轨接触几何关系,为了方便进行理论推导和解析求解,采用非线性函数拟合, α_1 和 α_2 为非线性参数, α_1 和 α_2 取值参考文献^[15],图 1 为轮对系统的几何模型。

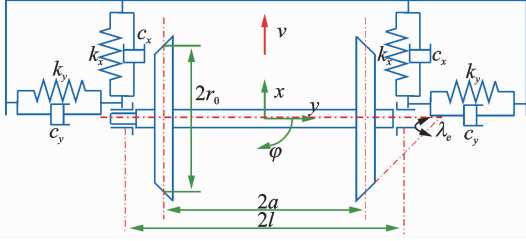


图 1 非线性轮对陀螺系统几何模型

Fig. 1 The model of nonlinear gyroscopic wheelset system

若记 $\mathbf{x} = (y, \varphi)^T$, 则系统的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_e\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & \\ & I \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} 2c_y + \frac{2f_{22}}{v} & \frac{2f_{23}}{v} - \frac{I_y\lambda_e v}{ar_0} \\ \frac{I_y\lambda_e v}{ar_0} - \frac{2f_{23}}{v} & 2l^2c_x + \frac{2(a^2f_{11} + f_{33})}{v} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{W\lambda_e}{a} + 2k_y & -2f_{22} \\ \frac{2af_{11}\lambda_e}{r_0} & 2f_{23} + 2k_xl^2 - W\lambda_e a \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(y) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 y^3 + \alpha_2 y^5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

m 为轮对质量; I, I_y 分别为轮对摇头和自旋转动惯量; r_0 为滚动圆半径; a 为两滚动圆间的距离之半; l 为左右悬挂跨距之半; λ_e 为踏面等效锥度; k_x 和 k_y 为轮对横向和纵向定位刚度; c_x 和 c_y 为轮对横向和纵向阻尼; f_{11} 为纵向蠕滑系数; f_{22} 为横向蠕滑系数; f_{23} 为横向自旋蠕滑系数; f_{33} 为自旋蠕滑系数; W 为轴重。

各参数取值详见表 1。

表 1 轮对参数表

Tab. 1 Parameters of wheelset

参数	取值	参数	取值	参数	取值
m/kg	1.612e3	l/m	1	$k_x/(\text{MN} \cdot \text{m}^{-1})$	4
$I/(\text{kg} \cdot \text{m}^3)$	881	a/m	0.717 5	$k_y/(\text{MN} \cdot \text{m}^{-1})$	4
$I_y/(\text{kg} \cdot \text{m}^3)$	100	f_{11}/MN	13.7	$c_x/(\text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	21
λ_e	0.13	f_{22}/MN	11.1	$c_y/(\text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	21
r_0/m	0.46	f_{23}/MN	0	α_1	-1.6e11
W/kN	112.2	f_{33}/MN	0	α_2	1.6e15

由矩阵理论可知,对于任意矩阵 \mathbf{A} , 有

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2 + (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2 \quad (2)$$

令 $\mathbf{A}_1 = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2, \mathbf{A}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2$, 则有 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, 且 \mathbf{A}_1 为对称阵, \mathbf{A}_2 为反对称阵。对方程 (1) 做上述变换, 得到如下形式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{E})\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

其中: \mathbf{M} 为惯性矩阵; $\mathbf{D} = (\mathbf{C}_e + \mathbf{C}_e^T)/2, \mathbf{D}$ 为阻尼矩阵; $\mathbf{G} = (\mathbf{C}_e - \mathbf{C}_e^T)/2, \mathbf{G}$ 为陀螺矩阵; $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e^T)/2, \mathbf{K}$ 为刚度矩阵; $\mathbf{E} = (\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_e^T)/2, \mathbf{E}$ 为循环矩阵。

\mathbf{D}, \mathbf{K} 为对称矩阵, \mathbf{G}, \mathbf{E} 为反对称矩阵。由于 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 不同时为零, 则系统是非保守系统^[16]。

