

基于稳健回归分析的转子系统不平衡量识别<sup>\*</sup>

臧廷朋<sup>1</sup>, 温广瑞<sup>1,2,3</sup>, 廖与禾<sup>1</sup>

(1. 西安交通大学现代设计与转子轴承系统教育部重点实验室 西安, 710049)  
(2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室 西安, 710049)  
(3. 新疆大学机械工程学院 乌鲁木齐, 830047)

**摘要** 不平衡是造成转子系统振动过大、影响其安全运行的重要因素。传统的最小二乘法(least squares, 简称 LS)在不平衡量识别过程中存在对外界干扰或异常值敏感的问题,改进的加权最小二乘法(weighted least squares, 简称 WLS)虽然能够降低异常值的影响,但需要经验积累并对振动数据进行深入分析。提出一种基于稳健回归分析的转子系统不平衡量识别方法,通过构建优化的目标函数自动消除异常值的影响,得到正常状态下转子系统不平衡量的最佳估值。实验结果表明,该方法能够有效消除外界干扰和异常值的影响,准确识别出转子系统不平衡量。

**关键词** 稳健回归分析; 转子; 最小二乘法; 不平衡  
**中图分类号** TH17

引 言

转子动平衡技术是减小机组振动和保障机组安全平稳运行的重要手段。目前,已形成以影响系数法和模态平衡法为核心的众多成熟技术<sup>[1-4]</sup>,国内外的相关研究集中以提高平衡效率为目的。李常有等<sup>[5]</sup>通过研究系统的不平衡响应与模型等效载荷的关系,提出了一种基于模型的转子系统不平衡量估计方法,该方法利用模态扩展技术可以准确识别不平衡量的大小和位置。Saldarriaga 等<sup>[6]</sup>从反问题的角度出发,利用基于遗传算法的伪随机优化方法模拟转子系统的不平衡响应,实现不平衡量的识别。上述研究都是以准确获得振动数据为基础,但在噪声干扰较大等的恶劣工业环境中推广应用受到很大限制。

实际平衡过程中通常利用最小二乘法或加权最小二乘法等优化算法实现转子系统不平衡量的识别。最小二乘法对转子不平衡响应的误差分布有严格要求,当误差不满足正态分布或测量数据存在异常值时,不能准确完成系统不平衡量的识别<sup>[7]</sup>。加权最小二乘法通过分配不同的权重系数能够有效

消除外界干扰的影响,但需要操作者具有丰富的经验并对振动数据进行深入分析。近年来,先进的动平衡技术特别是快速高效动平衡和自动平衡技术<sup>[8]</sup>的出现和发展对转子系统不平衡量识别的稳健性提出了更高的要求。

笔者利用稳健回归分析方法实现复杂环境下转子系统的不平衡量识别。该方法能够克服最小二乘法对测量数据异常值敏感的问题,提高不平衡量识别过程的稳健性。能够依据不平衡响应的分布特性自动分配不同的权重系数,减小对专家经验的依赖。通过实验验证了基于稳健回归分析的转子系统不平衡量识别方法的有效性和实用性。

1 影响系数法及回归分析模型

影响系数法是建立在线性振动理论基础上的的一种平衡方法,因其原理清晰、操作简单而广泛应用于转子系统平衡<sup>[9]</sup>。 $M$  个平衡面、 $N$  个测振点、单一平衡转速时影响系数的平衡方程为

$$X\theta + y = e \tag{1}$$

矩阵形式表达为

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51365051);教育部新世纪优秀人才计划资助项目(NCET-13-0461);中国博士后科学基金资助项目(2012M521758);学校博士学科点专项科研基金资助项目(20120201120043);基本科研业务经费资助项目  
收稿日期:2014-03-27;修回日期:2014-11-21

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{X}$  为影响系数矩阵;  $a_{ij}$  为  $j$  平衡面对  $i$  测点的影响系数;  $\theta_j$  为  $j$  平衡面的配重质量;  $y_i$  为  $i$  测点的不平衡响应;  $e_i$  为  $i$  测点的残余振动。

