

泛灰数学的不确定链式结构系统固有频率分析*

靳红玲^{1,2}, 陈建军², 曹鸿钧², 徐亚兰²

(1. 西北农林科技大学机电工程学院 杨凌, 712100)

(2. 西安电子科技大学电子装备结构设计教育部重点实验室 西安, 710071)

摘要 针对不确定因素对系统动力特性的影响,在应用泛灰数学的基础上,对不确定链式结构系统固有频率的求解方法进行了研究。首先,通过对泛灰数四则运算结果的分析,指出了利用泛灰数进行区间分析存在的缺陷,提出了一种改进的泛灰数除法运算规则,进而将链式结构系统中的不确定性参数用泛灰数表示;其次,基于矩阵传递法,导出了系统固有频率的非线性泛灰方程,并针对该方程的求解,在运用泛灰数运算规则的基础上,提出了一种区间搜索进退算法;最后,通过算例说明了笔者算法的可行性和求解方法的有效性。

关键词 链式结构; 传递矩阵法; 泛灰数学; 不确定性; 固有频率

中图分类号 O242.29; TB122; TH113.1

引言

结构固有频率的计算在工程结构的动态分析和设计中具有重要的作用。但在实际中,由于几何参数、物理参数等可能存在的不确定性,使得在结构动力特性分析时有必要考虑这些不确定性因素对固有频率的影响。灰色系统理论^[1]是继随机理论、模糊理论和区间数学^[2-4]之后解决不确定性问题的又一类方法,它可以处理多种不确定性,尤其适用于解决概率统计、模糊数学难以解决的“小样本”、“贫信息”不确定问题,而在决策学、预测学等领域也有广泛的前景^[5-6]。在灰色系统理论基础上,有学者提出了泛灰集合和泛灰数学分析基础^[7],为灰色信息的定量描述提供了新途径。泛灰数学由于其有关运算能够展开,为此利用泛灰数学方法处理不确定性问题,具有较好的实用性^[8-10]。

工程中许多结构和传动机械装置,如连续梁结构、多层框架结构、船舶推进轴等均可简化为链式结构系统。对于该类结构系统,迄今所见到的大多数结构动力分析建模均属于确定性模型^[11]。此类模型无法反映系统结构中的不确定因素对其动力特性的影响,在许多情况下,必须考虑系统中结构参数本身的不确定性。目前,针对结构参数具有不确定性的链式结构系统动力特性的研究较少^[12-13]。

现以含有区间参数的链式结构系统为对象,笔

者结合泛灰数学方法和传递矩阵法,研究了该系统的质量和刚度同时具有区间不确定性时系统固有频率的求解方法。

1 泛灰数学基础及其区间分析

1.1 泛灰数学基础

定义 1 设论域 $U = R$ (实数集),称 R 上的泛灰集为泛灰数集,记作 $g(R)$,且称 $g(R)$ 中的元素为泛灰数,记作 $g = (x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}])$, $x \in R; \underline{\mu}, \bar{\mu} \in R$,其中: x 为观测值; $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ 为 x 的灰信息部。

$g_{(0)} = (0, [0, 0])$ 称为零元,把观测部为零、灰信息部不为零的泛灰数统记为 $g'_{(0)}$,并称之为亚零元。零元与亚零元统称为泛零,记作 $g''_{(0)}$ 。

泛灰数的四则运算规则^[7]如下

$$g_1 + g_2 = (x_1 + x_2, [\frac{x_1\underline{\mu}_1 + x_2\underline{\mu}_2}{x_1 + x_2}, \frac{x_1\bar{\mu}_1 + x_2\bar{\mu}_2}{x_1 + x_2}]) \quad (1)$$

$$g_1 - g_2 = (x_1 - x_2, [\frac{x_1\underline{\mu}_1 - x_2\underline{\mu}_2}{x_1 - x_2}, \frac{x_1\bar{\mu}_1 - x_2\bar{\mu}_2}{x_1 - x_2}]) \quad (2)$$

$$g_1 \times g_2 = (x_1 x_2, [\underline{\mu}_1 \underline{\mu}_2, \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2]) \quad (3)$$

$$g_1 / g_2 = (x_1 / x_2, [\underline{\mu}_1 / \underline{\mu}_2, \bar{\mu}_1 / \bar{\mu}_2]) \quad (\text{若 } g_2 \neq g'_{(0)}) \quad (4)$$

