第 36 卷第 3 期
2016 年 6 月
振动、测试与诊断
Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis
Vol. 36 No. 3
Jun. 2016

doi:10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2016.03.013

装备测试性增长过程的贝叶斯验证方法*

尹园威， 尚朝轩， 蔡金燕， 马彦恒， 李 刚
（军械工程学院电子与光学工程系 石家庄，050003）

摘要 现有测试性验证试验方案需要较多故障样本，存在测试性验证时间长、结果置信度低的问题，为此提出一种装备测试性增长模型的贝叶斯验证方法，在小子样、异总体的情况下进行测试性验证。建立装备测试性水平动态增长的数学模型，依据已有的研制阶段的数据进行求解，得到测试性增长模型的具体参数值，并对测试性水平进行预测。确定测试性水平的先验分布，使用最大熵法求解分布参数，采用贝叶斯理论融合现场试验数据得到后验分布，实现对装备测试性水平的验证。实例分析表明，该方法在较少样本量的情况下能够提高验证结果的置信度，降低双方风险。

关键词 测试性增长；测试性验证；异总体；贝叶斯理论
中图分类号 TH16；TP206

引 言

测试性是装备的一种设计特性，良好的测试性设计能够及时、准确地确定产品的状态，为故障的测试与诊断提供便利[1]。这要求装备在定型之前必须有很高的测试性水平，体现在参数上就是“三率”水平要高。现有 GJB 2547A 和 GB5080.5 方法[2-3]，确定的测试性验证试验方案需要较大故障样本量，有必要利用研制阶段的数据减少故障样本量[4-5]。由于故障注入试验属于高风险、高费用的破坏性试验，不可能大量开展，因此阶段性的测试试验所获取的数据属于“小子样”数据，并且由于研究人员会在测试性试验结束后及时对测试性设计中的不足之处进行修改，在各阶段测试性试验得到的试验数据并非服从同一总体，即测试性参数的分布处于不断变动上升的过程中，属于“异总体”情况，所以可称之为动态分布参数[6]。

在对测试性水平进行验证时，必须考虑测试性水平动态增长的特性和试验数据较少的实际情况，建立描述测试性增长过程的数学模型，并充分利用研制阶段的信息，以解决实际情况中样本量少、评估置信度低的问题。因此，解决这个问题的两个关键内容是测试性增长的数学模型与贝叶斯综合验证方法。笔者通过建立测试性水平动态增长的数学模型，利用贝叶斯方法综合研制阶段的试验数据，提出一种动态分布参数的测试性验证贝叶斯方法，使用少量的现场试验数据能够得到较高的参数估值和较高的置信度。

1 测试性增长模型

1.1 增长模型描述

经过多次试验发现装备的故障，经过测试性设计改进或其他改进措施之后，产品的测试性水平得到逐步提高，并在未来的时间里仍会保持这种增长趋势[7]。对于装备测试性改进的方式主要有两种：即时纠正方式和延缓纠正方式。

即时纠正方式是在试验过程中，对装备暴露测试性设计缺陷立即纠正，是一个“试验—纠正—再试验”的过程，使装备的测试性在试验过程中逐步增长，测试性增长曲线可近似认为是平滑的曲线；延缓纠正方式是对装备所暴露的不能正确检测/隔离的故障暂时进行简单的修复或更换故障部件，等到试验阶段结束后，再进行测试性设计的改进，是一个“试验—发现问题—集中纠正—继续试验”的过程。延缓纠正使装备的测试性增长在下一次试验开始时才出现，而在同一阶段内测试性水平保持不变，因此，测试性增长曲线可近似认为是阶梯形曲线。