采用多平面多转速  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$  影响系数法平衡时,式(1)变为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(\omega_1) \\ \mathbf{X}(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(\omega_\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(\omega_1) \\ \boldsymbol{\theta}(\omega_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}(\omega_\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{y}(\omega_1) \\ \mathbf{y}(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(\omega_\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(\omega_1) \\ \mathbf{e}(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{e}(\omega_\lambda) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)可以转换为多元回归分析问题<sup>[10]</sup>

$$y_i = x_{i,1}\theta_1 + x_{i,2}\theta_2 + \cdots + x_{i,M}\theta_M + e_i = \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\theta} + e_i \quad (4)$$

2 稳健回归分析

稳健回归分析的主要思想是通过对异常值敏感的最小二乘回归中的目标函数进行优化,选择适当的权重函数尽可能地降低异常值对参数估值的影响,得到存在外界干扰情况下的最佳估值。根据异常点的类型,回归分析的稳健性分别由失效点和影响函数度量。失效点定义为使估计量达到任意大时异常点的最小百分比,主要用来限制转子系统不平衡响应中外界干扰和异常值的影响。对于给定估计方法  $T$ ,长度为  $n$  的有限元素序列  $Z$  的失效点为

$$\varepsilon_n^*(T, Z) = \min \left\{ \frac{p}{n} : \sup_{Z^*} T_n(Z^*) = \infty \right\} \quad (5)$$

其中:  $Z^*$  为任意改变  $Z$  中  $p$  个元素值所组成的序列。

由于单个异常值能够使 LS 产生任意的估计值,因此 LS 的失效点为 0,而稳健回归分析的失效点最高可达 50%。

影响函数用来度量转子系统影响系数矩阵中泄漏点对回归分析的局部影响,通常利用帽子矩阵  $\mathbf{H}$  对角线值进行衡量

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^* \mathbf{T} \mathbf{X}^{-1}) \mathbf{X}^{* \mathbf{T}} \quad (6)$$

目前,稳健回归分析已经发展多种不同的估计方法,笔者主要研究 M-Huber 估计、MM 估计以及最小二乘中位数(least median of squares,简称 LMS)估计在转子系统不平衡量识别中的

应用。

2.1 M-Huber 估计

M 估计是最大似然估计的扩展和推广,由 Huber 于 1981 年提出<sup>[11]</sup>,通过一个递增速率较低的残差函数代替最小二乘回归中残差平方和函数实现回归稳健性的提高。

$$\hat{\theta}_M = \min \sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{r_i}{\hat{\sigma}}\right) = \min \sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{y_i - \sum x_{ij}\theta_j}{\hat{\sigma}}\right) \quad (7)$$

其中:  $r_i$  为第  $i$  个响应变量的残差;  $\hat{\sigma}$  为残差的尺度参数。

M 估计的目标函数不具备尺度同变性,需要利用尺度参数对残差进行标准化处理,常用中位绝对离差(median absolute deviation,简称 MAD)对残差的尺度参数进行稳健估计。

$$\hat{\sigma} = \text{MAD}(r) = \text{med}\{|r - \text{med}(r)|\} \quad (8)$$

其中: med 为计算序列的中位数。

M-Huber 是 M 类估计中常用的一种估计,其目标函数为

$$\rho_H(r_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{r_i}{\hat{\sigma}}\right)^2 & \left(\left|\frac{r_i}{\hat{\sigma}}\right| \leq k\right) \\ k \left(\left|\frac{r_i}{\hat{\sigma}}\right| - \frac{k}{2}\right) & \left(\left|\frac{r_i}{\hat{\sigma}}\right| > k\right) \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $k$  为调整系数,较小的  $k$  值能产生较大的稳健性,在综合考虑稳健性和计算效率的情况下通常取  $k = 1.345$ 。