对于一个泛灰数 $g = (x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}])$,若把 $x, \underline{\mu}, \bar{\mu}$ 看

* 中国博士后科学基金面上资助项目(2015M582709);中央高校基本科研资金资助项目(2452015058)
收稿日期:2014-03-25;修回日期:2014-04-23

作是泛灰数 g 的坐标,则当 $\underline{\mu}, \bar{\mu}$ 均为实数时, g 对应于 R^3 中的一个点 $g' = (x, \underline{\mu}, \bar{\mu})$ 称为泛灰数 g 的像。

令: $f(R) = \{(x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}]) \mid x, \underline{\mu}, \bar{\mu} \in R\}$, 若存在 $f(R)$ 到 R^3 的一个对应 $\lambda, \lambda: g = (x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}]) \in f(R) \rightarrow g' = (x, \underline{\mu}, \bar{\mu}) \in R^3$, 则 λ 是 $f(R)$ 到 R^3 的一一对应。故可以利用 R^3 中点的距离来定义泛灰数之间的距离。

定义 2 设 $g_1 = (x_1, [\underline{\mu}_1, \bar{\mu}_1]) \in f(R), g_2 = (x_2, [\underline{\mu}_2, \bar{\mu}_2]) \in f(R)$, 则称

$$d(g_1, g_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2)^2 + (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)^2} \quad (5)$$

为泛灰数 g_1, g_2 之间的距离, 简称为泛灰模, 它有如下性质: a. $d(g_1, g_2) \geq 0$; b. $d(g_1, g_2) = 0 \Leftrightarrow g_1 = g_2$; c. $d(g_1, g_2) = d(g_2, g_1)$ 。

1.2 泛灰数学的区间分析功能

在实际应用时, 泛灰数 $g = (x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}])$ 中的 $\underline{\mu}, \bar{\mu}$ 分别可理解为对 x 的最低、最高信任程度。则一个泛灰数可表示为一个区间数, 即: $(x, [\underline{\mu}, \bar{\mu}]) = [x\underline{\mu}, x\bar{\mu}]$ 。同理, $\forall [a, b] \in I(R)$ (闭区间实数集), 均可表示为一个泛灰数 $g = (x, [\underline{\mu}(x), \bar{\mu}(x)])$, 此时限制 $\underline{\mu}, \bar{\mu} \in [-1, 1]$ 。转化规则^[7]如下:

1) 当 $a > 0$, 有 $[a, b] = (b, [a/b, 1])$ (6)

2) 当 $ab < 0$, 且 $\max\{|a|, |b|\} = b$, 有 $[a, b] = (b, [a/b, 1])$ (7)

3) 当 $ab < 0$, 且 $\max\{|a|, |b|\} = |a|$, 有 $[a, b] = (a, [b/a, 1])$ (8)

4) 当 $b < 0$, 有 $[a, b] = (a, [b/a, 1])$ (9)