2 基于能量观点的稳定性分析

轮对蛇形运动过程中, 能量的输入会引起和加剧蛇形运动, 输入的能量一部分被阻尼元件转化为热能耗散掉, 另一部分被存储为机械能, 即动能和势能。依据能量法原理, 如果在振动过程中系统的机械能不断减小, 那么系统振动最终将会收敛。如果系统的机械能不断增加, 系统振动将会加剧, 振动幅度会变大, 系统机械能储能能力会随之提高, 阻尼器耗散功也会增加, 系统会寻找到另外一个平衡点, 即更大的极限环。但是如果这样的点不存在, 系统振动将会发散。如果系统机械能维持不变, 系统将会维持一种持续稳定的周期振动。

现从能量的角度分析轮对蛇形运动时系统能量转化关系, 进行系统稳定性的定性分析, 研究失稳机理。为便于分析, 将阻尼矩阵 \mathbf{D} 剖分为减振器阻尼 \mathbf{D}_F 和轮轨蠕滑部分 \mathbf{D}_R 两个部分, 刚度矩阵 \mathbf{K} 剖分为悬挂刚度 \mathbf{K}_F 和轮轨蠕滑部分 \mathbf{K}_R 两个部分, 即

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_F + \mathbf{D}_R$$

$$\mathbf{D}_F = \begin{bmatrix} 2c_y & \\ & 2l^2c_x \end{bmatrix}, \mathbf{D}_R = \begin{bmatrix} \frac{2f_{22}}{v} & \\ & \frac{2(a^2f_{11} + f_{33})}{v} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_F + \mathbf{K}_R$$

$$\mathbf{K}_F = \begin{bmatrix} 2k_y + \frac{W\lambda_e}{a} & 0 \\ 0 & 2k_xl^2 - W\lambda_e a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_R = \begin{bmatrix} 0 & -f_{22} + \frac{af_{11}\lambda_e}{r_0} \\ -f_{22} + \frac{af_{11}\lambda_e}{r_0} & 2f_{23} \end{bmatrix} \quad (4)$$

方程 (3) 可写成如下形式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_F\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_F\mathbf{x} + (\mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_R\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_R\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

对系统左乘 $\dot{\mathbf{x}}^T$, 由 $d\mathbf{x}^T = \dot{\mathbf{x}}^T dt$ 可以得到

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}_F \mathbf{x} \right] dt + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}_F \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}_R \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{K}_R + \mathbf{E}) \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (6)$$

对式(6)在 $t=0$ 到 τ 积分可得

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}_F \mathbf{x} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_0^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{K}_F \mathbf{x}_0 -$$

$$\int_0^\tau (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}_F \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}_R \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{K}_R + \mathbf{E}) \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}(\mathbf{x})) dt \quad (7)$$

即

$$T + V = T_0 + V_0 - \int_0^\tau (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}_F \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}_R \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{K}_R + \mathbf{E}) \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}(\mathbf{x})) dt \quad (8)$$

首先对系统的稳态运动状态做如下假设

$$\begin{cases} y = y_0 \sin \omega t \\ \varphi = \varphi_0 \sin \omega t \end{cases} \quad (9)$$

分别分析减震器阻尼项 \mathbf{D}_F 、陀螺项 \mathbf{G} 、蠕滑部分的阻尼项 \mathbf{D}_R 、蠕滑部分的刚度项 \mathbf{K}_R 和循环矩阵 \mathbf{E} 以及非线性项 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 对系统的影响,积分时间取一个蛇行运动周期,即 $\tau = 2\pi/\omega$,则有

$$-\int_0^\tau \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}_F \dot{\mathbf{x}} dt = -\frac{\pi}{\omega} (2c_y \omega^2 y_0^2 + 2l^2 c_x \omega^2 \varphi_0^2) < 0$$