2.2 LMS 估计

最小二乘中位数估计利用残差平方的中位数替换最小二乘估计中的残差平方和

$$\theta_{\text{LMS}} = \min_{\theta} \left\{ \text{med} \left( y_i - \sum x_{ij}\theta_j \right)^2 \right\} = \min_{\theta} \{ \text{med}(r_i^2) \} \quad (10)$$

残差平方的中位数相比残差平方和更为稳健,估计结果能更好地抵抗干扰和特异值的影响,失效点最高可达 50%,但较低的计算效率限制了该估计的广泛应用。

2.3 MM 估计

MM 估计使用一种以上的 M 估计来计算最终的估计值,具有高稳健性优点的同时还保留了 M 类估计运算效率高的特点<sup>[12]</sup>,因而成为目前应用最多的稳健估计方法。MM 估计的目标函数采用 Tukey 双核函数

$$\rho(r_i)=\begin{cases}\frac{k^2}{6}\left\{1-\left[1-\left(\frac{r_i}{k}\right)^2\right]^3\right\} & (|r_i|\leq k) \\ \frac{k^2}{6} & (|r_i|>k)\end{cases}$$

(11)

当调整系数  $k=4.685$  时,MM 估计稳健性较好,同时可以保持 95% 的估计效率。MM 估计的求解通过迭代再加权最小二乘法 (iteratively reweighted least squares, 简称 IRLS) 实现,步骤如下:

- 1) 利用一个高失效点估计 (LMS 估计, S 估计) 得到不平衡量的一个初始估计  $\hat{\theta}_0$  和对应残差  $r_0$ ;
- 2) 通过 M 估计计算得到残差  $r_0$  尺度的稳健估计  $s_n$ ;
- 3) 利用残差  $r_0$  及其尺度估计  $s_n$  进行加权最小二乘的第 1 次迭代,得到不平衡量的 M 估计  $\hat{\theta}_1$  及残差  $r_1$ ,更新残差;
- 4) 重复步骤 2, 3,直到循环迭代满足终止条件为止。

3 平衡实验

通过 Bently RK4 转子实验台进行基于稳健回归分析的不平衡量估计方法的验证。为了充分考虑转子支撑各向异性的影响,分别在 A, B 两测量面上安装相互垂直的电涡流传感器,实验台结构和传感器的安装方式如图 1 所示。系统结构下转子的一阶临界转速约为 1 880 r/min。

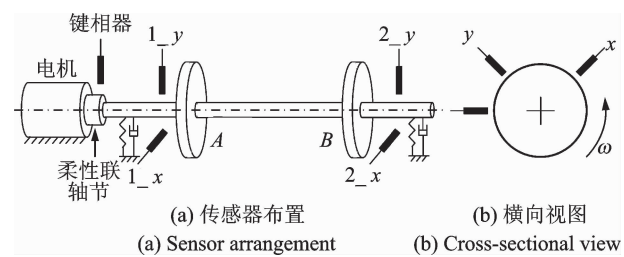


图 1 传感器安装示意图

Fig. 1 The structure sketch of test rig

为了消除转子非失衡故障对不平衡量估计的影响,通过一次停车过程记录转子系统原始状态下的振动信息。在 A 平衡面 0° 位置添加 0.4 g 的不平衡量模拟失衡故障,通过一次起车过程获得该状态的振动信息。利用上述两次过程获得转子系统在 1 000~2 500 r/min 范围内的不平衡量响应如图 2 所示。