利用区间数计算函数值域, 计算结果与函数的表达式有关^[10]; 而利用泛灰数计算函数值域与函数的表达式无关, 且用泛灰数计算得到的解区间包含于区间数计算得到的解区间。笔者通过分析式(4)发现: 在该泛灰数除法运算规则中, 商的上界和下界分别是由参与运算的泛灰数的上界和上界、下界和下界计算得到, 而上界和下界之间没有运算关系, 其结果将可能使函数值域被缩小。为此针对式(4)提出如下改进的泛灰数除法运算规则: 若 $g_2 \neq 0$, 且 g_1, g_2 相互独立, 则

$$g_1/g_2 = \begin{cases} (x_1/x_2, [\underline{\mu}_1/\underline{\mu}_2, \bar{\mu}_1/\bar{\mu}_2]) & (0 < \underline{\mu}_1 < \bar{\mu}_1, 0 < \underline{\mu}_2 < \bar{\mu}_2) \\ (x_1/x_2, [\underline{\mu}_1/\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_1/\underline{\mu}_2]) & (0 > \bar{\mu}_1 > \underline{\mu}_1, 0 > \bar{\mu}_2 > \underline{\mu}_2) \\ (x_1/x_2, [\underline{\mu}_1/\underline{\mu}_2, \bar{\mu}_1/\bar{\mu}_2]) & \text{(其他)} \end{cases} \quad (10)$$

为验证改进运算规则的正确性, 这里给出一算例: 求函数 $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$ 的值域, 其中变量用区间数和泛灰数表示分别为: $x_1 = [1, 3] = (3, [1/3, 1]), x_2 = [2, 3] = (3, [2/3, 1])$ 。

采用改进的泛灰数除法运算规则计算, 首先需保证分子与分母相互独立, 因此将原函数变形为: $f(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 + x_2/x_1)}$, 对该式将区间数转换为泛灰数, 利用笔者改进的运算规则计算得: $F = (3/5, [5/12, 1]) = [1/4, 3/5]$, 其结果即为原函数的精确解。而若利用原泛灰数运算式(4)计算得函数的值域为: $F = (1/2, [2/3, 1]) = [1/3, 1/2]$, 显然此结果缩小了原函数的值域。

由以上分析可知, 泛灰数具有区间分析功能, 利用改进的泛灰运算规则计算得到的函数解区间可以更好地接近真实解。由于区间扩展与因变量的运算顺序有关, 所以求解时需先将函数中区间数全部转换为泛灰数, 再用以上改进的泛灰函数运算规则求解。

2 链式结构系统的动力特性分析

对工程中的链式结构系统进行动力特性分析的一种简洁有效的计算方法为传递矩阵法。笔者采用如图 1 所示的单链式轴盘扭转系统, 设 J_i 和 k_i 分别表示各刚性盘的转动惯量和各弹性轴的扭转刚度。由传递矩阵法可得轴系最右端的状态向量 Z_n^R 可表示为

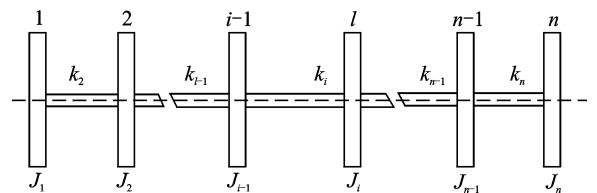


图 1 轴盘扭转振动模型

Fig. 1 Torsional vibration model of shaft-disc system

$$Z_n^R = \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_n^R = C_n C_{n-1} \dots C_1 \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^R = C \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_1^R = CZ_1^R \quad (11)$$

其中: θ, M 分别为盘与轴的转角和扭矩, 向量上标符号 L, R 分别表示盘与轴的左面和右面; C_i 称为第 i 个子传递矩阵, C 为整个轴系的总传递矩阵。

C_i 和 C 的各元素一般为系统固有频率 p 的函数, 可分别表示为

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ -p^2 J_i & 1 - p^2 J_i/k_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11}(p) & c_{12}(p) \\ c_{21}(p) & c_{22}(p) \end{bmatrix} \quad (13)$$

状态向量 \mathbf{Z}^R 和 \mathbf{Z}_n^R 则依赖于轴系两端给定的边界条件。通常对链式轴盘扭转系统进行动力特性分析时,根据边界条件,系统的固有频率函数可表示为如下的非线性方程

$$f(\boldsymbol{\delta}, p) = f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, p) = 0 \quad (14)$$