文献[8]使用 Gompertz 曲线来描述产品性能增长的规律。其特点为：开始增长较慢，然后逐渐加快，到某点以后增长速度又减慢；也可以描述早期增

* 国家部委“十二五”预先研究资助项目(51319040201)
收稿日期：2014-07-26；修回日期：2014-12-05

长较快，后来增长较慢的情况；同时该模型可用来描述离散的增长过程。这些特点也符合测试性延缓修正的增长特点，所以使用 Gompertz 模型描述测试性的增长过程是合理的。该学习曲线特性的数学模型[9-10]为

$$p(t)=ab^{c^t} \tag{1}$$

其中：$p(t)$ 为在 t 时刻的参数估值。

该数学模型不仅可以评估当前的测试性水平，也可以预测未来的测试性水平。其中各参数具有以下约束条件：$0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$。该模型中每个参数都具有物理工程意义。当 $t\to 0$ 时，$p(t)=ab$，所以 ab 是产品的初始测试性水平；当 $t\to\infty$ 时，$p(t)=a$，所以 a 表示参数值的极限，即测试性水平的极限；b 为初始测试性水平与极限测试性水平之比；参数 c 反应增长的速度，c 越小，增长速度越快，c 越大，增长速度越小。

1.2　模型求解

假设在研制阶段有 M 组试验数据($M=3m$，m 为正整数)，试验采用延缓纠正方式对未检测到的故障进行分析、排除和改进。设 j 代表第 j 组试验($j=1,2,\cdots,3m$)，则每组试验之后装备的测试性水平将会得到增长。将试验的组数 j 作为变量时，其数学模型可以改写为如下形式：$p(j)=ab^{c^j}$，代表参数是随各组试验增长的。对该增长模型进行求解过程[11]如下。

对 $p(j)=ab^{c^j}$ 进行对数变换，得到 $\ln(p(j))=\ln a+c^j\ln b$，则

$$\begin{cases} S_1 \triangleq \sum_{j=1}^{m}\ln(p(j))=m\ln a+\ln b\sum_{j=1}^{m}c^j \\ S_2 \triangleq \sum_{j=1+m}^{2m}\ln(p(j))=m\ln a+\ln b\sum_{j=1+m}^{2m}c^j \\ S_3 \triangleq \sum_{j=1+2m}^{3m}\ln(p(j))=m\ln a+\ln b\sum_{j=1+2m}^{m}c^j \end{cases}$$

三式联立，求得参数 c 的估计值

$$\hat{c}=\left[\frac{S_3-S_2}{S_2-S_1}\right]^{\frac{1}{m}} \tag{2}$$

得出 a，b 参数估计值的求解公式为

$$\hat{a}=\exp\left\{\frac{1}{m}\left[S_1+\frac{S_2-S_1}{1-c^m}\right]\right\} \tag{3}$$

$$\hat{b}=\left\{\frac{(S_2-S_1)(c-1)}{(1-c^m)^2}\right\} \tag{4}$$

产品的测试性增长 Gompertz 公式为

$$\hat{p}(j)=\hat{a}\hat{b}^{\hat{c}^j} \tag{5}$$

采取纠正措施后下一次试验参数的预测值为

$$\hat{p}(j+1)=\hat{a}\hat{b}^{\hat{c}^{j+1}} \tag{6}$$

2　测试性验证的贝叶斯方法

2.1　贝叶斯验证方法

2.1.1　贝叶斯方法

测试性验证试验中对于注入的故障，只分为能够检测或不能检测，因此其数据是成败型数据，其分布服从二项分布。对于注入的故障数 n，能够检测到的故障数为 s，未检测到的故障数为 f($n=f+s$)。假设故障检测率为 p，则 s 服从二项分布：$s\sim B(n,p)$，对于 p 的分布在工程中经常使用其共轭分布(贝塔分布)表示，即

$$\mathrm{Beta}(p;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \quad (0\leqslant p\leqslant 1) \tag{7}$$

如果具有少量的现场试验数据(n_c，s_c)，可使用贝叶斯公式得到相应的验后分布，即

$$\mathrm{Beta}(p;\alpha+s_c,\beta+n_c-s_c)= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha+s_c-1}(1-p)^{\beta+n_c-s_c-1} \tag{8}$$