通过转子系统的不平衡量响应以及影响系数矩阵对不同稳健回归分析的不平衡量估计效果进行了

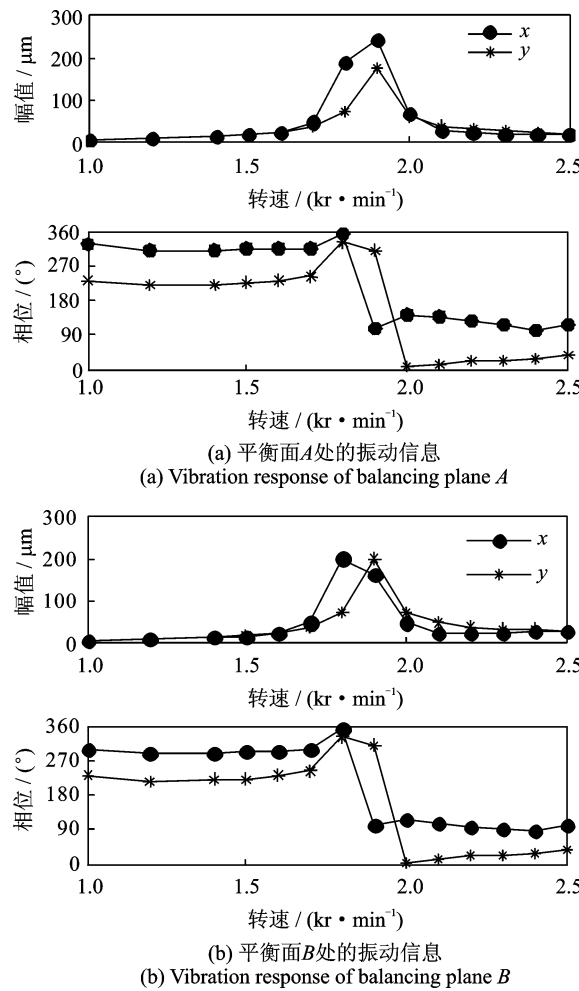


图 2 转子系统不平衡量响应

Fig. 2 Unbalance response of the rotor system

验证,如表 1 所示。其中,转子系统的影响系数矩阵可以采用系统有限元模型或者历史平衡记录获得<sup>[13]</sup>。笔者通过动平衡实验利用基于实测的方法获取该转子系统的影响系统矩阵。在已知转子不平衡量的情况下,可以采用不平衡量实际值  $\bar{\theta}$  和估计值  $\hat{\theta}$  的相对误差评价各种估计方法的效果。在综合考虑质量误差和角度误差的时,相对误差为

$$\eta=\sqrt{\frac{(\hat{\theta}-\bar{\theta})^{*T}(\hat{\theta}-\bar{\theta})}{\bar{\theta}^{*T}\bar{\theta}}}$$

(12)

表 1 不平衡量估计效果

Tab. 1 Estimation results of the unbalance			
项目	质量/g	角度/(°)	相对误差/%
失衡量	0.4	0	
LS	0.42	33.53	59.57
M-Huber( $k=1.345$ )	0.39	28.0	48.18
M-Huber( $k=1$ )	0.39	18.0	30.95
M-Huber( $k=0.5$ )	0.38	6.58	12.36
LMS	0.39	358.9	3.39
MM	0.37	358.6	6.76

从表 1 可以看出,稳健回归分析能够比最小二乘法取得更好的不平衡量估计效果,相对误差由最高的 59.57% 下降到最低的 3.39%,不平衡量估计精度提升明显,特别是相位估计精度的提高。对于 M-Huber 估计方法,随着  $k$  值由 1.345 减小到 0.5,即随着稳健程度的不断提高,不平衡量的估计结果可以得到相同的结论。在综合考虑计算效率和抗干扰能力时,基于稳健 MM 估计的方法能够取得较为理想的识别结果。

基于稳健回归分析的不平衡估计方法根据不平衡量响应的残差分布分配不同的权重系数,本次实验中 A、B 截面的权重系数如图 3 和图 4 所示,其中虚线位置表示一阶临界转速。由图中可知,不同的稳健回归方法由于目标函数的不同可能对相同的失衡响应分配不同的权重系数;所有的稳健回归方法都降低一阶临界转速附近失衡响应的权重系数,与实际平衡中由于临界转速附近振动剧烈而难于获得准确的响应一致。由图 3、4 及表 1 可以看出,稳健回归分析克服了最小二乘法对临界转速附近振动