其中: $f(\boldsymbol{\delta}, p)$ 为系统固有频率函数; $\delta_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为系统中的结构参数,即指诸 J_i 和 k_i 等。

3 系统固有频率非线性泛灰方程的求解

在确定性问题中,系统中结构参数 δ_i 是已知确定量,非线性方程(14)变为关于 p 的常数高次多项式方程。而在不确定问题中,系统中的结构参数是区间变量,用区间数表示为: $[\delta_i] = [\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i]$ 。则方程(14)成为非线性的区间方程

$$f([\boldsymbol{\delta}], p) = f([\delta_1], [\delta_2], \dots, [\delta_m], p) = 0 \quad (15)$$

则该方程的解,即系统的各阶固有频率 $p_j (j=1, 2, \dots, n)$ 相应也成为区间变量 $p_j = [p_j, \bar{p}_j]$ 。

为避免直接采用区间运算法则使计算结果易于扩张这一缺陷,现将式(15)中的各不确定结构参数 $[\delta_i, \bar{\delta}_i]$ 转化为泛灰数 $(\delta_i, [\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i])$, 则非线性区间方程(15)转换为关于固有频率 p 的非线性泛灰方程

$$f((\boldsymbol{\delta}_0, [\boldsymbol{\mu}_0, \bar{\mu}_0]), p) = f((\delta_1, [\underline{\mu}_1, \bar{\mu}_1]), (\delta_2, [\underline{\mu}_2, \bar{\mu}_2]), \dots, (\delta_m, [\underline{\mu}_m, \bar{\mu}_m]), p) = 0 \quad (16)$$

运用泛灰数的四则运算规则对式(16)整理后得

$$f((\mathbf{g}_0, [\boldsymbol{\mu}_0, \bar{\mu}_0]), p) = f((g_1, [\underline{\mu}_1, \bar{\mu}_1])p^n + (g_2, [\underline{\mu}_2, \bar{\mu}_2])p^{n-1} + \dots + (g_n, [\underline{\mu}_n, \bar{\mu}_n])p^1 + (g_{n+1}, [\underline{\mu}_{n+1}, \bar{\mu}_{n+1}])) = 0 \quad (17)$$

其中: $(g_i, [\underline{\mu}_i, \bar{\mu}_i]) (i=1, 2, \dots, n+1)$ 为变量 p 的泛灰系数。

根据泛灰数与区间数的转换规则,式(17)再变换为关于 p 的非线性区间方程

$$f([\mathbf{g}_0, \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{g}_0, \bar{\mu}_0], p) = f([g_1, \underline{\mu}_1, g_1, \bar{\mu}_1]p^n + [g_2, \underline{\mu}_2, g_2, \bar{\mu}_2]p^{n-1} + \dots + [g_n, \underline{\mu}_n, g_n, \bar{\mu}_n]p^1 + [g_{n+1}, \underline{\mu}_{n+1}, g_{n+1}, \bar{\mu}_{n+1}]) = 0 \quad (18)$$

为利用本区间进退搜索算法求解式(18),首先需将各区间参数 $\delta_i = [\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i]$ 的中值 δ_i^c 代入式(14)得确定性非线性方程

$$f(\boldsymbol{\delta}^c, p) = f(\delta_1^c, \delta_2^c, \dots, \delta_m^c, p) = 0 \quad (19)$$

求解式(19),得到对应区间中值的各阶固有频率 $p_j^c (j=1, 2, \dots, n)$, 以 p_j^c 为初值求解区间方程(18),按一定的搜索步长,正向和反向搜索计算得到一系列 $f((\mathbf{g}_0, \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{g}_0, \bar{\mu}_0], p)$ 函数值,根据一定的判

断准则,求出各阶固有频率的解区间 $[p, \bar{p}]$ 。

这种利用区间搜索的进退算法,求解不确定链式结构固有频率解区间的主要步骤如下。

1) 建立所研究链式系统的子传递矩阵 \mathbf{C}_i , 根据公式 $\mathbf{C} = \mathbf{C}_n \mathbf{C}_{n-1} \dots \mathbf{C}_1$ 得到总传递矩阵 \mathbf{C} 。