依据验后分布可得到验后参数的一、二阶矩估计计算公式为

$$E(p)=(\alpha+s_c)/(a+\beta+n_c) \tag{9}$$

$$E(p^2)=\frac{\alpha+s_c}{\alpha+\beta+n_c}\,\frac{\alpha+s_c+1}{\alpha+\beta+n_c+1} \tag{10}$$

在贝叶斯融合的方法中，通过与实物测试性试验的小子样数据融合之后，才能得到参数的验后估计，对于验前参数 α，β 的确定，需要对研制阶段试验数据处理之后得到[12]。

2.1.2　测试性验证

对于测试性水平是否达到规定要求，需要进行判定，这里给出两种计算与判定方法：置信下限的判定方法和双方风险的判定方法。

1）置信下限求解

对于离散分布和连续分布形式的置信下限求解公式[13-14]为

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{r}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p_L^{n-k}(1-p_L)^k=1-C \\ \int_0^{p_L}\mathrm{Beta}(p;a,b)\mathrm{d}p=1-C \end{cases} \tag{11}$$

其中：C 为置信度水平。

r 为成败数据中失败的次数，通过变化可以得到可信度的置信下限

$$p_{L,C}=\frac{1}{1+\dfrac{r+1}{n-r}F_{1-C}(f_1,f_2)} \tag{12}$$

其中：$F_a(f_1,f_2)$ 为自由度为 f_1 和 f_2 的 F 分布的上分位点；$f_1=2(r+1)$；$f_2=2(n-r)$。

2）双方风险约束

设 p_0 是使用方对承制方提出的测试性指标要求值，p_1 为测试性指标最低可接受值，承制方风险为 γ，使用方风险为 η，依据这些参数可以确定测试性验证的条件

$$\begin{cases}P(p \geqslant p_0 \mid (n_c, s_c) \leqslant \gamma \\ P(p \leqslant p_1 \mid (n_c, s_c) \leqslant \eta\end{cases} \tag{13}$$

3）判定依据

依据试验数据得到现场试验测试性参数的验后分布，如果 $p_{L,C}$ 大于规定的数值，则以 C 的置信度认为产品通过验证，予以接收，否则拒收；如果满足式(13)，则认为装备的测试性水平达到要求，予以接收，否则拒收。

2.2 确定先验分布参数的最大熵方法

如果在工程中给出的是参数的点估计 $\hat{q}$，其计算公式为

$$\hat{q} = E(q) = \int_0^1 q\varphi(q)\mathrm{d}q \tag{14}$$

对于贝塔分布，其熵函数为

$$H[\varphi(q)] = -\int_0^1 \mathrm{Be}(q;a,b)\ln(\mathrm{Be}(q;a,b))\mathrm{d}q = \ln(B) - \frac{a-1}{B}B_1 - \frac{a-1}{B}B_2 = H_B(a,b) \tag{15}$$

其中：B 为贝塔函数，$B = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$；$B_1 = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ln(x)\mathrm{d}x$；$B_2 = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \cdot \ln(1-x)\mathrm{d}x$。

得到点估计后，其约束条件为

$$\begin{cases}\hat{q} = a/(a+b) \\ H_B = \max[H_B(a,b)]\end{cases} \tag{16}$$

由约束条件可以确定现场试验阶段的验前分布参数 α_1 和 β_1，那么其先验分布为 $\mathrm{Beta}(p;\alpha_1,\beta_1)$。

使用贝叶斯方法，结合现场小子样数据后得到测试性参数的估计值为

$$p' = (\alpha_1 + s_c)/(a_1 + \beta_1 + n_c) \tag{17}$$

3 实例分析

笔者以故障检测率 γ_{FD} 为例进行分析，其他参数的分析方法相同。某雷达系统在研制阶段，经历3组试验得到的(n, f)数据为：(n_1, f_1)=(17,4)，(n_2, f_2)=(12,2)，(n_3, f_3)=(8,1)，现场数据为(n_4, f_4)=(6,0)。本研究的故障检测是在确定性测试条件下进行的，对非可靠性测试需要采用相应的故障检测方法[15]。将已有的试验数据代入到增长公式中，求解得到相应的参数值：a = 0.932 9，b = 0.819 7，c = 0.567 7。依据式(5)，得到测试性增长公式为