$$-\int_0^\tau \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{x}} dt =$$

$$\int_0^\tau \left[\left(\frac{2f_{23}}{v} - \frac{I_y \lambda_e v}{ar_0} \right) \dot{y} \dot{\varphi} + \left(\frac{I_y \lambda_e v}{ar_0} - \frac{2f_{23}}{v} \right) \dot{\varphi} \dot{y} \right] dt = 0$$

$$-\int_0^\tau \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D}_R \dot{\mathbf{x}} dt =$$

$$-\frac{\pi}{\omega} \left(\frac{2f_{22}}{v} \omega^2 y_0^2 + \frac{2(a^2 f_{11} + f_{33})}{v} \omega^2 \varphi_0^2 \right) < 0$$

$$-\int_0^\tau \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{K}_R + \mathbf{E}) \mathbf{x} dt =$$

$$-\int_0^\tau (\dot{y}, \dot{\varphi}) \begin{bmatrix} 0 & -2f_{22} \\ \frac{2af_{11}\lambda_e}{r_0} & 2f_{23} \end{bmatrix} (y, \varphi)^T dt =$$

$$2\pi f_{22} y_0 \varphi_0 + \frac{2af_{11}\lambda_e}{r_0} y_0 \varphi_0 > 0$$

$$-\int_0^\tau \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) dt =$$

$$-\int_0^\tau (\dot{y}, \dot{\varphi}) (f(y), 0)^T dt = -\alpha_1 y_0^4 / 4 - \alpha_2 y_0^6 / 6 < 0 \quad (10)$$

减震器阻尼项 \mathbf{D}_F 做负功,耗散能量;陀螺项 \mathbf{G} 不做功,既不消耗系统的能量,也不向系统提供能量;蠕滑部分的阻尼项 \mathbf{D}_R 做负功,耗散能量;蠕滑部分的刚度项 \mathbf{K}_R 和循环矩阵 \mathbf{E} 做正功,输入能量;非线性项 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 做负功,耗散能量。

当在一个蛇行运动周期内输入能量小于耗散能量的时候,蠕滑力的输入功小于系统的耗散功,系统总能量逐渐减小,运动状态趋于稳定。

在一个蛇行运动周期内,当输入能量大于耗散能量的时候,系统总能量开始增加,此时通过阻尼和弹簧力的作用一部分能量会转移到构架和车体,使得构架、车体的振动幅度变大动能增加,同时弹簧的势能也增加,减振器的耗散功也进一步增加,从而使输入功和耗散功达到新的平衡,系统维持一种新的稳定状态。此时如果轮对运行速度继续提高,系统的总能量就会持续增加,系统就将寻找不到输入能量和耗散能量的平衡状态,轮对会发生发散的蛇行运动,直至系统失稳,轮缘贴靠钢轨。

从以上分析可见,决定系统稳定性的因素主要有蠕滑力的输入能量,耗散能量,减振器的耗散能量以及系统所能储存的最大动能和势能。在轮对蛇行运动中轮轨蠕滑力将本来用于轮对前进的能量转化为轮对横向振动能量。这是轮对发生蛇行乃至失稳的能量来源。轮对蛇行运动能量流可以用图 2 来表示。