2) 由边界条件表出状态向量 \mathbf{Z}_n , \mathbf{Z}_1 , 再由 $\mathbf{Z}_n = \mathbf{C}\mathbf{Z}_1$ 传递公式得到非线性方程 $f(\boldsymbol{\delta}, p) = 0$ 。

3) 求解式(14)得到对应于区间中值 $\boldsymbol{\delta}_i^c$ 的各阶固有频率 p_j^c 。

4) 对于式(17),置迭代轮次 $j=1 (j=1, 2, \dots, n)$, 给定允许误差 $\epsilon > 0$, 以 $p_j^{(1)} = p_j^c$ 为初始值进行如下双向搜索:

a. 给定初始反向搜索步长 h , 则同时满足不等式 $f^{(l)}(g\underline{\mu}, \underline{p}_j^{(l)}) \times f^{(l)}(g\bar{\mu}, \bar{p}_j^{(l)}) \leq 0$ 和 $f^{(l+1)}(g\underline{\mu}, \underline{p}_j^{(l)} - h) \times f^{(l+1)}(g\bar{\mu}, \bar{p}_j^{(l)} - h) \geq 0$, 且泛灰模 $d(f^{(l)}, f^{(l+1)}) \leq \epsilon$ 的 $\underline{p}_j^{(l)}$ 为第 j 阶固有频率 p_j 的下界 $\underline{p}_j = \underline{p}_j^{(l)}$, 其中 l 为迭代次数;

b. 给定初始正向搜索步长 h , 则同时满足不等式 $f^{(k)}(g\underline{\mu}, \bar{p}_j^{(k)}) \times f^{(k)}(g\bar{\mu}, \bar{p}_j^{(k)}) \leq 0$ 和 $f^{(k+1)}(g\underline{\mu}, \bar{p}_j^{(k)} + h) \times f^{(k+1)}(g\bar{\mu}, \bar{p}_j^{(k)} + h) \geq 0$, 且泛灰模 $d(f^{(k)}, f^{(k+1)}) \leq \epsilon$ 的 $\bar{p}_j^{(k)}$ 即为第 j 阶固有频率 p_j 的上界 $\bar{p}_j = \bar{p}_j^{(k)}$, 其中 k 为迭代次数。

5) 置迭代轮次 $j = j + 1$, 重复步骤 4), 依次得到系统各阶固有频率的解区间 $[p_j, \bar{p}_j] (j=1, 2, \dots, n)$ 。

4 算例

算例 1 单链式三轴段圆盘扭振系统^[13]: 左端固定, 右端自由。各圆盘的转动惯量 $J_i = J (i=1, 2, 3)$ 相同, 各轴段的扭转刚度 $k_i = k (i=1, 2, 3)$ 相同, 其中各 J_i 存在 $\pm 3\%$ 的误差, 各 k_i 存在 $\pm 5\%$ 的误差。求系统的各阶固有频率, 各阶传递矩阵为

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ -J_i p^2 & 1 - (J_i p^2 / k_i) \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\text{总传递矩阵 } \mathbf{C} = \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_{11}(p) & c_{12}(p) \\ c_{21}(p) & c_{22}(p) \end{bmatrix}$$

由边界条件 $\theta_0 = 0, M_3^R = 0$ 可推得系统关于固有频率的非线性方程为

$$c_{22}(p) = -\frac{J_1 J_2 J_3}{k_1 k_2 k_3} p^6 + \left(\frac{J_1 J_2}{k_1 k_3} + \left(\frac{J_1}{k_2} + \frac{J_2}{k_2} + \frac{J_1}{k_1}\right) \frac{J_3}{k_3} + \frac{J_1 J_2}{k_1 k_2} p^4 - \left(\frac{J_1 + J_2}{k_3} + \frac{J_3}{k_3} + \frac{J_1}{k_2} + \frac{J_2}{k_2} + \frac{J_1}{k_1}\right) p^2 + 1 = 0$$