$$\hat{p}(j) = 0.932\,9 \times 0.819\,7^{0.567\,7^j} \tag{18}$$

依据式(18)得到的各阶段参数值如表1所示。

表1 增长过程的相应参数值

Tab.1 The parameter value of growth

j	试验数据		各阶段参数估值
0	(n_1, f_1)	(17, 4)	0.764 7
1	(n_2, f_2)	(12, 2)	0.833 3
2	(n_3, f_3)	(8, 1)	0.875 0

双方合同规定系统的参数值分别为：双方风险 $\mu=\eta=0.2$，目标值 $q_0=0.90$，极限值 $q_1=0.85$。当 $j=3$ 时，对现场试验阶段的参数预测值为：$p(3)=0.899\,6$，使用最大熵方法得到的先验分布参数值为 $a=8.304\,0$，$b=0.926\,8$。融合少量的现场试验数据后，得到的参数估值为：$p'(3)=0.939\,2$。依据不同的试验方法，得到不同的参数估值，表2给出了3种方法得到的相应参数值与验证结论。

表2 各试验方法结果的置信下限与验证结论

Tab.2 The $p_{L,C}$ value and result of different test method

方法	点估计	置信下限	实际风险(μ, η)	结论
Ⅰ	1	0.681 3	μ=0.264 9, η=0.531 4	拒收
Ⅱ	0.837 2	0.725 7	μ=0.062 8, η=0.400 7	拒收
Ⅲ	0.939 2	0.858 6	μ=0.199 4, η=0.035 7	接收

试验方法Ⅰ为经典方法，Ⅱ为简单综合方法，Ⅲ为本研究方法。当采用GB 5080.5中的方案时，至少需要78个样本量，在无检测失败数据时，置信下限可以使用公式 $p_{L,C}=(1-C)^{\frac{1}{n}}$（$n$ 为现场样本量）来获得。如果要将使用方风险控制在0.2以内，至少需要16个样本，而实际中现场样本量为6，与要求还有较大差距[16-17]。

仅使用现场数据时，虽然6个故障全部能够检测到，但置信下限低，风险太大，故拒收；使用简单综合方法时，置信下限有所提高，但评估参数未能达到目标要求，风险也超出规定要求，故拒收；使用测试性增长的融合方法时，置信下限较高，且评估参数达到目标要求，双方风险也在规定范围之内，故接收。

因此，使用测试性增长的贝叶斯评价方法，能充分使用研制阶段的数据，也考虑到在各试验阶段装备故障被纠正排除之后测试性增长的情况，故能够缩小试验样本量，在规定的双方风险范围内提高评估参数的精度和置信度。

4 结 论

1）建立了装备测试性增长的数学模型，描述了装备测试性设计成熟的过程，通过研制阶段的试验

数据确定模型中的参数，可以实现对参数的预测，并用于确定先验分布。

2）贝叶斯的综合方法能够有效融合各阶段的试验数据，通过现有数据确定当前测试性参数的分布，实现对装备测试性水平的综合评价，并通过验证方法得到置信下限与双方风险值。

3）经过对比分析，采用测试性增长的贝叶斯验证方法，可以节约试验样本量，并且结果置信度高，可以节约时间，加速装备的定型。

参　考　文　献

[1] 石君友. 测试性设计分析与验证[M]. 北京：国防工业出版社，2011：1-2.

[2] GJB 2547A-2012. 装备测试性工作通用要求[S].

[3] GB 5080.5-1985. 设备可靠性试验成功率的验证试验方案[S].