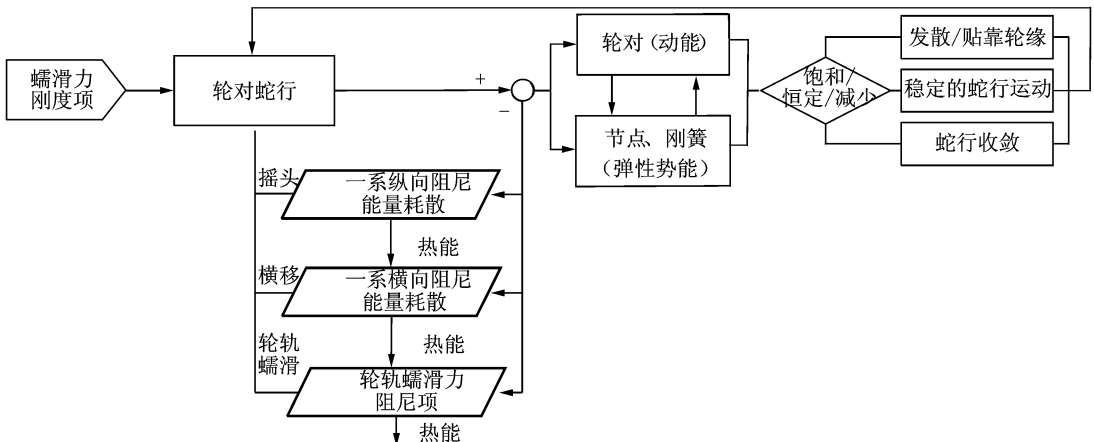


图 2 轮对蛇行运动的能量流

Fig. 2 The energy flow of wheelset hunting motion

综上所述,轮对陀螺系统中,阻尼项 D 耗散能量;陀螺项 G 不做功;刚度项分为悬挂刚度 K_F 和轨蠕滑部分 K_R ,悬挂刚度 K_F 项能量既不输入,也不输出,起到存储能量的作用;轨蠕滑刚度项 K_R 和蠕滑循环矩阵 E 输入能量。

3 非线性轮对陀螺系统的分叉分析

笔者从能量的角度分析了轮对系统稳定性机理,分析发现陀螺力对系统不做功。为进一步分析,对系统(1)运用打靶法^[8]进行数值求解,考察轮对横移随速度增大过程中的变化情况,画出轮对横移幅值分叉图,分析陀螺力对轮对 Hopf 分叉的影响。

式(3)中,当陀螺矩阵 $G=0$ 时,系统退化为非陀螺系统。通过打靶法计算其蛇形运动响应,将结果和原系统进行对比分析,对比结果如图3所示。

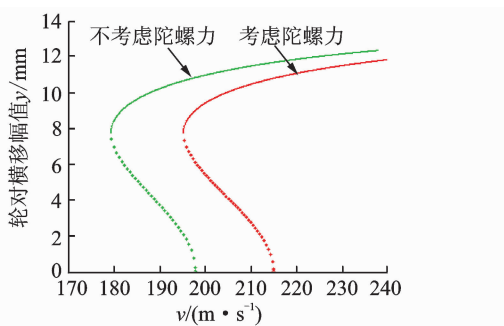


图3 陀螺力对 Hopf 分叉的影响

Fig. 3 Influence of gyroscopic force on Hopf bifurcation

由图3可知,陀螺力使系统的线性临界速度和非线性临界速度增大,系统稳定性变好,且非陀螺系统相对陀螺系统,相同速度下轮对横移幅值更大,更快失稳甚至贴靠轮缘,可见陀螺力具有增稳作用。

4 陀螺效应对蛇行运动稳定性的贡献率

由第2,3节分析可知,陀螺力对系统不做功但具有增稳作用。但是在现有高速列车稳定性分析时,通常没有考虑陀螺效应的影响,那么陀螺力对蛇形稳定性影响具体有多大,在什么情况下陀螺力可忽略,什么情况下应该考虑陀螺效应,这些问题的进一步分析对高速列车的安全运行至关重要。因此,作者引入陀螺力稳定性贡献率^[13,17],定量分析陀螺力对蛇形稳定性的影响比重,以解决前述问题。

由陀螺矩阵 G 可知陀螺项和非线性项无关,故不考虑非线性项影响,考虑如下形式线性轮对陀螺系统

$$M\ddot{x} + (D + G)\dot{x} + (K + E)x = 0 \quad (11)$$

对于形如式(11)的完整力学方程,1952年,Metelitsyn^[18]基于Routh-Hurwitz稳定性准则推导出一个系统渐进稳定的不等式判据。

$$d > 0, me^2 - dge < d^2k \quad (12)$$

其中: m, d, k, g, e 为实数, $m = \bar{u}^T M u$, $d = \bar{u}^T D u$, $k = \bar{u}^T K u$, $ig = \bar{u}^T G u$, $ie = \bar{u}^T E u$, $\bar{u}^T u = 1$ 。