结构参数 $k_i, J_i (i=1, 2, 3)$ 相互独立, 上式中每一除式中分子、分母均相互独立, 所以可应用改进的泛灰数四则运算规则。置允许误差 $\epsilon = 10^{-4}$, 分别

用泛灰运算和改进的泛灰运算,得到系统各阶固有频率值域与区间逐步离散法^[13]的结果见表 1。

表 1 链式结构的固有频率区间

Tab. 1 Natural frequency of chain structures

$p^2/(k/J)$	区间逐步离散法	泛灰解	改进的泛灰解
$[\underline{p}_1^2, \bar{p}_1^2]$	[0.182 7, 0.214 4]	[0.194 0, 0.201 9]	[0.182 7, 0.214 4]
$[\underline{p}_2^2, \bar{p}_2^2]$	[1.434 2, 1.683 2]	[1.522 9, 1.585 2]	[1.434 2, 1.683 2]
$[\underline{p}_3^2, \bar{p}_3^2]$	[2.994 8, 3.514 8]	[3.180 0, 3.310 0]	[2.994 8, 3.514 8]

由表 1 可见,泛灰解区间是文献[13]的解区间的子集,而改进的泛灰解区间与文献[13]相同。区间逐步离散法对于问题中的区间变量变化较小时,其计算结果能逼近真实的解区间^[13]。由于利用改进的泛灰数运算方法,故改进的泛灰解比原泛灰解更逼近于原方程的准确解。

算例 2 求图 2 所示 5 自由度框架结构的各阶固有频率的解区间^[14]。其刚度参数区间 $[k_1] = [2, 2.02]$ kN/m, $[k_2] = [1.8, 1.85]$ kN/m, $[k_3] = [1.6, 1.63]$ kN/m, $[k_4] = [1.4, 1.42]$ kN/m, $[k_5] = [1.2, 1.21]$ kN/m; 质量参数区间 $[m_1] = [29, 31]$ kg, $[m_2] = [26, 28]$ kg, $[m_3] = [26, 28]$ kg, $[m_4] = [24, 26]$ kg, $[m_5] = [17, 19]$ kg。

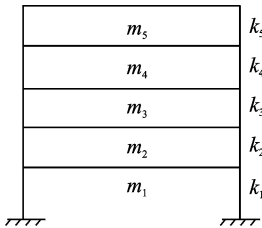


图 2 多层框架结构

Fig. 2 Multiple storied frame structure

该链式结构其各阶传递矩阵为

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_i \\ -m_i p^2 & 1 - (m_i p^2/k_i) \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

由总传递矩阵 $C = C_5 C_4 C_3 C_2 C_1 =$

$$\begin{bmatrix} c_{11}(p) & c_{12}(p) \\ c_{21}(p) & c_{22}(p) \end{bmatrix}$$

和两端的边界条件得到该系统的关于固有频率的非线性方程为 $c_{22}(p^2) =$

$$\left[-p(m_4 + m_5) + p^2 \frac{m_4 m_5}{k_5} \right] \cdot$$

$$\left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} - p \left[\frac{m_1}{k_1 k_2} + \frac{m_2}{k_1 k_3} + \frac{m_1}{k_1 k_3} + \frac{m_2}{k_2 k_3} \right] + \right.$$

$$\left. p^2 \frac{m_1 m_2}{k_1 k_2 k_3} \right] + \left[-\frac{p m_5}{k_4} + \left[1 - \frac{p m_5}{k_5} \right] \left[1 - \frac{p m_4}{k_4} \right] \right] \cdot$$

$$\left[-p \left[\frac{m_2 + m_3}{k_1} + \frac{m_3}{k_2} \right] + p^2 \left[\frac{m_1 m_3}{k_1 k_2} + \frac{m_2 m_3}{k_1 k_3} \right] + \right.$$

$$\left. \left[1 - \frac{p m_3}{k_3} \right] \left[1 - \frac{p m_2}{k_2} \right] \left[1 - \frac{p m_1}{k_1} \right] \right] = 0$$