变化敏感的问题,根据系统不平衡响应的分布特性自动分配的权重系数减小了对专家经验的依赖,实现转子系统多转速多平面条件下的不平衡量的准确估计。

4 结束语

讨论了存在外界干扰或异常值的情况下转子系统不平衡量识别的问题,提出了基于稳健回归分析的不平衡量识别方法。结果表明:a. M-Huber, LMS 和 MM 等稳健回归分析方法能够取得比最小二乘法更好的不平衡量识别精度,特别是相位的识别精度有明显的提高;b. 在综合考虑计算效率和稳健性程度的情况下,基于稳健 MM 估计的方法能够取得理想的不平衡量识别效果;c. 与最小二乘法对不平衡响应分配相同的权重系数不同,基于稳健回归分析的不平衡量识别方法降低一阶临界转速附近不平衡响应的系数,与实际平衡中由于一阶临界转速附近振动剧烈而难以准确的失衡响应一致。

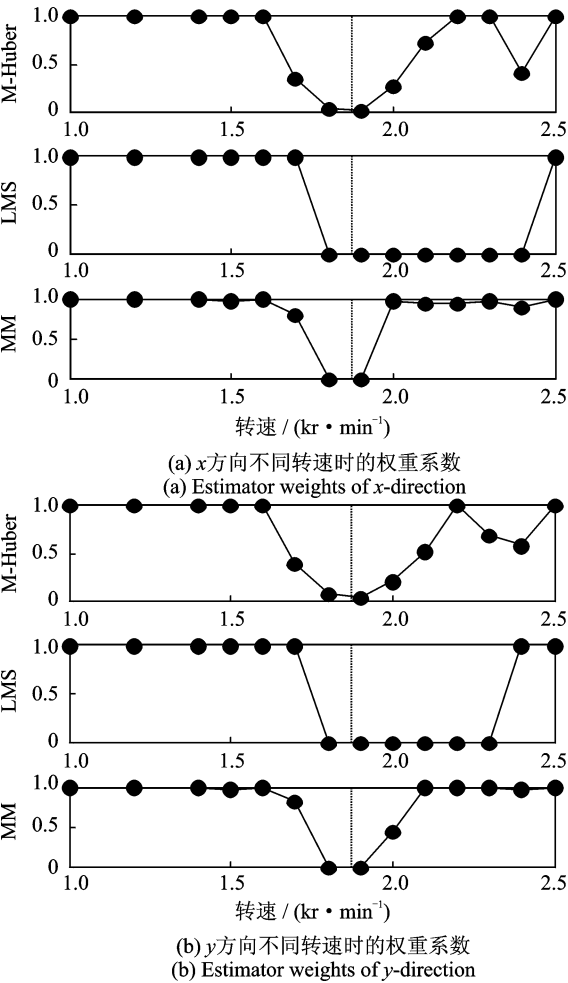


图 3 平衡面 A 权重系数分布

Fig. 3 Estimator weights of balancing plane A

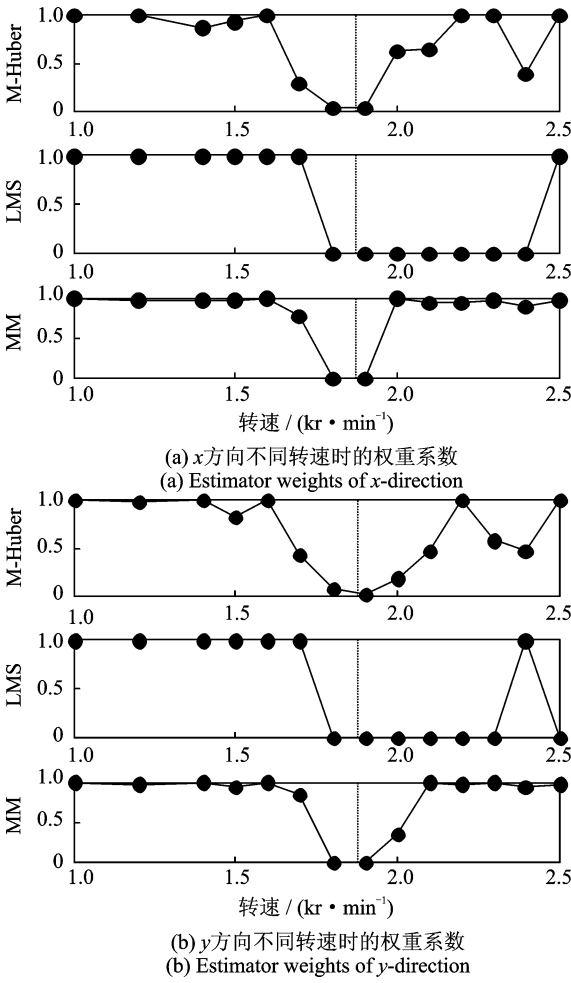


图 4 平衡面 B 权重系数分布

Fig. 4 Estimator weights of balancing plane B

参 考 文 献

[1] Goodman T P. A least-squares method for computing balance corrections [J]. Journal of Engineering for Industry, 1964, 86(3):273-277.

[2] Parkinson A G, Darlow M S, Smalley A J. A theoretical introduction to the development of a unified approach to flexible rotor balancing[J]. Journal of Sound and Vibration, 1980, 68(4): 489-506.

[3] 缪红燕,高金吉,徐鸿,等. 基于有限元法的柔性转子虚拟动平衡研究[J]. 振动、测试与诊断, 2004,24(3): 184-188.

Miao Hongyan, Gao Jinji, Xu Hong, et al. A study of virtual balancing of flexible rotor based on finite element method [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2004, 24(3):184-188. (in Chinese)

[4] 纪跃波. 弱非平稳转速下转子动平衡方法[J]. 振动、测试与诊断, 2012, 32(4):596-601.

Ji Yuebo. Dynamic balancing of the rotor with weakly non-stationary rotational speed[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2012, 32(4): 596-601. (in Chinese)

[5] 李常有,徐敏强,郭聿. 基于模型的转子系统不平衡量的估计[J]. 航空动力学报, 2009, 24(7):1530-1536.

Li Changyou, Xu MinQiang, Guo Song. Estimation of unbalance magnitude of rotor system based on model [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(7):1530 - 1536. (in Chinese)