需要指出,不等式判据(12)只是系统渐进稳定的一个充分非必要条件。且由于求解 m, d, k, g, e 时,需要使用特征向量 u ,然而当特征向量已知后稳定性问题也就迎刃而解了。因此,Metelitsyn不等式渐进稳定判据不能直接在工程应用中。

Seyranian等^[19]在Metelitsyn的基础上结合特征值极值推导,得出了可以在工程中实际应用的极值不等式判据。如果假设 $m > 0, d > 0, k > 0$,则系统渐进稳定的充分非必要条件为

$$D_{\min}(D_{\min}K_{\min} + G_{\max}E_{\max}) - M_{\max}E_{\max}^2 > 0 \quad (13)$$

其中: $M_{\min} = \lambda_{\min}(M) \leq m \leq \lambda_{\max}(M) = M_{\max}$, $D_{\min} = \lambda_{\min}(D) \leq d \leq \lambda_{\max}(D) = D_{\max}$, $K_{\min} = \lambda_{\min}(K) \leq k \leq \lambda_{\max}(K) = K_{\max}$, $-G_{\max} \leq G \leq G_{\max}$, $-E_{\max} \leq e \leq E_{\max}$ 。

由式(13)可定义含陀螺项的完整力学系统稳定性系数^[13,17]

$$a_i = \frac{D_{\min}(D_{\min}K_{\min} + G_{\max}E_{\max})}{M_{\max}E_{\max}^2} \quad (14)$$

由方程(14)知,陀螺系统稳定的充分非必要条件为: $a_i > 1$,即当 $a_i > 1$ 时,系统必定稳定;反之,当系统不稳定时,必然有 $a_i < 1$;但是 $a_i < 1$ 时,系统不一定失稳,故 $a_i = 1$ 不能作为系统失稳的临界条件,文献[13]将 $a_i = 1$ 作为系统失稳的临界条件并进而得到临界速度,笔者认为是值得商榷的。尽管如此,但不等式判据(13)仍然可以作为稳定性分析的一个比较有力的手段。

当不考虑陀螺项时,即陀螺矩阵 $G=0$,则有 $G_{\max}=0$,同理,可定义不含陀螺项的稳定性系数

$$a = \frac{D_{\min}^2 K_{\min}}{M_{\max} E_{\max}^2} \quad (15)$$

非陀螺系统稳定的充分非必要条件为: $a > 1$ 。

由方程(3)计算出各矩阵的特征值极值,结合参数表1,绘出系统稳定性系数曲线图,如图4所示。

如图4,稳定性系数 a_i , a 越大,系统稳定性能越

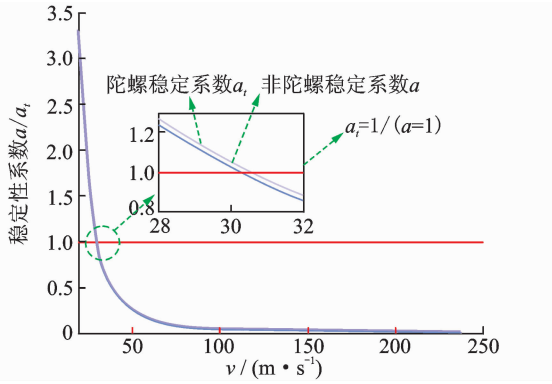


图 4 稳定性系数曲线
Fig. 4 The stability coefficients

好且恒有 $a < a_t$ ，即相同条件下，考虑陀螺力影响，系统稳定性更好，从而进一步验证了第 3 节分析的陀螺力具有增稳功能。当速度逐渐增大时，稳定性系数逐渐降低，系统稳定性逐渐变差，这与实际结果相符。由图 3 可知系统蛇行失稳临界速度为 195.2 m/s，当速度超过临界速度后，系统失稳，稳定性系数趋近于 0。