结构参数 $k_i, m_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 相互独立,上式每一除式中分子、分母相互独立,故可应用改进的泛灰数运算规则。置允许误差 $\epsilon = 10^{-4}$,用泛灰运算和笔者改进的泛灰运算,得到的系统的各阶固有频率值域与文献[14-15]的结果一并列于表 2。

表 2 框架结构的固有频率区间

Tab. 2 Natural frequency of frame structure

p^2/Hz^2	矩阵摄动法 ^[14]	全局优化解 ^[15]	泛灰解	改进的泛灰解
$[\underline{p}_1^2, \bar{p}_1^2]$	[4.617, 7.830]	[5.858, 6.502]	[5.962 0, 6.388 7]	[5.858 1, 6.502 0]
$[\underline{p}_2^2, \bar{p}_2^2]$	[40.643, 47.820]	[42.029, 46.309]	[42.561 6, 45.728 1]	[42.029 3, 46.308 8]
$[\underline{p}_3^2, \bar{p}_3^2]$	[99.180, 109.399]	[98.856, 108.689]	[100.180 5, 107.241 0]	[98.856 4, 108.689 0]
$[\underline{p}_4^2, \bar{p}_4^2]$	[157.848, 174.002]	[158.051, 173.778]	[160.404 9, 171.233 5]	[158.051 5, 173.777 7]
$[\underline{p}_5^2, \bar{p}_5^2]$	[209.515, 230.084]	[209.515, 230.084]	[213.782 2, 225.518 6]	[209.514 8, 230.084 5]

由表 2 可见,矩阵摄动法得到的解区间与本问题的精确解即全局优化解没有明显的包含与被包含的关系;泛灰解区间是全局优化解区间的子集;而笔者改进的泛灰解区间则与全局优化解相同,再次彰显了改进的泛灰解的正确性。

从计算过程分析,采用区间逐步离散算法,针对某阶固有频率的计算时间与系统中自由度个数和独立参数个数有关,且计算时间随着系统中独立参数个数的增长呈幂次方增长^[13],在独立参数较多时,计算效率低;而笔者算法与系统中自由度个数和独立参数个数无关,计算时间较短。

5 结束语

笔者提出了改进的泛灰数除法运算规则,并编写了泛灰四则运算的 Matlab 程序,通过数学算例表明了该运算规则的合理性。文中提供了不确定链式结构固有频率计算的新方法。算例结果与其他文献结果对比表明:原泛灰数运算规则下的固有频率的解区间包含于系统的准确解,而改进泛灰数运算规则下的解区间则为原问题的精确解,进一步验证了

改进泛灰数运算规则的合理性和正确性。进行不确定性链式结构各阶固有频率分析时,基于泛灰理论的区间搜索进退算法没有引入更多假设,求解过程与系统中自由度个数和独立参数个数无关,适用面较广,计算效率较高。