[6] Saldarriaga M V, Steffen V, Der Hagopian J, et al. On the balancing of flexible rotating machines by using an inverse problem approach [J]. Journal of Vibration and Control, 2011, 17(7):1021-1033.

[7] Pennacch P, Vania A, Bachschmid N. Increasing the

robustness of fault identification in rotor dynamics by means of m-estimators [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(8):3003-3029.

[8] 夏松波,刘永光,李勇,等. 旋转机械自动动平衡综述[J]. 中国机械工程, 1999, 10(4):106-109.

Xia Songbo, Liu Yongguang, Li Yong, et al. A review on automatic balancing of rotating machinery [J]. China Mechanical Engineering, 1999, 10(4):106-109. (in Chinese)

[9] 陈敬平,严普强. 转子现场动平衡的相对影响系数法[J]. 振动、测试与诊断, 1994, 14(4):1-6.

Chen Jingping, Yan Puqiang. Relative influence coefficient method-effective in field balancing of flexible rotors [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1994, 14(4):1-6. (in Chinese)

[10] Montgomery D C, Peck E A, Vining G G. Introduction to linear regression analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 2012:67-69.

[11] Huber P J. Robust statistics [M]. New York: Wiley, 1981:43-54.

[12] Yohai V J. High breakdown-point and high efficiency robust estimates for regression [J]. The Annals of Statistics, 1987, 15(2): 642-656.

[13] Pennacchi P, Chatterton S, Ricci R. Rotor balancing using high breakdown-point and bounded-influence estimators [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010, 24(3):860-872.



第一作者简介:臧廷朋,男,1985 年 12 月生,博士研究生。主要研究方向为旋转机械故障诊断和转子动平衡技术。曾发表《基于非平稳信息的转子瞬态动平衡方法》(《振动、测试与诊断》2013 年第 33 卷第 4 期)等论文。  
E-mail:zangtingpeng@126.com