为了进一步研究陀螺效应在系统稳定性中的影响，此处引用陀螺力贡献率^[13,17]

$$T = \frac{a_t - a}{a_t} = \frac{G_{\max} E_{\max}}{D_{\min} K_{\min} + G_{\max} E_{\max}} \quad (16)$$

陀螺力贡献率 T 反映了陀螺力在轮对蛇形稳定性中作用的比例， T 越小，表示陀螺力增稳作用越小。

如图 5 所示，陀螺力贡献率随着轮对运行速度的增大而增大，低速时，陀螺力贡献率较小。随着运行速度的增大，陀螺力贡献率逐渐增大。当速度高于 56 m/s 后，稳定性贡献率超过 10%，陀螺力影响将不可忽略。我国现有高速列车运行速度普遍超过 200 km/h(55.6 m/s)，降速前甚至超过 300 km/h，因此在高速列车稳定性分析时应该考虑陀螺力的影响。

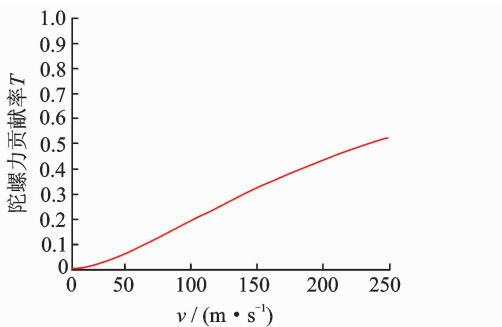


图 5 陀螺力贡献率曲线

Fig. 5 The gyroscopic contributory ratio

5 结 论

笔者建立了轮对陀螺非线性模型，从能量的角度分析了轮对蛇形运动时系统能量变化，阐述了轮对蛇行运动的能量流；用打靶法对比分析了非线性轮对陀螺系统和非陀螺系统的 Hopf 分叉；最后，定义了稳定性系数和陀螺力贡献率，定量分析了陀螺力对系统稳定性的影响。综合前述分析，得到如下结论：

1) 轮对陀螺系统中，阻尼项 D 耗散能量；陀螺项 G 不做功；刚度项分为悬挂刚度 K_F 和轮轨蠕滑部分 K_R ，悬挂刚度 K_F 项能量既不输入，也不输出，起到存储能量的作用；轮轨蠕滑刚度项 K_R 和蠕滑循环矩阵 E 输入能量。

2) 陀螺力具有增稳作用，陀螺力使系统的线性临界速度和非线性临界速度增大，系统稳定性变好，且非陀螺系统相对陀螺系统，相同速度下轮对横移幅值更大，更快失稳甚至贴靠轮缘。

3) 陀螺力贡献率随着速度的增大而增大，低速时，陀螺力贡献率较小。当轮对高速运行时，陀螺力影响较为显著，陀螺力影响将不可忽略。

利用陀螺力增稳功能，合理设计车辆，有利于提高车辆运行速度，将对高速列车安全、高效运行起着至关重要的作用。此外，笔者仅分析了轮对系统的陀螺效应，整车陀螺效应研究工作尚未开展，整车陀螺稳定性问题可作为今后研究工作重点。

参 考 文 献

[1] Knothe K, Böhm F. History of stability of railway and road vehicles[J]. Vehicle System Dynamics, 1999, 31(5):283-323.

[2] De Pater A D. The approximate determination of the hunting movement of a railway vehicle by aid of the method of Krylov and Bogoljubov[J]. Applied Scientific Research, 1961, 10(1): 205-228.

[3] Wickens A H. The dynamic stability of railway vehicle wheel-sets and bogies having profiled wheels [J]. International Journal of Solids and Structures. 1965, 1(3):319-341.