参 考 文 献

- [1] Deng J. The control problem of grey systems [J]. *Systems & Control Letter*, 1982, 1(5): 288-294.
- [2] Elishakoff I. Three versions of the finite element method based on concepts of either stochasticity, fuzziness or anti-optimization [J]. *Applied Mechanics Review*, 1998, 51(3): 209-218.
- [3] Muhanna R L, Mullen R L. Uncertainty in mechanics problems-interval-based approach [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2001, 127: 556-557.
- [4] 祁力群. 区间分析[J]. *运筹学杂志*, 1982, 1(1): 151-156.
Qi Liqun. Interval analysis [J]. *Chinese Journal of Operation Research*, 1982, 1(1): 151-156. (in Chinese)
- [5] 牟峰, 袁晓辉, 王慈光, 等. 基于灰预测和正态云的参数自适应蚁群遗传算法[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(6): 701-706.
Mu Feng, Yuan Xiaohui, Wang Ciguang, et al. Ant-colony-genetic algorithm with adaptive parameters based on grey prediction and normal cloud [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(6): 701-706. (in Chinese)
- [6] 秦海勤, 徐可君, 隋育松, 等. 基于系统信息融合的滚动轴承故障模式识别[J]. *振动、测试与诊断*, 2011, 31(3): 372-376.
Qin Haiqin, Xu Kejun, Sui Yusong, et al. Rolling bearing fault pattern recognition based on fusing random, gray and fuzzy information [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2011, 31(3): 372-376. (in Chinese)
- [7] 王清印. 灰色数学基础[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996: 91-157.
- [8] Luo Youxin, Huang Hongzhong, Fan Xianfeng. The universal grey transfer matrix method and its application in calculating the natural frequencies of systems [J]. *Strojnicki Vestnik-Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 52(9): 592-598.
- [9] 吴晓, 罗佑新, 文会军, 等. 非确定结构系统区间分析的泛灰求解方法[J]. *计算力学学报*, 2003, 20(3): 329-333.
Wu Xiao, Luo Youxin, Wen Huijun, et al. Interval analysis method of uncertain structural systems using universal grey number [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20(3): 329-333. (in Chinese)
- [10] 靳红玲, 陈建军, 马洪波, 等. 计算广义 Rayleigh 商的泛灰数学方法[J]. *振动、测试与诊断*, 2013, 33(3): 416-420.
Jin Hongling, Chen Jianjun, Ma Hongbo, et al. A method for the calculation of Rayleigh quotient with universal grey mathematics [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2013, 33(3): 416-420. (in Chinese)
- [11] 王艾伦, 骆舟. 基于键合图的传递矩阵法及其在链式系统建模中的应用[J]. *机械科学与技术*, 2009, 28(4): 426-430.
Wang Ailun, Luo Zhou. A transfer matrix method based on bond graph and its application to the modeling of chain structured systems [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2009, 28(4): 426-430. (in Chinese)
- [12] 董满才, 芮筱亭, 王国平. 随机参数多体系统特征值随机特性分析方法研究[J]. *南京理工大学学报*, 2006, 30(4): 458-461.
Dong Mancai, Rui Xiaoting, Wang Guoping. Analysis methods of random eigenvalue of multibody system with random parameters [J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2006, 30(4): 458-461. (in Chinese)
- [13] 张建国, 陈建军, 黄居锋. 基于传递矩阵法的不确定链式结构固有频率区间分析[J]. *振动与冲击*, 2007, 26(1): 100-103.
Zhang Jianguo, Chen Jianjun, Huang Jufeng. Interval analysis for natural frequencies of an uncertain structure based on transfer matrix method [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(1): 100-103. (in Chinese)
- [14] 陈塑寰, 邱志平, 宋大同, 等. 区间矩阵标准特征值问题的一种解法[J]. *吉林大学学报*, 1993, 23(3): 1-8.
Chen Suhuan, Qiu Zhiping, Song Datong, et al. A method for solving eigenvalue problem of the interval matrix [J]. *Journal of Jilin University of Technology*, 1993, 23(3): 1-8. (in Chinese)
- [15] 王登刚. 计算具有区间参数结构的固有频率的优化方法[J]. *力学学报*, 2004, 36(3): 364-372.
Wang Denggang. Global optimization method for computing frequencies of structures with interval uncertain parameters [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(3): 364-372. (in Chinese)



第一作者简介: 靳红玲,女,1975年9月生,博士、讲师。主要研究方向为不确定结构分析与可靠性工程。曾发表《计算广义 Rayleigh 商的泛灰数学方法》(《振动、测试与诊断》2013年第33卷第3期)等论文。

E-mail: 375996348@qq.com