[4] 常春贺，杨江平，曹鹏举. 基于研制信息的测试性验证试验方案研究[J]. 航空学报，2012，33（11）：2057-2064.
Chang Chunhe，Yang Jiangping，Cao Pingju. Study on the scheme of testability demonstration test based on development information[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2012，33(11)：2057-2064.（in Chinese）

[5] 李天梅，邱静，刘冠军. 利用研制阶段试验数据制定测试性验证方案新方法[J]. 机械工程学报，2009，45（8）：52-57.
Li Tianmei，Qiu Jing，Liu Guanjun. New methodology for determining testability integrated test scheme with test data in the development stages[J]. Journal of Mechanical Engineering，2009，45（8）：52-57.（in Chinese）

[6] 汤巍，景博，黄以锋. 小子样变总体下的 Bayes 测试性验证方法[J]. 系统工程与电子技术，2014，36(12)：2566-2570.
Tang Wei，Jing Bo. Huang Yifeng. Testability verification method based on Bayes theory under small sample and varying population circumstance[J]. Systems Engineering and Electronics，2014，36（12）：2566-2570.（in Chinese）

[7] 明志茂，张云安，陶俊勇，等. 基于新 Dirichlet 先验分布的超参数确定方法[J]. 宇航学报，2008，29（6）：2062-2067.
Ming Zhimao，Zhang Yun'an，Tao Junyong，et al. A method to determine the hyper parameters of the new dirichlet prior distribution[J]. Journal of Astronautics，2008，29（6）：2062-2067.（in Chinese）

[8] Virene E P. Reliability growth and its upper limit[C]// Proceedings Annual of Symposium on Reliability. Boston：Massachusetts，1968：265-270.

[9] 梅文化. 可靠性增长试验[M]. 北京：国防工业出版社，2003：166-172.

[10] 张军科，李长福，冯欣. 成败型产品可靠性增长模型研究[J]. 质量与可靠性，2002(6)：19-22.
Zhang Junke，Li Changfu，Feng Xin. The reliability growth model of binomial distributed product[J]. Quality and Reliability，2002(6)：19-22.（in Chinese）

[11] 刘琦，冯静，周经纶. 基于 Gompertz 模型的液体火箭发动机可靠性增长分析[J]. 航空动力学报，2004，19（3）：419-423.
Liu Qi，Feng Jing，Zhou Jinglun. The reliability growth analysis for liquid rocket engine according to the Gompertz model[J]. Journal of Aerospace Power，2004，19（3）：419-423.（in Chinese）

[12] 雷华军，秦开宇. 确定测试性验证试验方案的贝叶斯方法[J]. 系统工程与电子技术，2012，34（12）：2612-2616.
Lei Huajun，Qin Kaiyu. Bayesian method for determination of testability demonstration test scheme[J]. Systems Engineerign and Electronics，2012，34（12）：2612-2616.（in Chinese）

[13] 李庆民，刘君，张志华. 武器系统仿真模型的可信性验证方法研究[J]. 系统仿真学报，2006，18（12）：3380-3386.
Li Qingmin，Liu Jun，Zhang Zhihua. On method of credibility estimation of weapon system simulation model[J]. Journal of System Simulation，2006，18（12）：3380-3386.（in Chinese）

[14] Yin Chun，Zhong Shouming，Chen Wufan. Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2012，17（1）：356-366.

[15] 孙靖杰，赵建军，姚刚，等. 非可靠性测试条件下复杂系统多故障定位方法[J]. 振动、测试与诊断，2013，33(5)：875-880.
Sun Jingjie，Zhao Jianjun，Yao Gang，et. al. Multiple fault location method for complex system with unreliable tests[J]. Journal of Vibration，Measurement & Diagnosis，2013，33(5)：875-880.（in Chinese）

[16] 韩明. 基于无失效数据的可靠性参数估计[M]. 北京：中国统计出版社，2005：124-125.

[17] Yin Chun，Chen Yangquan，Zhong Shouming. Fractional-order sliding mode based extremum seeking control of a class of nonlinear system[J]. Automatica，2014，50(12)：3173-3181.

第一作者简介：尹园威，男，1984 年 9 月生，博士生。主要研究方向为测试性验证评估。曾发表《层次测试性模型的评估方法》(《北京航空航天大学学报》2015 年第 41 卷第 1 期)等论文。
E-mail：yuanwei517@163.com