[4] Wickens A H. The dynamic stability of a simplified four-wheeled railway vehicle having profiled wheels [J]. International Journal of Solids and Structures, 1965, 1(4):385-406.

- [5] Cooperrider N K. The hunting behavior of conventional railway trucks[J]. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 1972, 94(2): 752-761.
- [6] Trued H. Dynamics of a rolling wheelset[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1993, 46(7): 438-444.
- [7] Polach O. Comparability of the non-linear and linearized stability assessment during railway vehicle design [J]. *Vehicle System Dynamics*, 2006, 44(S1): 129-138.
- [8] 曾京. 车辆系统的蛇行运动分叉及极限环的数值计算[J]. *铁道学报*, 1996, 18(3): 13-19.
Zeng Jing. Numerical computations of the hunting bifurcation and limit cycles for railway vehicle system [J]. *Journal of the China Railway Society*, 1996, 18(3): 13-19. (in Chinese)
- [9] 孙桐林, 胡忠国, 高国生. 轮对蛇行运动 Hopf 分岔的非线性反馈控制[J]. *国防交通工程与技术*, 2004, 2(1): 29-33.
Sun Tonglin, Hu Zhongguo, Gao Guosheng. Nonlinear feedback control of hopf bifurcation of the hunting motion in a rail wheelset [J]. *Traffic Engineering and Technology for National Defence*, 2004, 2(1): 29-33. (in Chinese)
- [10] Dong Hao, Zeng Jing, Xie Jianhua, et al. Bifurcation instability forms of high speed railway vehicles [J]. *Science China Technological Sciences*, 2013, 56(7): 1685-1696.
- [11] 吴石, 渠达, 刘献礼, 等. 轴向铣削力与陀螺效应对颤振稳定域的影响[J]. *振动、测试与诊断*, 2013, 33(6): 931-936.
Wu Shi, Qu Da, Liu Xianli, et al. Influence of axial milling force and gyroscopic effect on milling chatter stability [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2013, 33(6): 931-936. (in Chinese)
- [12] 陈超, 王均山, 刘通. 超声悬浮式陀螺的结构设计及悬浮特性分析[J]. *振动、测试与诊断*, 2013, 33(6): 1060-1064.
Chen Chao, Wang Junshan, Liu Tong. Investigation on structural dynamic design and suspending characteristics ultrasonic levitation type of gyros [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2013, 33(6): 1060-1064. (in Chinese)
- [13] 黄世凯. 轮对运动稳定性的机理研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2013.
- [14] 王福天. 车辆系统动力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1994: 49-55.
- [15] Wagner U V. Nonlinear dynamic behaviour of a railway wheelset [J]. *Vehicle System Dynamics*, 2009, 47(5): 627-640.
- [16] 李俊峰, 王照林. 非保守线性陀螺系统的稳定性[J]. *应用数学和力学*, 1996, 17(12): 1107-1111.
Li Junfeng, Wang Zhaolin. Stability of Non-conservative linear gyroscopic systems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, 17(12): 1107-1111. (in Chinese)
- [17] Dong Hao, Zeng Jin, Wu Liang, et al. Analysis of the gyroscopic stability of the wheelset [J]. *Shock and Vibration*, 2014, 2014(2014): 1-7.
- [18] Metelitsyn I I. The problem of gyroscopic stabilization [J]. *Doklady, Akademii Nauk SSSR*, 1952, 86(1): 31-34. (in Russian)
- [19] Seyranian A P, Kliem W. Metelitsyn's inequality and stability criteria in mechanical problems [C] // 2003 International Conference "Physics and Control" Proceedings. Saint Petersburg, Russia: IEEE, 2003: 1096-1101.



第一作者简介: 张波, 男, 1988年1月生, 博士生。主要研究方向为车辆系统稳定性。

E-mail: 726928350@qq.com

